

O PREUREDITVAH VRST S KOMPLEKSNIMI ČLENI

ALEKSANDER SIMONIČ

School of Science

The University of New South Wales (Canberra)

Math. Subj. Class. (2010): 40A05

Lévy–Steinitzov izrek za pogojno konvergentne vrste s kompleksnimi členi pravi, da je množica vsot, ki jih dobimo po vseh preureditvah, bodisi premica bodisi kompleksna ravnina. V članku predstavimo podroben dokaz tega izreka.

ON REARRANGEMENTS OF INFINITE SERIES WITH COMPLEX TERMS

The Lévy–Steinitz theorem for conditionally convergent series with complex terms says that the set of sums we obtain after all rearrangements is either a line or the complex plane. In the article we present a detailed proof of this theorem.

Uvod

Spomnimo se, da je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ s kompleksnimi členi pogojno konvergentna, če ni absolutno konvergentna, tj. vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ divergira. Absolutno konvergentne vrste so konvergentne, toda obratno ni vedno res. Priljubljeni primer je *alternirajoča harmonična vrsta*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2. \quad (1)$$

Preureditev členov absolutno konvergentne vrste ne spremeni njene vsote. Formalno definiramo preureditev vrste $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ kot vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$, kjer je $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektivna preslikava, tj. π je permutacija množice \mathbb{N} . Preureditev pogojno konvergentne vrste pa lahko spremeni njeno vsoto. Ponazorimo to z alternirajočo harmonično vrsto. Vzemimo zaporedoma en pozitivni člen in dva negativna člena:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \log \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Pri izračunu smo člene razdelili na skupine s tremi členi in potem uporabili enakost (1). Očitno je vsota preurejene vrste različna od $\log 2$.