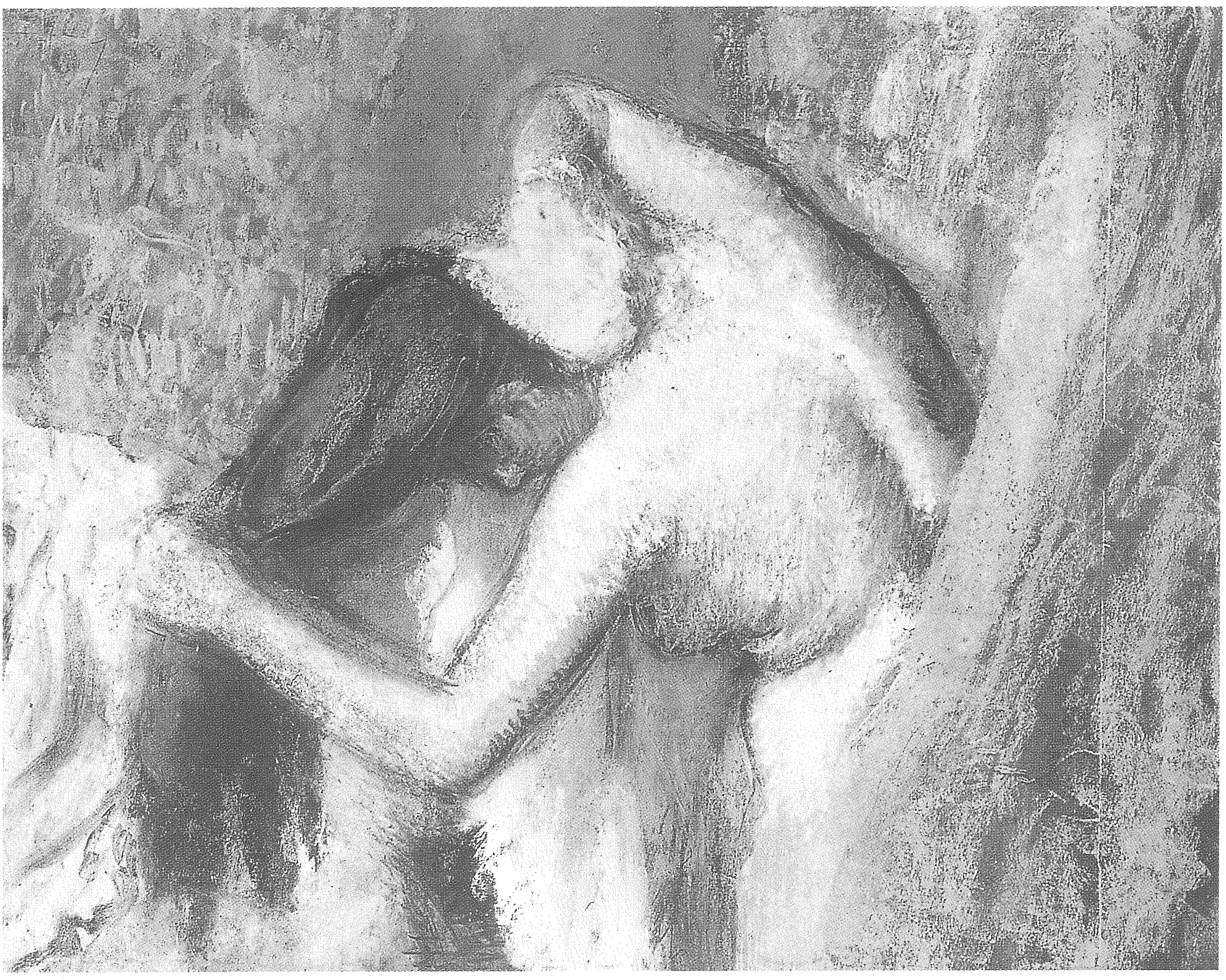
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

1998
Letnik 45
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1998

letnik 45, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.000 SIT, za študente 1.500 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 580 SIT, stare številke 380 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Vesti — News

Na ovitku: Edgar Degas, *Po kopeli*, 1895–1905.

MINIMALNE PLOSKVE

MIRAN ČERNE

Math. Subj. Class. (1991) 49Q05, 53A10

Članek predstavi tehniko, kako dokazati obstoj ploskve, ki ima pri danem robu najmanjšo površino.

MINIMAL SURFACES

A tehnique for proving the existance of a surface with the prescribed boundary and minimal area is presented.

1. Uvod

Pričujoči članek je naravno nadaljevanje članka *Plateaujev problem*, ki je v *Obzorniku za matematiko in fiziko* izšel v letu 1997 [2]. V članku je bil predstavljen tako imenovani Plateaujev problem za enostavno sklenjeno krivuljo γ v $\mathbb{R}^3$. Spomnimo se, da je problem spraševal po površinsko najmanjšem *disku* v $\mathbb{R}^3$ (disk = slika gladke preslikave iz enotskega kroga $D \subseteq \mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^3$), katerega rob je dana krivulja γ. Plateaujev problem je torej vnaprej predpisal topologijo iskane ploskve z danim robom in najmanjšo površino. Vendar, kot je bilo že omenjeno v [2], rešitev Plateaujevega problema, četudi vedno obstaja, ne da nujno tudi ploskve z najmanjšo površino, napeto na dano krivuljo. Nekaj takih primerov si lahko ogledamo v [2]. Problem, ki ga bomo obravnavali v tem članku, pa je naslednji:

Naj bo γ unija končno mnogo enostavno sklenjenih krivulj v $\mathbb{R}^3$. Med vsemi ploskvami $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, ki imajo γ za svoj rob $\partial\Sigma$, bi radi poiskali tisto ploskev Σ_0, ki ima najmanjšo površino.

Kot vidimo, si tokrat nikakor nočemo vezati rok z vnaprej predpisano topologijo iskane minimalne ploskve. To pa tudi pomeni, da za splošne enostavno sklenjene krivulje (ali končne unije le-teh) potrebujemo popolnoma drugačen pristop k problemu, kot je bil nakazan v [2].

2. Rektifikabilne ploskve

Prvi, naivni pristop k problemu bi bil naslednji: Naj bo $\mathcal{S}_\gamma$ družina vseh ploskev v $\mathbb{R}^3$ z robom γ. Z m označimo infimum površin vseh ploskev iz $\mathcal{S}_\gamma$:

$$m = \inf_{\Sigma \in \mathcal{S}_\gamma} \text{Površina}(\Sigma)$$

in izberimo tako zaporedje $(\Sigma_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}_\gamma$, da velja

$$\lim_{j\to\infty} \text{Površina}(\Sigma_j) = m\,.$$

Ker vemo, da zaporedja „rada" konvergirajo ali pa „imajo" vsaj kakšno konvergentno podzaporedje, lahko upamo, da tudi zaporedje (oziroma kakšno podzaporedje) ploskev $(\Sigma_j)_{j=1}^{\infty}$ „konvergira" k neki ploskvi Σ_0 z robom $\partial\Sigma_0 = \gamma$. Tedaj naj bi seveda bila $\Sigma_0 \in \mathcal{S}_\gamma$ ploskev z najmanjšo površino m.

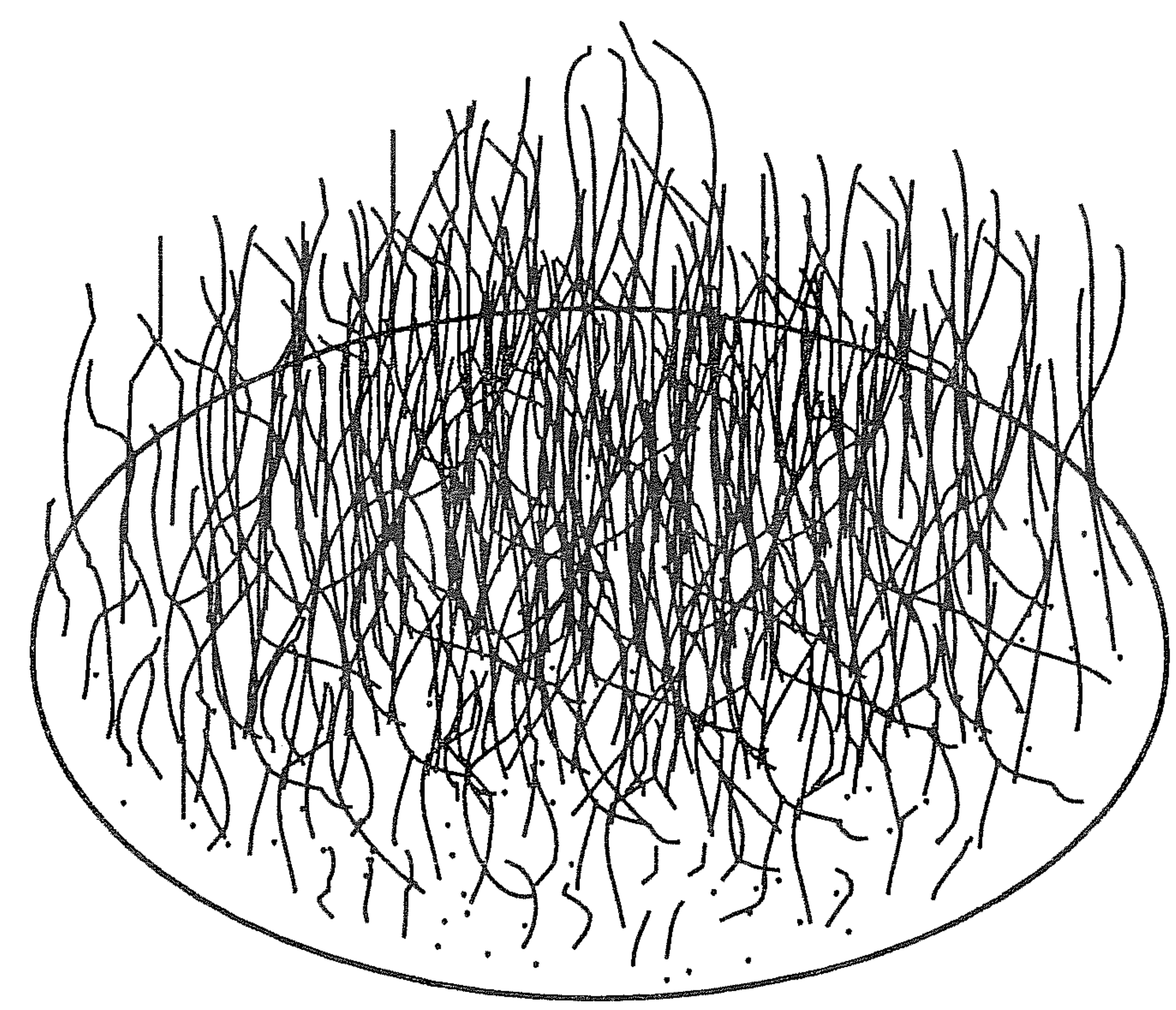
Da je beseda „konvergira" upravičeno v narekovajih, nam pokaže naslednji zgled možnega zaporedja ploskev $(\Sigma_j)_{j=1}^{\infty}$ z robom v enotski krožnici $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$, za katero vemo, da je ploskev z najmanjšo površino, ki jo γ napenja, kar ravninski disk $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Zaporedje ploskev $(\Sigma_j)_{j=1}^{\infty}$ tvorimo tako, da pri vsakem členu zaporedja površino nekoliko zmanjšamo, da še vedno velja

$$\lim_{j\to\infty} \text{Površina}(\Sigma_j) = \pi\,,$$

vendar tudi dodamo tanke, a dolge „dlake", katerih skupna površina postaja manjša in manjša. Primer „limitne ploskve" takega zaporedja si lahko ogledate na sliki 1.

Analitično je seveda problem v tem, da je na množici z majhno mero lahko funkcija precej divja, vendar je vrednost integrala (v našem primeru integrala za površino) take funkcije še vedno majhna.

Če torej hočemo naš naivni pristop k problemu iskanja ploskve z danim robom in najmanjšo površino uporabiti, moramo razširiti pojem ploskve, ki ne bo zajemal le gladkih ploskev, ampak tudi vse možne „limite" takih zaporedij.



Slika 1. Dlakavi disk [9].

Preslikava $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je Lipschitzova, če obstaja taka konstanta C, da velja

$$\|f(u) - f(v)\| \leq C\,\|u - v\|$$

za vse pare u, v iz Ω. Očitno je vsaka gladka preslikava lokalno Lipschitzova, vendar obstajajo tudi Lipschitzove preslikave, ki niso odvedljive.

Zgled. Preslikava

$$f(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

je Lipschitzova na $\mathbb{R}^2$ ($C = \sqrt{2}$). Njena zaloga vrednosti je stožec v zgornjem polprostoru z vrhom v točki 0.

Znano dejstvo je (Rademacherjev izrek [3]), da je vsaka Lipschitzova preslikava skoraj povsod glede na Lebesgueovo mero v $\mathbb{R}^2$ odvedljiva. Množica točk v $\mathbb{R}^2$, v katerih Lipschitzova preslikava f nima odvoda, ima torej Lebesgueovo mero enako 0. Potemtakem lahko govorimo o površini zaloge vrednosti Lipschitzove preslikave, ki je podana prek površinskega integrala [7]

$$P(f) := \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = \iint_{\Omega} \sqrt{|f_x|^2\, |f_y|^2 - (f_x \cdot f_y)^2}\, dx\, dy$$

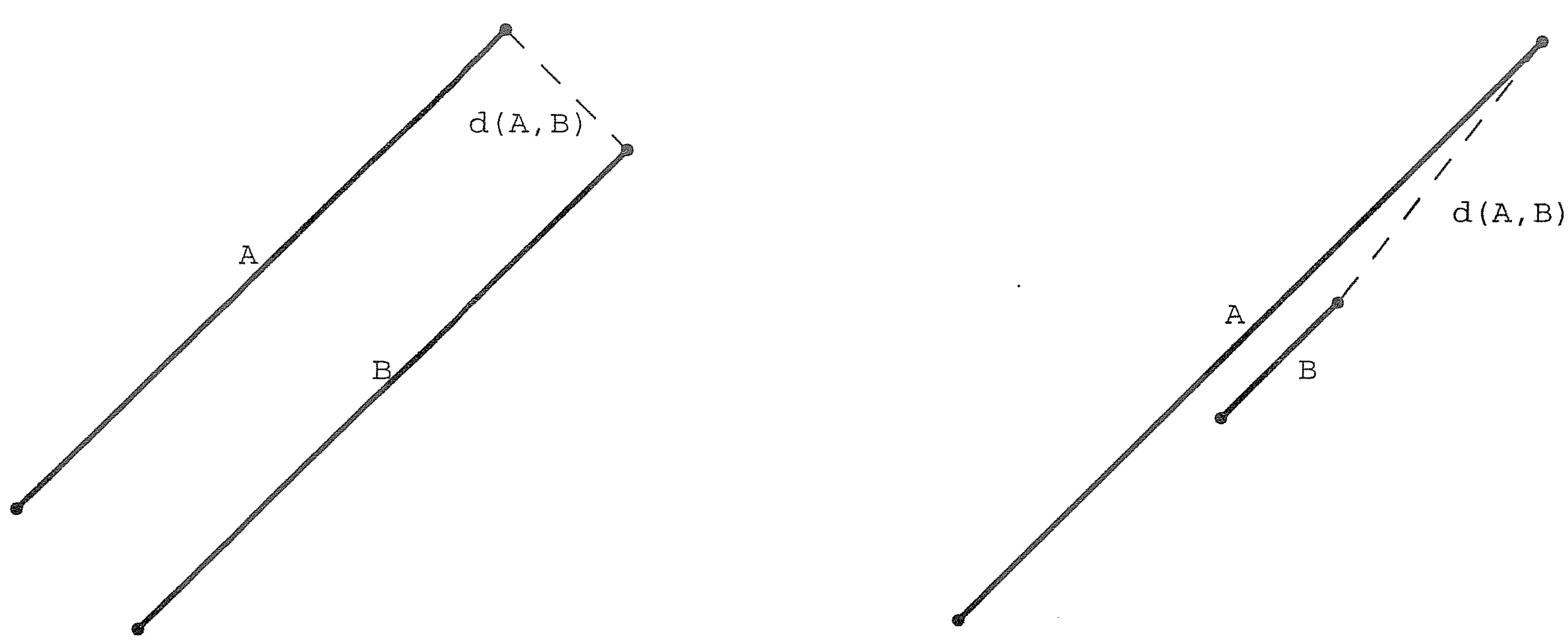
prav tako kot v odvedljivem primeru. Za ploskve, tako imenovane *rektifikabilne (dopustne) ploskve*, razglasimo sedaj vse **števne unije** slik Lipschitzovih preslikav iz podmnožic $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^3$, katerih skupna površina je **končna**. Na ta način smo za ploskve razglasili vse našim očem vidne površine: površina omare, avtomobila, kolesa, ...

Rektifikabilne ploskve imajo zaradi zgornje opombe o odvedljivosti tudi skoraj povsod tangento ravnino in normalo. To so torej ploskve, ki imajo „nekaj" vogalov, robov in drugih negladkih točk, vendar so skoraj povsod gladke. Zaradi obstoja normale pa lahko tudi govorimo o orientaciji take ploskve. Prostor dopustnih ploskev v $\mathbb{R}^3$ smo sedaj zelo razširili, tako da lahko upamo, da bo „limita" zaporedja (rektifikabilnih) ploskev zopet (rektifikabilna) ploskev.

Če hočemo govoriti o limiti zaporedja ploskev, moramo v prostor vseh rektifikabilnih ploskev vpeljati topologijo. Metrika, ki je na kompaktnih podmnožicah v $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}^3$ najbolj znana, tj. Hausdorffova metrika, v ta namen ni dobra. Spomnimo se [8], da Hausdorffova metrika med kompaktnima množicama A in B

$$d_H(A, B) := \max\{\sup_A d(a, B), \sup_B d(b, A)\}$$

meri, koliko sta ti dve množici v smislu evklidske metrike oddaljeni druga od druge, tj. množici A in B sta si v Hausdorffovi metriki blizu, če so vse točke množice A blizu B **in** če so vse točke množice B blizu A.



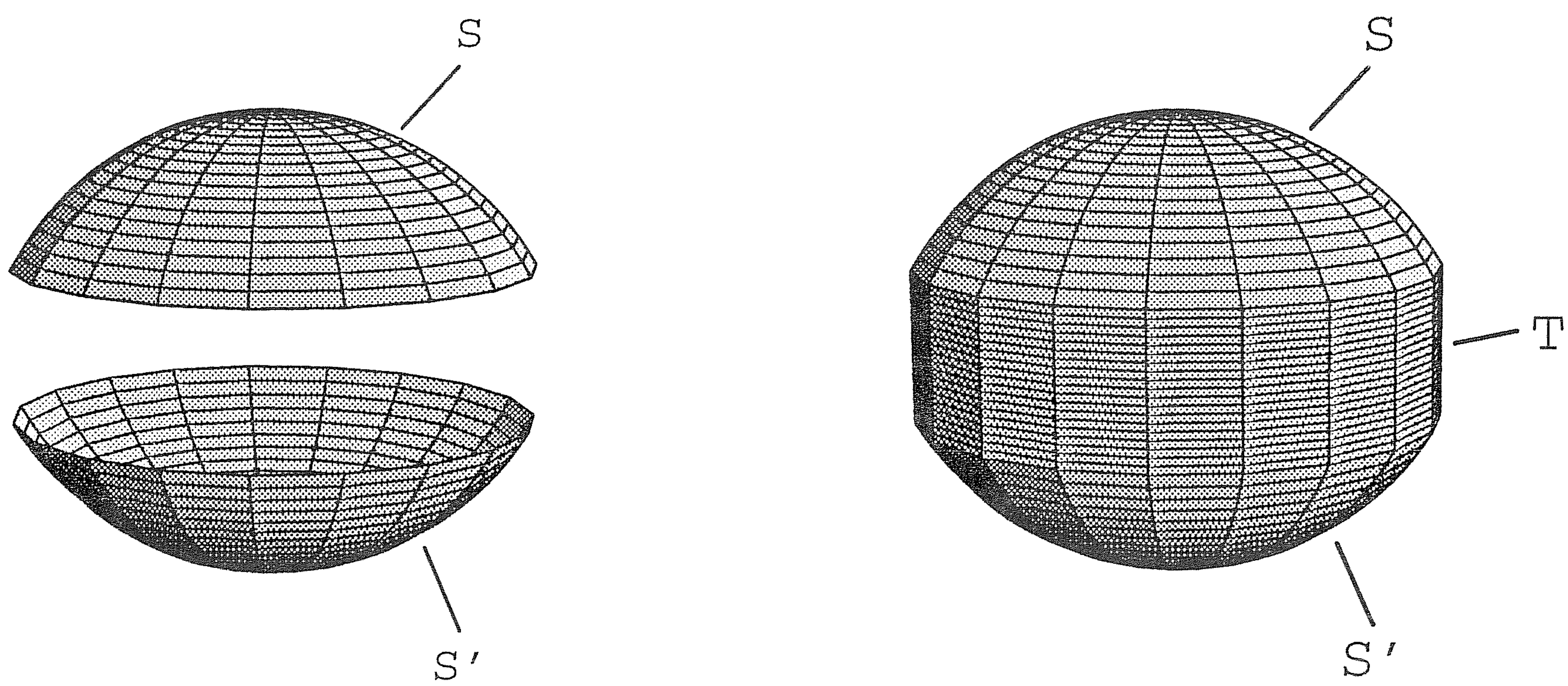
Slika 2. Množici na levi sliki sta si v Hausdorffovi metriki bližje kot množici na desni sliki.

Zgled. Naj bo $\varepsilon > 0$ majhno pozitivno število. Naj bo množica A enotska sfera v $\mathbb{R}^3$ in B števna unija sfer $(S_j)_{j=1}^{\infty}$ z radiji $r_j = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2^j}}$ (torej rektifikabilna ploskev), katerih središča so gosto razporejena po A. Tedaj je Hausdorffova razdalja teh dveh množic $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, medtem ko se njuni površini 4π in $4\pi\varepsilon$ zelo razlikujeta.

Vidimo, da v prostoru rektifikabilnih ploskev za naš namen potrebujemo drugačno razdaljo, in sicer tako, ki bo odražala tudi površinske lastnosti ploskev. Za rektifikabilno ploskev Σ definiramo *Whitneyjevo normo (flat norm)* [4,5]

$$\begin{aligned} \|\Sigma\| = \inf\{&\text{Površina}(T) + \text{Prostornina}(R);\\ &T\ (\text{ploskev}), R\ (\text{telo}),\ \text{da je}\ \Sigma \cup T = \partial R\}\,. \end{aligned}$$

Ideja definicije je naslednja. Dve ploskvi S in S' sta si v Whitneyjevi normi (metriki) blizu, če je norma njune „razlike" majhna, tj., če jima je treba dodati površinsko majhno ploskev T, da skupaj omejujejo telo R ($\partial R = S \cup S' \cup T$) z majhno prostornino.



Slika 3. Ploskvama S in S' je treba dodati ploskev T, da skupaj omejujejo telo R.

Opomba. Zgornja definicija je nekoliko poenostavljena, saj je treba upoštevati še orientacijo in večkratnost ploskev. Vse to se da regularno urediti v jeziku rektifikabilnih tokov, kjer ploskve gledamo kot funkcionale na prostoru diferencialnih form oziroma vektorskih polj [5]. Funkcional F_Σ, ki ga na prostoru vektorskih polj porodi dana orientabilna ploskev Σ, je namreč podan kot ploskovni integral vektorskega polja $\mathbf{Q}$ po Σ. Na ta način lahko v prostor ploskev vpeljemo tudi seštevanje, odštevanje in množenje s skalarji. Rob ∂F funcionala F nad prostorom vektorskih polj pa definiramo preko Stokesovega izreka:

$$\partial F(\mathbf{Q}) := F(\operatorname{rot}\mathbf{Q})\,.$$

Izkaže se, da za tako definirano topologijo na prostoru rektifikabilnih ploskev velja Flemingov izrek o kompaktnosti [4,5]:

Izrek. *Za vsak $c > 0$ in vsako kroglo B v $\mathbb{R}^3$ je množica rektifikabilnih ploskev Σ*

$$\{\Sigma \subseteq B; Površina(\Sigma) \leq c, Dolžina(\partial\Sigma) \leq c\}$$

kompaktna.

Torej lahko iz vsakega zaporedja rektifikabilnih ploskev z istim robom, katerih površine se zmanjšujejo (tako kot v našem naivnem pristopu) izberemo konvergentno podzaporedje (v smislu Whitneyjeve norme) in dobimo ploskev z danim robom, ki absolutno minimizira površino. Velja celo naslednji izrek (ki ne velja za rešitve Plateaujevega problema, kot se lahko vidi iz zgledov v [2]!), [4,5]:

Izrek (Fleming (62), Hardt, Simon (79)). *Ploskev, ki med vsemi ploskvami, napetimi na gladko enostavno sklenjeno krivuljo γ, minimizira površino, je* **gladka vložena** *(brez samopresečišč!) ploskev z robom γ.*

Torej ne glede na to, da smo bili pri definiciji dopustnih ploskev precej popustljivi, je končni rezultat, tj. minimizirajoča ploskev, v primeru ene enostavno sklenjene krivulje $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ vendarle gladka vložena ploskev v $\mathbb{R}^3$, ki ima rob v γ.

Opomba. Če ta rezultat primerjamo z dlakavim diskom iz slike 1, si upravičeno lahko postavimo vprašanje: Kaj se je zgodilo z „dlakami"? Lahko bi rekli, da smo „dlake" kratko in malo postrigli oziroma da jih sploh nočemo videti. Njihova površina je namreč 0 in zatorej ne prinašajo ničesar k skupni površini ploskve. Izjavo zgornjega izreka je torej treba razumeti v smislu ekvivalenčnih razredov ploskev, kjer so ploskve z ničelno površino zanemarljive.

3. Singularnosti

Probleme minimiziranja prostornine lahko podobno obravnavamo tudi v višjih dimenzijah (ter tudi kodimenzijah). Denimo v $\mathbb{R}^4$ bi za dano dvodimenzionalno ploskev Γ morali poiskati 3-dimenzionalno hiperploskev z robom Γ, ki ima med vsemi takimi hiperploskvami minimalno prostornino. Pri tem pride do izredno zanimivega pojava. Izkaže se namreč, da so hiperploskve, ki za dani rob minimizirajo višjedimenzionalno prostornino, v prostorih $\mathbb{R}^n$ za $n \leq 7$ vedno gladke. Za $n \geq 8$ pa imajo lahko take hiperploskve sigularnosti dimenzije $n - 8$.

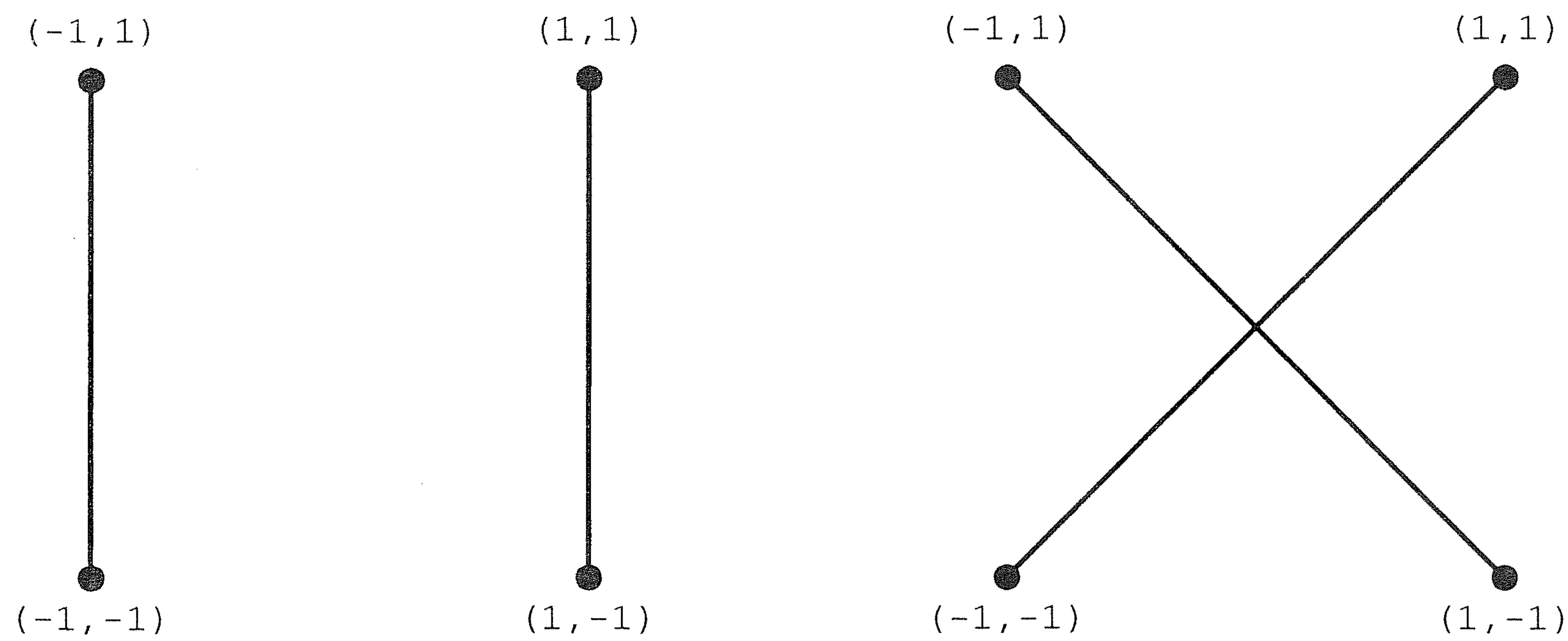
Skušali bomo nakazati, zakaj pri dovolj velikih dimenzijah lahko na minimizirajočih hiperploskvah nastanejo singularnosti. Več poglobljene in natančnejše informacije pa dobimo v [4] in [5].

Prvi znani primer singularnosti pri minimizirajočih hiperploskvah nastopi pri stožcu T, napetem na produktu dveh 3-sfer v $\mathbb{R}^8$:

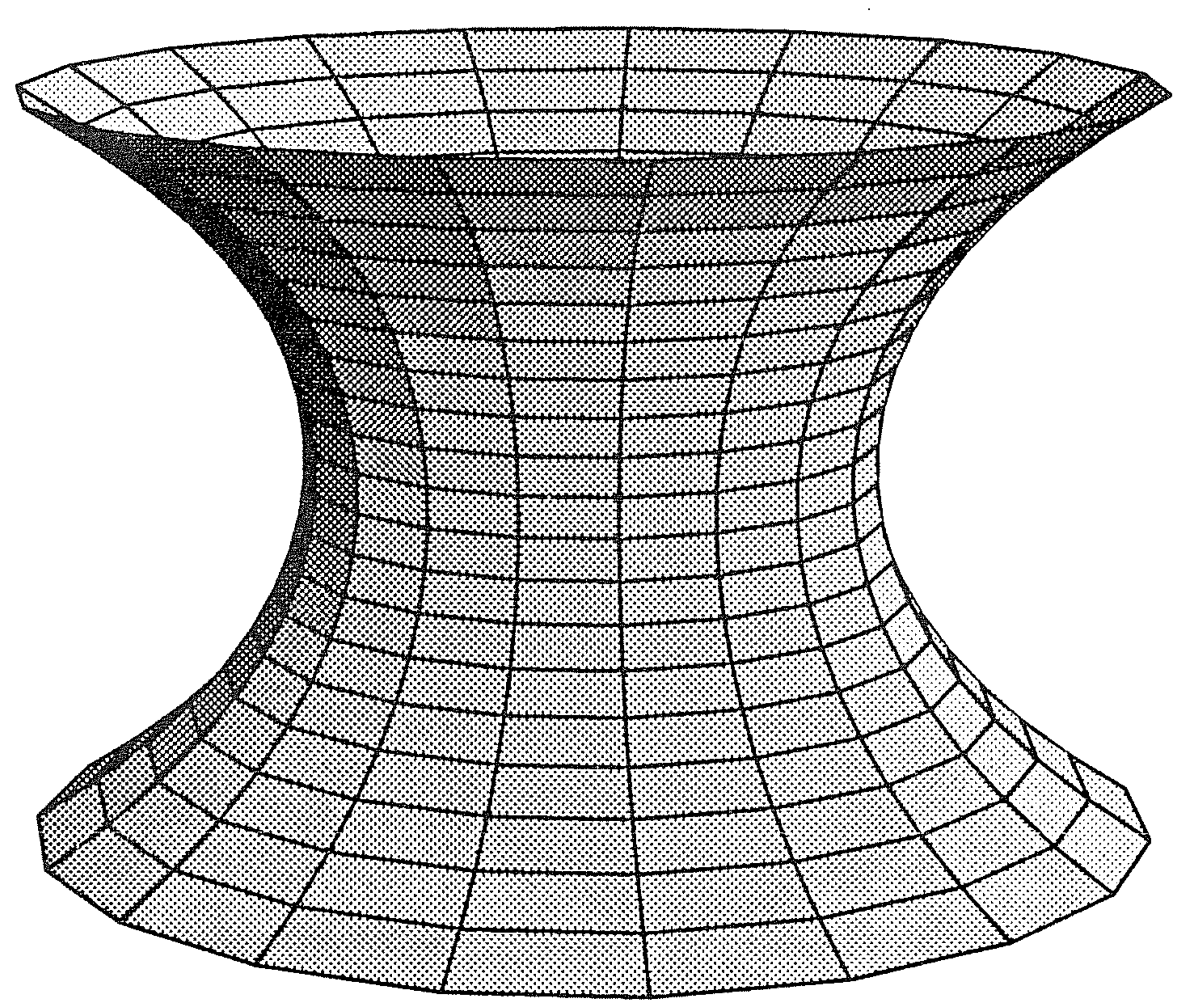
$$T = \{(\lambda\, x, \lambda\, y) \in \mathbb{R}^8; x, y \in S^3 \subseteq \mathbb{R}^4, \lambda \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^8 .$$

Dokazati se da, da je T 7-dimenzionalna hiperploskev v $\mathbb{R}^8$, ki ima med vsemi hiperploskvami, napetimi na $S^3 \times S^3$, najmanjšo 7-dimenzionalno maso. Poleg tega je točka $0 \in T$, ki je vrh tega stožca, singularna točka za T [5]. Da pa bi vsaj intuitivno razumeli, zakaj nastanejo singularnosti, si oglejmo naslednje nižjedimenzionalne stožce in valje:

1) Naj bo najprej $\Gamma_0 = S^0 \times S^0 \subseteq \mathbb{R}^2$ ($S^0 = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{R}$). Tedaj je po dolžini minimalna „hiperploskev" v $\mathbb{R}^2$ napeta na Γ_0 kar „valj".



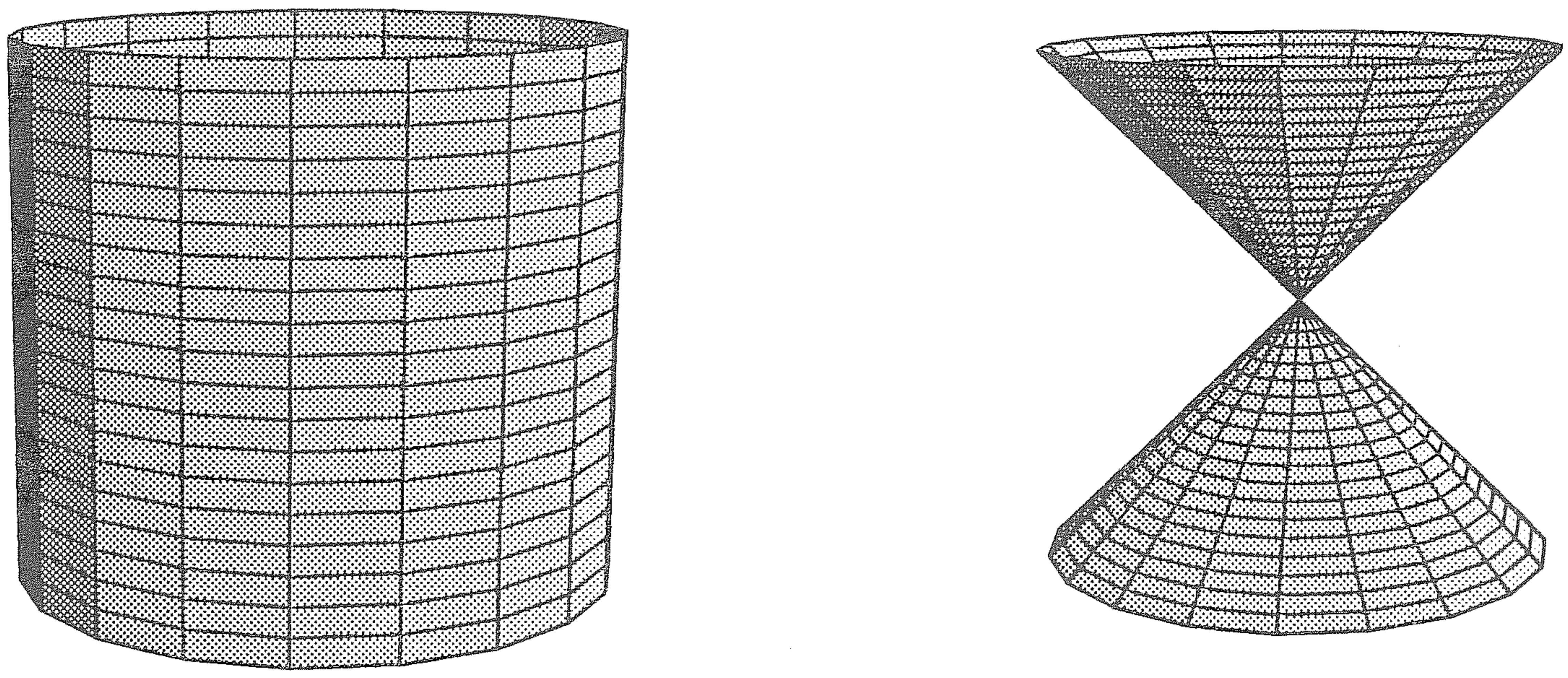
Slika 4. Valj in stožec na produktu 0-sfer.



Slika 5. Katenoida

2) Sedaj naj bo $\Gamma_1 = S^1(0;2) \times S^0 \subseteq \mathbb{R}^3$ ($S^1(0;2)$ je krožnica v $\mathbb{R}^2$ s središčem v točki 0 in radijem 2). Površinsko minimalna ploskev, napeta na Γ_1, je katenoida, ki smo jo srečali že [2].

Čeprav so verižnice, ki povezujejo oba kroga, daljše kot ravne črte, je obseg katenoide manjši kot pri valju. Tako katenoida predstavlja nekakšno ravnotežje med dvema skrajnostma: valjem in stožcem. V višjih dimenzijah postane ta pojav še bolj izrazit in v $\mathbb{R}^8$ se zgodi, da postane hiperploskev, ki pri danem robu $S^3 \times S^3$ minimizira prostornino, kar stožec T, napet na $S^3 \times S^3$. Le-ta seveda ima singularnost v svojem vrhu, točki 0.



Slika 6. Valj in stožec na $S^1(0;2) \times S^0$.

4. Zaključek

Reševanje problema iskanja minimalnih ploskev z metodami, predstavljenimi v tem sestavku, spada v široko in danes nadvse aktivno matematično področje, imenovano *geometrična teorija mere*, ki povezuje matematike s področij analize, geometrije in parcialnih diferencialnih enačb. Med številnimi rezultati v zadnjih tridesetih letih ne moremo mimo domneve o pozitivni masi iz splošne teorije relativnosti, ki sta jo konec sedemdesetih in v začetku osemdesetih let dokazala R. Schoen in S.-T. Yau (S.-T. Yau je leta 1982 za svoje raziskovalno delo dobil Fieldsovo medaljo).

Kljub splošnosti, s katero smo se s pomočjo rektifikabilnih ploskev lotili problema iskanja minimalnih ploskev z danim robom, in nekaterim nadvse spodbudnim rezultatom, pa ima ta pristop še vedno nekaj pomanjkljivosti, ki so bile v naši razlagi skrite.

Vse naše ploskve pa morajo biti orientirane. Tako, recimo, na ta način sploh ne moremo „pridelati" Möbiusovega traku. Prav tako določenih ogrodij γ (npr. γ = vsi robovi tetraedra) ne moremo skladno orientirati. Tako se lahko vendarle zgodi, da se deli ploskve, ki jo ustvari milnica na takem ogrodju, stikajo vzdolž singularne krivulje, tj., minimalna ploskev ni gladka. Tudi za vse te probleme so matematiki že razvili teorije, ki jih učinkovito rešujejo, ampak to je že druga zgodba.

LITERATURA

[1] A. Gray, *Modern geometry of curves and surfaces*, CRC Press, Boca Raton, 1993.
[2] M. Černe, *Plateaujev problem*, Obzornik mat. fiz. **44** (1997), 139–145.
[3] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
[4] F. Morgan, *What is a surface?*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 369–376.
[5] F. Morgan, *Geometric measure theory: a beginner's guide*, Academic Press, San Diego, 1988.
[6] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol 4, Publish or Perish, Boston, 1975.
[7] I. Vidav, *Višja matematika 2*, DZS, Ljubljana, 1979.
[8] J. Vrabec, *Metrični prostori*, DMFA, Ljubljana, 1990.
[9] D. Zupan, *Plateaujev problem*, diplomsko delo, Ljubljana, 1997.

POSPLOŠITVE IZREKA O MONOTONI KONVERGENCI

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1991) 40A05, 06F20

Izrek o monotoni konvergenci realnih zaporedij razširimo na končno razsežne delno urejene vektorske prostore. Dokažemo, da sta v končno razsežnem arhimedskem delno urejenem vektorskem prostoru V za nenegativna realna števila $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ ekvivalentni naslednji izjavi:

(i) Vsako omejeno zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prostora V, ki ustreza pogojem

$$x_{n+p} \geq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n+p-j}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

je konvergentno;

(ii) Velja $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$, poleg tega pa so naravna števila $j \leq p$, ki ustrezajo pogoju $\alpha_j > 0$, tuja.

GENERALIZATIONS OF THE MONOTONE CONVERGENCE THEOREM

The theorem of the monotone convergence is extended on finite dimensional partially ordered vector spaces. It is proved that in every finite dimensional archimedean partially ordered vector space V for nonnegative real numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ the following conditions are equivalent:

(i) Every bounded sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in V satisfying

$$x_{n+p} \geq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n+p-j}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

is convergent;

(ii) $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$, and the natural numbers $j \leq p$ satisfying $\alpha_j > 0$ are relatively prime.

1. Konvergenca realnih zaporedij

Osnovni izrek o monotoni konvergenci pravi, da vsako omejeno monotono realno zaporedje konvergira. Ta preprost, a izredno uporaben rezultat lahko posplošimo na razne načine. V tem prispevku si bomo ogledali nekaj takih posplošitev. Najprej bomo ostali pri realnih zaporedjih, monotonost pa bomo nadomestili s širšim pogojem – z rekurzivno neenakostjo za člene zaporedja. Poiskali bomo potreben in zadosten pogoj za konvergenco vsakega omejenega zaporedja, ki ustreza tej rekurzivni neenakosti.

Izrek 1. *Naj bo p dano naravno število in $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ nenegativna realna števila. Potem sta ekvivalentni naslednji izjavi:*

(i) *Vsako omejeno realno zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ki ustreza pogoju*

$$x_{n+p} \geq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n+p-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

je konvergentno;

(ii) *Velja* $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$ *in naravna števila* $j \leq p$*, ki ustrezajo pogoju* $\alpha_j > 0$*, so tuja.*

Za dokaz izreka 1 bomo potrebovali dva pomožna rezultata.

Lema 2. *Naj bodo* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *realna števila, za katera velja* $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \neq 1$*. Potem obstaja nekonstantno realno periodično zaporedje* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, ki izpolnjuje pogoj* (1).

Dokaz. Naj bo najprej $p > 1$. Če je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$, lema očitno velja, zato predpostavimo, da je

$$\alpha_0 = \max_{1 \leq j \leq p} |\alpha_j| > 0 \,.$$

Postavimo

$$\sigma = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \quad \text{in} \quad \varepsilon = \frac{|\sigma - 1|}{2\alpha_0}$$

ter si oglejmo nekonstantni periodični zaporedji s členi

$$x_n = \begin{cases} 1 + \varepsilon, & \text{če } p \mid n \\ 1, & \text{sicer} \end{cases} \quad \text{oziroma} \quad x_n = \begin{cases} -1 + \varepsilon, & \text{če } p \mid n \\ -1, & \text{sicer} \end{cases} .$$

Če je $\sigma < 1$, za člene prvega zaporedja velja

$$x_{n+p} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n+p-j} \geq 1 - (\sigma + \varepsilon\alpha_0) = (1 - \sigma)/2 > 0,$$

torej prvo zaporedje ustreza pogoju (1), če pa je $\sigma > 1$, za člene drugega zaporedja velja

$$x_{n+p} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n+p-j} \geq -1 - (-\sigma + \varepsilon\alpha_0) = (\sigma - 1)/2 > 0,$$

torej tudi drugo zaporedje izpolnjuje pogoj (1). Dokaz za $p > 1$ je sklenjen, pri $p = 1$ pa se lahko skličemo na primer $p = 2$, kjer vzamemo $\alpha_2 = 0$. ∎

Lema 3. *Naj bodo* $j_1, \ldots, j_l$ *tuja naravna števila. Potem za vsako naravno število* $n > 1$ *obstaja tak* $M \in \mathbb{N}$*, da množica*

$$\mathcal{M} = \Big\{ \sum_{i=1}^{l} m_i j_i : 0 \leq m_i \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=1}^{l} m_i \leq M \Big\}$$

vsebuje n *zaporednih naravnih števil.*

Dokaz. Ker so števila $j_1, \ldots, j_l$ tuja, obstajajo taka cela števila $k_1, \ldots k_l$, da je $\sum_{i=1}^{l} k_i j_i = 1$ [1, izrek 8]. Postavimo

$$k = \max_{1 \le i \le l} |k_i|, \qquad M = 2kln\,.$$

Za vsako nenegativno celo število $r \le n$ naj bo $m_i(r) = rk_i + nk$. Potem velja

$$m_i(r) \ge 0 \text{ in } \sum_{i=1}^{l} m_i(r) \le M\,.$$

Od tod sledi, da $\mathcal{M}$ vsebuje števila

$$r + nk \sum_{i=1}^{l} j_i = \sum_{i=1}^{l} m_i(r) j_i,$$

kjer je $r = 0, 1, \ldots, n$. ■

Dokaz izreka 1. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Iz (i) z uporabo leme 2 dobimo $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$. Zaznamujmo z d največji skupni delitelj števil iz množice

$$J = \{j \in \{1, \ldots, p\} : \alpha_j > 0\}.$$

Če je $d > 1$, zaporedje s členi

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{če } d \mid n \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

ne konvergira in je omejeno. Dokažimo, da ustreza pogoju (1). Kadar d deli $n + p$, je $x_{n+p} = 1$, od koder s pomočjo enakosti $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$ brž sledi (1). Kadar d ne deli $n + p$, je $x_{n+p} = 0$. Za vsak $j \in J$ velja $d \mid j$, zato d ne deli $n + p + j$ in je $x_{n+p+j} = 0$. Ker poleg tega za vsak $j \in \{1, \ldots, p\} \setminus J$ velja $\alpha_j = 0$, je tudi v tem primeru izpolnjen pogoj (1). Torej iz (i) sledi $d = 1$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Ker je za $p = 1$ ta implikacija izrek o monotoni konvergenci, predpostavimo, da je $p > 1$ in da velja (ii). Naj bo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno zaporedje, ki ustreza pogoju (1). Potem obstajata najmanjše in največje stekališče zaporedja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x = \liminf x_n$ in $y = \limsup x_n$, torej

$$x = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{j \ge n} x_j, \qquad y = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \ge n} x_j\,.$$

Seveda je $x \le y$, dokazati pa moramo, da velja $x = y$. Predpostavimo, da je $x < y$ in brez škode za splošnost dokaza privzemimo, da je $x = 0$ (sicer nadomestimo x_n z $x_n - x$).

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$ in poiščimo dovolj velik $m \in \mathbb{N}$, da je

$$u = \inf_{j \geq m} x_j + \varepsilon y > 0\,.$$

Ker je $y = \limsup x_n$ in $u > 0$, obstaja tak $n \geq m$, da velja $x_{n+p} + u > y$ in tedaj tudi

$$v = \min\{x_{n+p} + u - y, u\} > 0\,.$$

Z uporabo neenakosti $u - \varepsilon y = \inf_{j \geq m} x_j \leq 0$ od tod po kratkem računu dobimo

$$x_{n+p} \geq v + (1 - \varepsilon) y \tag{2}$$

in zaradi $u \geq v$ še

$$x_i \geq v - \varepsilon y \quad \text{za vsak} \quad i \geq m\,. \tag{3}$$

Ker velja (ii), množico J sestavljajo tuja števila. Zaznamujmo jih z $j_1, \ldots, j_l$ in zabeležimo

$$\alpha = \min\{\alpha_j : j \in J\} > 0.$$

Za vsako nenegativno celo število k zapišimo

$$\mathcal{M}_k = \Big\{ \sum_{i=1}^{l} m_i j_i : 0 \leq m_i \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=1}^{l} m_i = k \Big\}$$

in dokažimo, da za vsak $r \in \mathcal{M}_k$ velja

$$x_{n+p+r} \geq v + (\alpha^k - \varepsilon) y. \tag{4}$$

Uporabimo matematično indukcijo. Ker je $\mathcal{M}_0 = \{0\}$, neenakost (4) za $k = 0$ sledi iz (2). Predpostavimo, da (4) velja za kak nenegativen k, in vzemimo poljuben $s \in \mathcal{M}_{k+1}$. Potem obstaja tak $r \in \mathcal{M}_k$, da $q = s - r \in J$. Z uporabo neenakosti (1), (3) in (4) dobimo

$$\begin{aligned} x_{n+p+s} \geq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n+p+s-j} \geq \\ \geq \alpha_q x_{n+p+r} + (1 - \alpha_q)(v - \varepsilon y) \geq \\ \geq v + (\alpha_q \alpha^k - \varepsilon) y \geq v + (\alpha^{k+1} - \varepsilon) y \end{aligned}$$

in indukcijski korak je končan.

Po lemi 3 obstajata taki naravni števili M in N, da množica $\mathcal{M} = \bigcup_{k=1}^{M} \mathcal{M}_k$ vsebuje števila $N, N+1, \ldots, N+p$. Torej iz (4) sledi, da za vsak $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$ obstaja tako nenegativno celo število $k_j \leq M$, da je

$$x_{n+p+N+j} \geq v + (\alpha^{k_j} - \varepsilon) y.$$

Vzemimo $\varepsilon = \alpha^M$ in upoštevajmo, da je $\alpha \leq 1$, pa dobimo

$$x_{n+p+N+j} \geq v \quad \text{za} \quad j = 0, 1, \ldots, p.$$

Od tod s pomočjo neenakosti (1) in z matematično indukcijo brez težav ugotovimo, da za vsak $i > n+p+N$ velja $x_i \geq v$. Torej je $\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq n} x_j \geq v$, kar pa nasprotuje privzetku $\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq n} x_j = x = 0$. ∎

2. Zaporedja v delno urejenih prostorih

Najprej razširimo izrek 1 na zaporedja simetričnih matrik. V vektorski prostor $S(r)$ vseh realnih simetričnih matrik reda r uvedimo relacijo $\leq$ s predpisom

$$A \leq B \iff B - A \text{ je pozitivno semidefinitna.}$$

Dobro je znano, da v prostoru $S(r)$ velja izrek o monotoni konvergenci, velja pa tudi naslednja posplošitev.

Izrek 4. *Za nenegativna realna števila $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sta ekvivalentni naslednji izjavi:*

(i) *Vsako omejeno zaporedje realnih simetričnih matrik $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, ki ustreza pogojem*

$$A_{n+p} \geq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A_{n+p-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

je konvergentno;

(ii) *$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$, poleg tega pa so naravna števila $j \leq p$, ki ustrezajo pogoju $\alpha_j > 0$, tuja.*

Dokaz. Dovolj je videti, da sta pogoja (i) v izrekih 1 in 4 ekvivalentna.

Predpostavimo, da velja (i) iz izreka 1, in vzemimo omejeno zaporedje simetričnih matrik $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ reda r, ki ustrezajo pogoju (5). Pri vsakem $v \in \mathbb{R}^r$ je zaporedje s členi $x_n = v^\top A_n v$ omejeno in ustreza pogoju (1), zato konvergira. Če je tedaj

$$A_n = [a_{ij}^{(n)}]_{i,j=1}^{r} \quad \text{in} \quad v = e_i + e_j\,,$$

kjer sta e_i in e_j standardna bazna vektorja, zaporedje s členi

$$x_n = v^\top A_n v = a_{ii}^{(n)} + 2a_{ij}^{(n)} + a_{jj}^{(n)}$$

konvergira. Če vzamemo najprej $i = j$ in nato $i \neq j$, od tod brž sledi, da konvergirajo tudi zaporedja $(a_{ij}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, $i, j = 1, \ldots, r$, in da velja

$$\lim_{n\to\infty} A_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^{r} \in S(r)\,,$$

kjer je $a_{ij} = \lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)}$.

Naj zdaj velja (i) iz izreka 4. Vzemimo omejeno realno zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ki izpolnjuje (1). Potem je zaporedje simetričnih matrik $A_n = x_n I$ (I je enotska matrika reda r) omejeno in ustreza pogoju (5), zato konvergira. Seveda potem konvergira tudi zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. ∎

Prostor $S(r)$, opremljen z relacijo $\leq$, je delno urejen vektorski prostor (glej npr. [2]). Se da izrek 1 smiselno razširiti na splošne delno urejene vektorske prostore? S presaditvijo pogoja (1) ni težav, pojma omejenost in konvergenca zaporedja pa sta v takem prostoru lahko opredeljena na zelo različne načine. Če se omejimo na končno razsežen prostor in ga identificiramo z $\mathbb{R}^k$, lahko oba omenjena pojma opredelimo na standarden način – „po komponentah". V tem primeru je zaporedje omejeno (oz. konvergentno) natanko takrat, kadar je omejeno (oz. konvergentno) v katerikoli normi prostora. Ali morda izrek 1 (z ustrezno formulacijo točke (i)) ali vsaj izrek o monotoni konvergenci velja v vsakem končno razsežnem delno urejenem vektorskem prostoru?

Prostor $\mathbb{R}^k$, $k > 1$, urejen z običajno leksikografsko urejenostjo, je linearno urejen vektorski prostor, zaporedje

$$x_n = (1 - \frac{1}{n})e_1 + (-1)^n e_2 \in \mathbb{R}^k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

pa je omejeno in naraščajoče, vendar ne konvergira.

Odgovor na postavljeno vprašanje je torej negativen, ponuja pa se nov problem. Za katere urejenosti v končno razsežnem vektorskem prostoru velja izrek o monotoni konvergenci? Pri reševanju tega problema si bomo pomagali z naslednjim pojmom.

Naj bo M neprazna podmnožica delno urejenega prostora $\mathbb{R}^k$. Potem je

$$M^* = \{x \in \mathbb{R}^k : x^\top y \geq 0 \text{ za vsak } y \in M\}$$

njena *dualna* množica. Brez težav se lahko prepričamo, da je dualna množica vedno zaprta za množenje z nenegativnimi skalarji in za seštevanje ter tudi topološko zaprta. V nadaljevanju bomo potrebovali rezultat o drugem dualu pozitivnega stožca končno razsežnega delno urejenega vektorskega prostora.

Lema 5. *Naj bo P pozitiven stožec delno urejenega vektorskega prostora $\mathbb{R}^k$, tj. $P = \{x \in \mathbb{R}^k : x \geq 0\}$, $\overline{P}$ njegovo zaprtje in $P^{**} = (P^*)^*$ njegov drugi dual. Potem je $P^{**} = \overline{P}$.*

Dokaz. Množica P^{**} je zaprta in očitno vsebuje P, zato velja $\overline{P} \subseteq P^{**}$. Za dokaz nasprotne inkluzije vzemimo poljuben $x \in \mathbb{R}^k \setminus \overline{P}$. Zaradi zaprtosti množice $\overline{P}$ obstaja v njej vektor v, najbližji vektorju x. Torej je

$$\|x - v\| = \min\{\|x - z\| : z \in \overline{P}\}.$$

Množica $\overline{P}$ je zaprta za množenje z nenegativnimi skalarji, zato za vsak realen $r \geq 0$ velja

$$\|x - v\| \leq \|x - rv\|.$$

Če postavimo $r = 1+s$ in kvadriramo neenakost, po krajšem računu dobimo

$$s[(s+2)v^\top v - 2v^\top x] \geq 0 \quad \text{za vsak } s \in [-1,1].$$

Od tod brez težav dobimo enakost $v^\top v = v^\top x$. Vzemimo zdaj poljuben $z \in P$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ velja $v + \varepsilon z \in \overline{P}$, in zato

$$\|x - (v + \varepsilon z)\| \geq \|x - v\|.$$

Od tod podobno kot prej dobimo $(v-x)^\top z \geq 0$, torej je $v - x \in P^*$. Zaradi $v^\top v = v^\top x$ velja

$$x^\top (v - x) = -\|v - x\|^2 < 0,$$

torej $x \notin P^{**}$. ■

Preden formuliramo izrek o monotoni konvergenci, ponovimo naslednjo definicijo. Delno urejen vektorski prostor V je *arhimedski*, kadar velja sklep

$$(x, y \in V,\ mx \leq y\ \forall m \in \mathbb{Z}) \implies x = 0.$$

V članku [2] smo to lastnost označili z A_2, v izreku 15 iz [2] pa dokazali, da je končno razsežen prostor V arhimedski natanko takrat, kadar za zaprtje $\overline{P}$ njegovega pozitivnega stožca velja $\overline{P} \cap (-\overline{P}) = \{0\}$. Prostor $\mathbb{R}^k$ s standardno „pokomponentno" urejenostjo je arhimedski, z leksikografsko urejenostjo pa ne. Ni se težko prepričati, da je tudi prostor $S(r)$ z urejenostjo z začetka razdelka arhimedski.

Izrek 6. *Vsako omejeno naraščajoče zaporedje končno razsežnega delno urejenega vektorskega prostora konvergira tedaj in le tedaj, kadar je ta prostor arhimedski.*

Dokaz. Denimo, da prostor $\mathbb{R}^k$ ni arhimedski. Potem obstajata tak neničelni $x \in \mathbb{R}^k$ in tak $y \in \mathbb{R}^k$, da za vsako celo število m velja $mx \leq y$. Oglejmo si zaporedje

$$x_n = (1 - \frac{1}{n})y + (-1)^n x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ker za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)}[y - 2(-1)^n n(n+1)x] \geq 0,$$

zaporedje narašča, očitno pa je omejeno in ne konvergira.

Predpostavimo zdaj, da je prostor $\mathbb{R}^k$ arhimedski, in s P zaznamujmo njegov pozitivni stožec. Po kratkem računu vidimo, da za pravokotni komplement dualne množice P^* velja enakost

$$(P^*)^\perp = P^{**} \cap (-P^{**}).$$

Ker po lemi 4 velja $P^{**} = \overline{P}$ in je poleg tega v arhimedskem prostoru $\overline{P} \cap (-\overline{P}) = \{0\}$, velja $(P^*)^{\perp} = \{0\}$. Zato je $(P^*)^{\perp\perp} = \mathbb{R}^k$, od koder sledi, da je P^* ogrodje prostora $\mathbb{R}^k$.

Naj bo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno naraščajoče zaporedje v $\mathbb{R}^k$ in $y \in P^*$. Potem je zaporedje realnih števil $y^\top x_n$ naraščajoče in omejeno, torej konvergira. Ker to velja za vsak $y \in P^*$ in ker poleg tega P^* generira $\mathbb{R}^k$, konvergira tudi zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. ■

Na podoben način, kot smo dokazali izrek 6, lahko razširimo tudi izrek 1 na vsak končno razsežen arhimedski delno urejen vektorski prostor. Še več, naslednji rezultat zajema tudi primer, v katerem koeficienti iz rekurzivnega pogoja (1) niso nujno nenegativni.

Izrek 7. *Naj bo V netrivialen končno razsežen arhimedski delno urejen vektorski prostor. Potem sta za $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ ekvivalentni naslednji izjavi:*

(i) *Vsako omejeno zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ v prostoru V, ki izpolnjuje pogoje*

$$x_{n+p} \geq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{n+p-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

konvergira;

(ii) *Polinom $P(t) = t^p - \alpha_1 t^{p-1} - \ldots - \alpha_p$ ima ničlo 1 in nobene druge kompleksne ničle z absolutno vrednostjo 1.*

Če je $\alpha_j \geq 0$ za $j = 1, \ldots, p$, potem (ii) *lahko nadomestimo s pogojem*

(iii) $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$, *poleg tega pa so naravna števila $j \leq p$, pri katerih je $\alpha_j > 0$, tuja.*

Dokaz izreka 7 je precej dolg in prezahteven za Obzornik. Bralec ga lahko najde v članku [3], mi pa se pomudimo le še pri pogoju (ii) iz izreka.

V primeru $p = 2$ je ta pogoj ekvivalenten konjunkciji zahtev $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ in $\alpha_1 \neq 0$, v primeru $p = 3$ pa ga lahko nadomestimo z naslednjim pogojem:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \ \text{ in } \ \alpha_2 \neq 1 \ \text{ in } \ (\alpha_3 \neq 1 \ \text{ ali } \ |\alpha_1 - 1| \geq 2).$$

Dokaza obeh ekvivalenc prepuščamo bralcu.

LITERATURA

[1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1984.

[2] B. Lavrič, *Končno razsežni arhimedski delno urejeni vektorski prostori*, Obzornik mat. fiz. **42** (1995), 97–106.

[3] B. Lavrič, *Convergence of certain bounded sequences*, Linear Algebra Appl. **278** (1998), 1–10.

GOSTOTNI TOK

VLADO MALAČIČ

PACS 47.15Hg, 92.40Fb

Gostotni (gravitacijski) tok je v naravi pogost pojav. Na malo večjem prostorskem merilu je gostota tekočine zelo verjetno horizontalno nehomogena, kar povzroči gradientno silo tlaka, ki poganja relativno gibanje med gostejšimi in redkejšimi deli tekočine. V prispevku je obravnavan dvodimenzionalni ter osnosimetrični gostotni tok tekočine na vodoravni podlagi.

GRAVITY CURRENT

Gravity current is a common phenomenon in nature. On a large scale the density of a fluid is very often horizontaly inhomogeneous. This causes pressure gradients that drive flows. The article deals with twodimensional and axially symmetric gravity current on a horizontal substrate.

1. Uvod

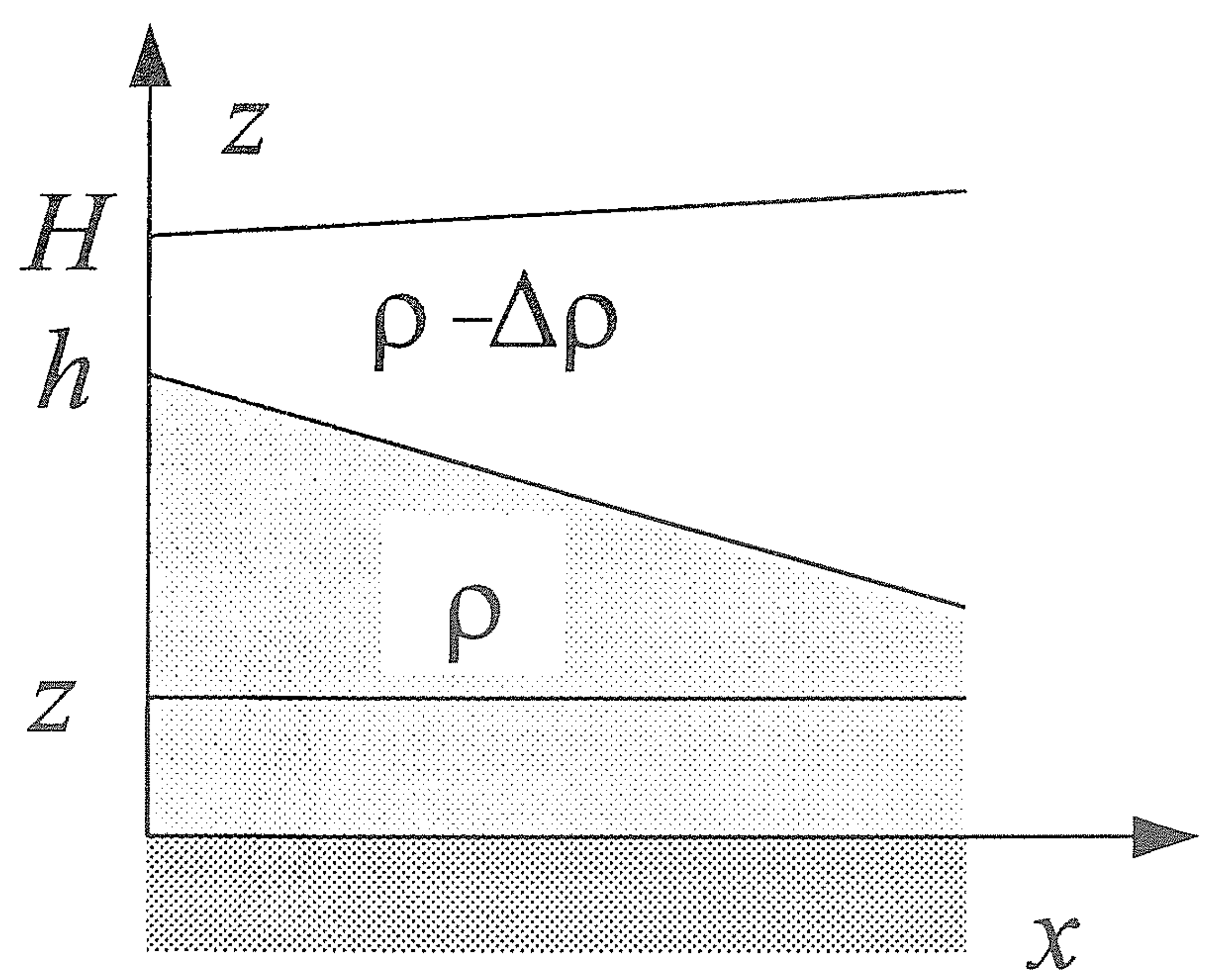
Z gostotnim tokom („density current", ali „gravity current") se razlivajo reke v morje, širi lava po ognjeniku, z njim se opisujejo razlivanje medu po kruhu, snežni plazovi, plazovi grušča, širjenje oljnega madeža po vodni gladini in deroče gibanje pridnenih vodnih mas po oceanskih kanjonih. Slednji se imenujejo tudi turbidni tokovi, ki pa gostotno razliko ohranjajo ali celo povečujejo tudi na račun spodnašanja materiala z morskega dna, prek katerega drvijo. Tudi v pridneni mejni atmosferski plasti je gostotni tok pogost pojav: hladen zrak teče navzdol po pobočju ali po dolini, megla drsi kot gostotni tok v obalnem področju. Gostotni tok lahko dokaj zaplete atmosfersko strukturo. Tako je v [1] opisan prodor hladnega zraka pod dvoslojno atmosfero, ki povzroči nestabilnost ali hidravlični vdor na meji med prej mirujočima slojema atmosfere in se kaže kot valovanje mejne površine. Tudi širjenje hladnega, nevidnega in morda celo strupenega plina opišemo z gostotnim tokom. Kljub tako široki uporabnosti v izjemno različnem prostorskem in časovnem merilu pa gostotni tok običajno ni opisan v učbenikih za dinamiko tekočin, niti npr. v sodobnejših učbenikih, kot sta [2] in predvsem [3]. V literaturi, ki sodi v fizikalno oceanografijo obalnih voda, gostotni tok sicer že nastopa [4]. Vendar pa gre pri dinamiki obalnih voda za specifične primere gostotnega toka, kot je npr. razlivanje sladke kopenske vode v obalnem morskem pasu, pa najsi gre za razlivanje v kontinentalni šelf (globine nekaj 100 m), ki je sklopljen z oceanom, ali pa za razlivanje v bolj ali manj zaprte zalive, kot sta npr. Jadransko morje ali Tržaški zaliv. Pri tem gre za zapleteno ravnovesje sil, ki se z razvojem dimenzije problema stalno spreminja.

Izšla je celo knjiga, ki sicer na bolj opisni način obravnava gostotne tokove [5]. Gostotni tok lahko na preprost način ustvarimo in opazujemo tudi v laboratoriju v majhni posodi, v kateri tekočino obarvamo z barvilom za barvanje živil.

Kot vidimo, se gostotni tok lahko pojavi v merilu od 10^{-3} m do 10^{4} ali celo 10^{5} m. V ravnovesju sil, do katerega pride pri stacionarnem gibanju, lahko nastopajo različne sile, vendar pa se v njem vedno pojavlja tudi gradientna sila tlaka, ki je posledica (horizontalno) nehomogene gostote. V prispevku bomo obravnavali le kvalitativno ravnovesje med vztrajnostno silo in silo tlaka. Pri tem bomo obravnavali dva modela. Pri prvem bo prevladovala ohranitev volumna tekočine ali stalen pretok volumna tekočine. Pri drugem pa bo na izjemno preprost način obravnavano zajetje neturbulentne tekočine s strani turbulentne tekočine, pri čemer bo opazovana turbulentna tekočina ohranila vertikalno homogenost gostote. Rezultat bo kvalitativna ocena gibanja opazovane tekočine, predvsem ocena hitrosti gostotnega toka.

2. Dvoslojna tekočina

Poglejmo, kako je z gradientom tlaka v primeru dveh plasti tekočine z gostotama ρ in $\rho - \Delta\rho$ (sl. 1), pri čemer naj pride do gostotnega skoka v vmesni, izredno tanki plasti. Naj se vsaka od plasti giblje počasi, tako da sta lokalni in advektivni pospešek obeh plasti zanemarljiva, prav tako trenje.



Slika 1. Skica dvoslojne tekočine za izračun hidrostatičnega tlaka na nivoju z.

Tako je tlak praktično enak hidrostatičnemu tlaku, kar je pogost približek v geofiziki tekočin. Gladina H in višina meje med plastema h sta funkciji vzdolžne koordinate x. Predpostavimo še, da je mešanje tekočin na njuni meji zanemarljivo, tlak nad zgornjo tekočino (npr. atmosferski tlak) pa naj je enakomerno porazdeljen in ga zato postavimo na nič. Na nivoju z v spodnji plasti je tlak

$$p = g(\rho - \Delta\rho)(H - h) + g\rho(h - z)\,, \tag{1}$$

zato je horizontalni gradient tlaka

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g(\rho - \Delta\rho)\frac{\partial H}{\partial x} + g\Delta p\frac{\partial h}{\partial x}\,. \tag{2}$$

Pri hidrostatični aproksimaciji, ko ni pospeška spodnje plasti in je gibanje relativno počasno, je tudi trenje zanemarljivo. Tedaj seveda velja, da je $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Običajno je gostotna razlika med tekočinama mnogo manjša od gostote, $\frac{\partial \rho}{\rho} \ll 1$ in tedaj iz (2) sledi

$$\frac{\partial h}{\partial x} \cong -\frac{\rho}{\Delta\rho}\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{3}$$

kar pa je izredno pomemben rezultat: naklon vmesne gladine je mnogo večji od naklona zgornje („prave") gladine in nasprotno usmerjen. Za morje lahko mirno rečemo, da je $\frac{\Delta\rho}{\rho} \leq 0{,}02$, kar pomeni za dva reda velikosti večji naklon vmesne gladine („piknokline" v morju) od prave gladine. To seveda pomeni, da bo za gibanja z dovolj nizko frekvenco (npr. poldnevna perioda plimovanja) tudi amplituda nihanja (valovanja) vmesne plasti mnogo večja od amplitude valovanja gladine, kjer je to seveda sploh mogoče. Dvoslojni sistem ima dvoje lastnih valovanj: eno, pri katerem se vrh vmesne plasti nahaja pod dolom gladine (pravimo mu tudi „baroklino" gibanje), in drugo, pri katerem se vrh vala na vmesni plasti pokriva z vrhom vala na gladini („barotropno" gibanje)[1] [3], vendar se na tem mestu tega problema ne bomo dotaknili. Povejmo še, da je v dvoslojnem sistemu gradient tlaka v spodnjem sloju sestavljen iz dveh delov. Prvi člen na desni strani (2) je ti. barotropni gradient tlaka, ki nastopa tudi v zgornji plasti (ko je $z > h$) in zagotavlja praktično enak pospešek vzdolž x-osi v obeh plasteh (razlika v pospeških zaradi gostotnih razlik med plastema je zanemarljiva). Drugi člen na desni strani (2) pa je baroklina komponenta gradienta tlaka, ki je značilna le za spodnjo plast in zagotavlja *relativni* pospešek in s tem relativno gibanje spodnje plasti proti zgornji. Ko pozabimo na barotropno komponento gradienta tlaka, pravimo, da imamo opraviti s ti. „rigid-lid" aproksimacijo ali približkom toge gladine (enakovredno predpostavki $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$). Naj zato v gibalni enačbi nastopa le gradientna sila tlaka, ki zagotavlja pospešek tekočini. To je Eulerjeva enačba. Po času povprečeno Eulerjevo enačbo za spodnjo plast zapišemo kot

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -g(1 - \Delta\rho/\rho)\frac{\partial H}{\partial x} - g\frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{4}$$

kjer je $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u\,\partial u}{\partial x}$ totalen odvod po času povprečene hitrosti u. Oznake

[1] V resnici se pojma baroklino in barotropno gibanje nanašata na sovpadanje ploskev (izolinij) tlaka in gostote: kadar ploskve ene količine sledijo ploskvam druge količine, imamo opraviti z barotropnim gibanjem, ko pa ne sledijo, pa z baroklinim gibanjem. To velja pri zvezno stratificiranih tekočinah, kjer je možen celoten spekter lastnih baroklinih gibanj. V dvoslojnem primeru pa je terminologija pač drugače uveljavljena.

za časovno povprečje nastopajočih količin pa opustimo[2]. Obravnavali bomo le stacionarne primere, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Vpeljemo še ti. „reducirani težni pospešek" $g' = g\frac{\Delta\rho}{\rho}$, s katerim zapišemo približek pospeška v (4)

$$\frac{Du}{Dt} \cong -g\frac{\partial H}{\partial x} - g'\frac{\partial h}{\partial x}\,. \tag{5}$$

Od tu dalje pa se bomo ukvarjali le z relativnim gibanjem spodnje plasti glede na zgornjo, gradientna sila tlaka na enoto volumna v tem primeru znaša

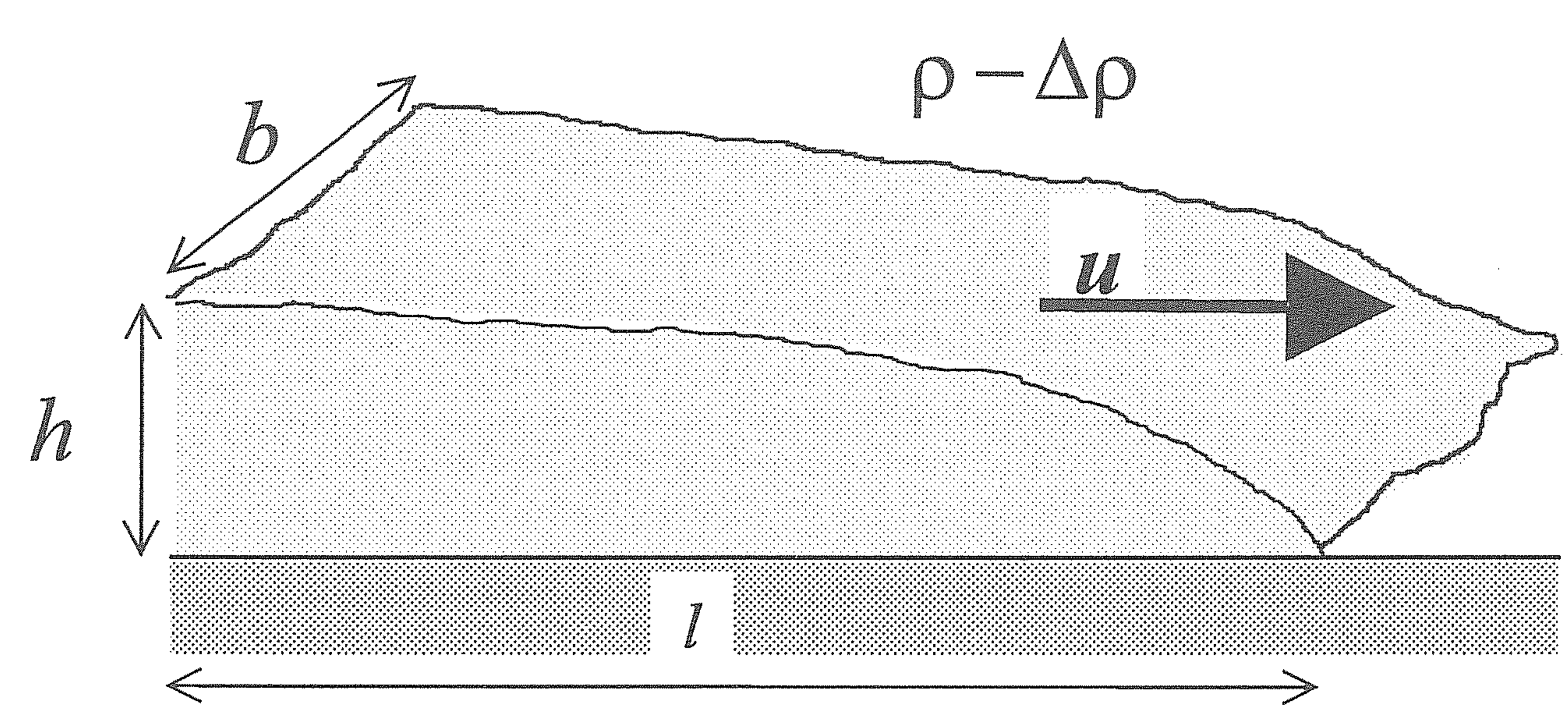
$$-\rho g'\frac{\partial h}{\partial x}\,. \tag{6}$$

3. Opis gostotnega toka

Pri analizi gibanja gostejše plasti tekočine se bomo izognili poti, ki predvideva znanje osnov iz dinamike tekočin, in raje ubrali tisto pot, ki jo je nakazal Huppert [6], kjer analiza temelji na oceni velikostnih redov posameznih sil in njihovem ravnovesju. Obravnavali bomo nestisljivo in turbulentno tekočino.

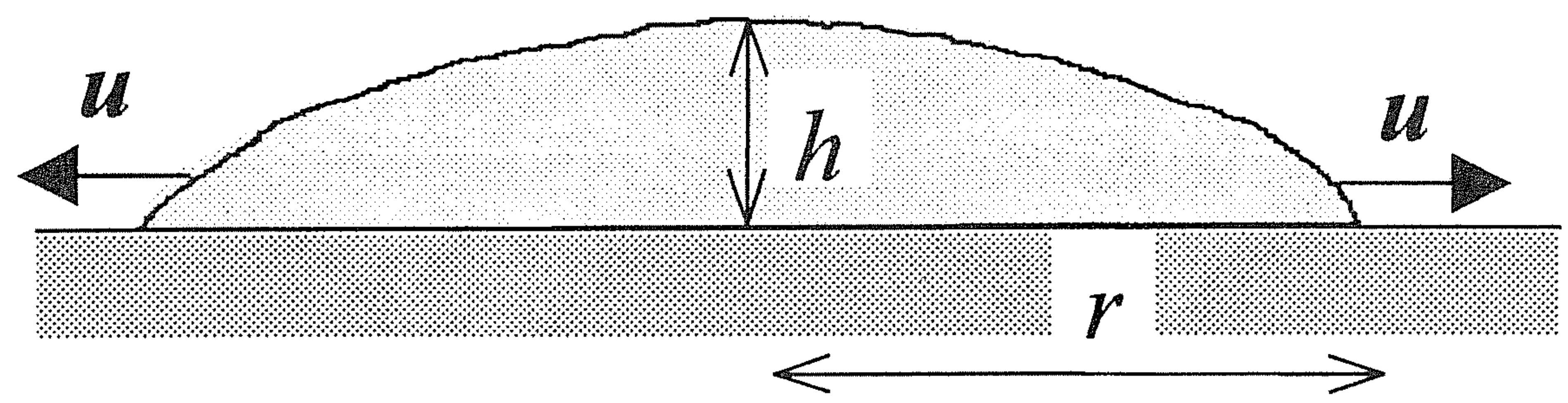
Naj bo l značilna dimenzija, vzdolž katere se spreminja hitrost u, ki jo ocenimo z U, advekcijski pospešek $\frac{u\,\partial u}{\partial x}$ tedaj ocenimo z $\frac{U^2}{l}$, viskozno trenje $\nu\,\nabla^2 u$ za nestisljivo tekočino pa z $\nu\frac{U}{l^2}$. Kinematična viskoznost ν vode pri sobni temperaturi ima vrednost 0,01 cm^2/s. Za Reynoldsovo število Re, ki podaja razmerje med advekcijskim (vztrajnostnim) členom in viskoznim trenjem, tedaj zahtevamo

$$Re = \frac{U^2/l}{\nu\,U/l^2} = \frac{Ul}{\nu} \gg 1\,. \tag{7}$$



Slika 2. Skica dvodimenzionalnega (2D) problema z gostotnim tokom.

[2] Čas povprečevanja je dovolj velik, da nagle fluktuacije hitrosti v turbulentnem toku izpovprečimo, hkrati pa dovolj majhen, da lahko opazujemo časovni razvoj povprečnih količin. V oceanografiji je čas povprečevanja običajno velikostnega reda minute ali ure. V časovno povprečeni Eulerjevi enačbi smo zanemarili tiste dele advekcijskega člena, ki vsebujejo gradiente produktov fluktuacij hitrosti, npr. $\langle u'w\rangle$.



Slika 3. Skica osnosimetričnega (OS) problema z gostotnim tokom v radialni smeri.

Gradientno silo tlaka (6) na enoto volumna opazovane tekočine ocenimo za dvodimenzionalni (2D) primer (sl. 2) z $\rho g' h/l$, za osnosimetrični (OS) problem (sl. 3) pa z $\rho g' h/r$. Volumen opazovane tekočine V ocenimo v prvem primeru s hbl, v drugem pa kar s hr^2. Ocenjeno gradientno silo tlaka na enoto volumna množimo z volumnom in dobimo oceno za silo tlaka ali vzgonsko silo[3],

$$-\int \rho g' \frac{\partial h}{\partial x} \,\mathrm{d}V \sim \begin{cases} \rho g' h^2 b & \text{za 2D primer} \\ \rho g' h^2 r & \text{za OS primer} \end{cases}, \tag{8}$$

ki poganja opazovano tekočino in ji zagotavlja advektivni ali vztrajnostni (inercialni) pospešek $\rho \frac{u\,\partial u}{\partial x}$ na enoto volumna. Ker je l (2D) ali r (OS) značilna dimenzija, vzdolž katere se u spremeni za U v času τ, ocenimo vztrajnostni pospešek kot $\rho \frac{U^2}{l} = \rho \frac{l}{\tau^2}$ za 2D primer in kot $\rho \frac{U^2}{r} = \rho \frac{r}{\tau^2}$ za OS primer. Hitrost U je pri tem ocenjena kot $l\frac{l}{\tau}$ oz. $\frac{r}{\tau}$. Ustrezna vztrajnostna sila

$$\int \rho \frac{u\,\partial u}{\partial x} \,\mathrm{d}V \sim \begin{cases} \rho l^2 h b \tau^{-2} & \text{za 2D primer} \\ \rho r^3 h \tau^{-2} & \text{za OS primer} \end{cases} \tag{9}$$

bo v našem primeru enaka sili tlaka (8).

a) Primer z danim volumnom ali izvorom tekočine

Predpostavili bomo ohranitev volumna tekočine ali pa ohranitev pretoka volumna tekočine. Slednje velja v primeru stalnega izvora tekočine z gostoto, ki je drugačna od gostote okolne tekočine. Ohranitev volumna tekočine V kot tudi pretoka volumna $\phi = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \cong \frac{V}{\tau}$ lahko zapišemo na naslednji način:

$$\begin{cases} hl = q\tau^{\alpha} & \text{2D primer} \\ hr^2 = Q\tau^{\alpha} & \text{OS primer} \end{cases}, \tag{10}$$

kjer je $\alpha = 0$ za ohranitev volumna in $\alpha = 1$ za ohranitev pretoka. V slednjem primeru bi q pomenil izdatnost izvora volumna tekočine na enoto

[3] Vzgonska sila je sicer pojem, ki se običajno uporablja za gradientno silo tlaka vzdolž vertikalne osi, oz. vzdolž smeri sile teže.

prečne dolžine (z enoto m^2/s), Q pa izdatnost izvora, ki je postavljen v izhodišče sistema (z enoto m^3/s). V primeru $\alpha = 0$ pa q in Q pomenita ustrezna volumna. Predpostavljamo, da sta q in Q konstanti. Tako zapišemo silo tlaka (8) kot

$$-\int \rho g' \frac{\partial h}{\partial x}\, \mathrm{d}V \sim \begin{cases} \dfrac{\rho g' q^2 b}{l^2}\, \tau^{2\alpha} & \text{za 2D primer} \\ \dfrac{\rho g' Q^2}{r^3}\, \tau^{2\alpha} & \text{za OS primer} \end{cases}, \tag{11}$$

pri čemer smo se znebili značilne višine h. Podobno storimo z (9)

$$\int \rho \frac{u\, \partial u}{\partial x}\, \mathrm{d}V \sim \begin{cases} \rho q l b \tau^{\alpha-2} & \text{za 2D primer} \\ \rho Q r \tau^{\alpha-2} & \text{za OS primer} \end{cases}. \tag{12}$$

Končno izenačimo obe sili in zapišimo oceno za časovni razvoj značilne dolžine l

$$l \sim \begin{cases} \sqrt[3]{g' q}\, \tau^{(\alpha+2)/3} & \text{za 2D primer} \\ \sqrt[4]{g' Q}\, \tau^{(\alpha+2)/4} & \text{za OS primer} \end{cases}. \tag{13}$$

Iz (10) izrazimo h kot funkcijo l oz. r in iz (13) dobimo

$$h \sim \begin{cases} \sqrt[3]{q^2/g'}\, \tau^{2(\alpha-1)/3} & \text{za 2D primer} \\ \sqrt[2]{Q/g'}\, \tau^{\alpha-1} & \text{za OS primer} \end{cases}. \tag{14}$$

Sedaj še predpostavimo, da se tekočina pri svojem prodiranju ne meša z okolno tekočino (npr. lava ali med se ne mešata z zrakom). Ko je volumen tekočine stalen ($\alpha = 0$), raste l v 2D primeru hitreje ($\propto \tau^{2/3}$) kot v OS primeru ($\propto \tau^{1/2}$). Tedaj v 2D primeru značilna višina h upada s časom tako, kot raste dolžina ($\propto \tau^{-2/3}$). V OS primeru višina h pada linearno s časom, kot z njim raste r^2. Za tekočino s stalnim izvorom ($\alpha = 1$) l s časom linearno raste v 2D primeru, medtem ko se h s časom ne spreminja. Podobno velja tudi za OS primer: l raste kot $\tau^{3/4}$, višina h pa se s časom ne spreminja.

Še eno ugotovitev dobimo, če upoštevamo (10) malo drugače in se v (13) znebimo kar produkta $q\tau^\alpha$ oz. $Q\tau^\alpha$ z neopredeljenim eksponentom α. Tako dobimo

$$\begin{cases} l \sim \sqrt{g' h}\, \tau & \text{za 2D primer} \\ r \sim \sqrt{g' h}\, \tau & \text{za OS primer} \end{cases}. \tag{15}$$

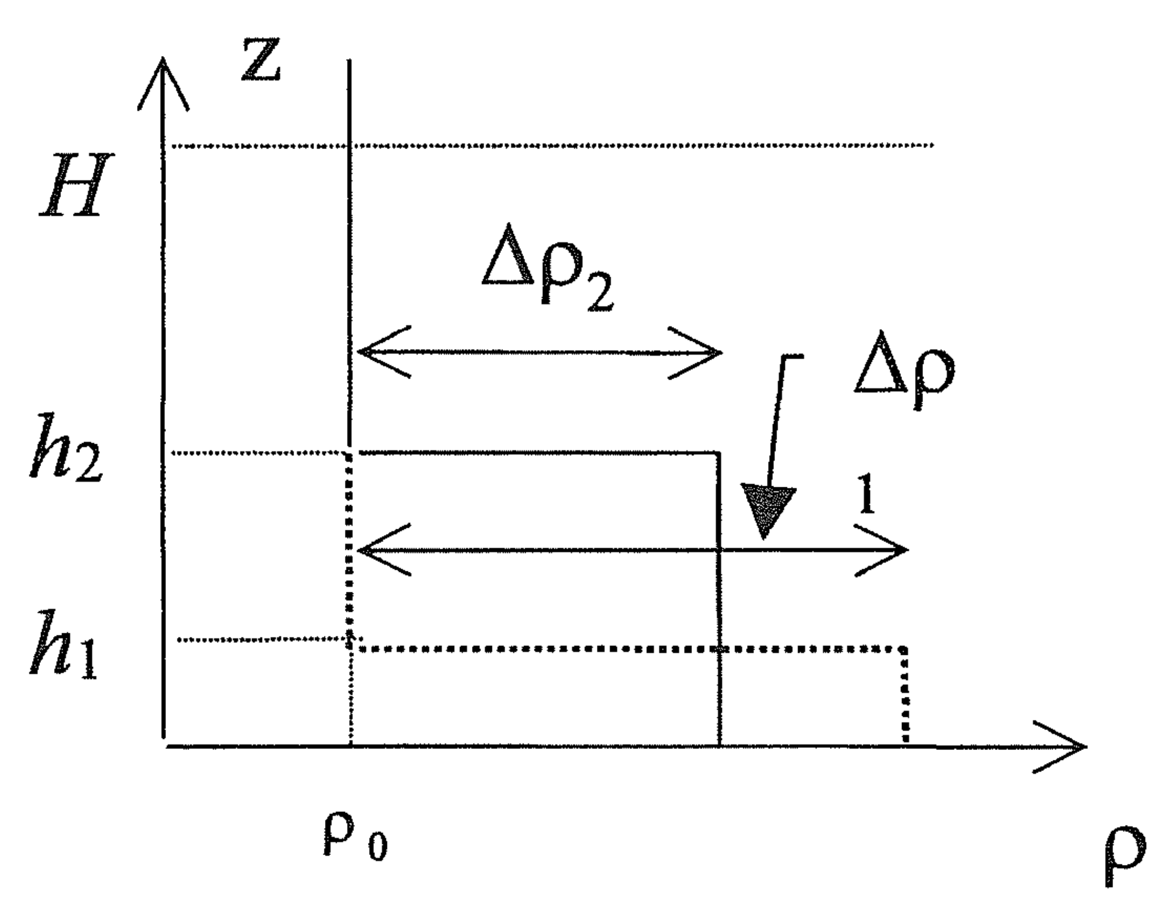
Pri tej obliki pa je potrebna previdnost, saj je h funkcija časa. Na tem mestu končamo analizo ravnovesja med vztrajnostno silo in silo tlaka, ko velja (10). Slednji pogoj pomeni dvoje: ali je pomemben volumen tekočine, ki je že v samem začetku dovolj velik, in opazujemo spremembe pod vplivom omenjenega ravnovesja sil, dokler druge sile ne pridejo do izraza (npr. viskozna sila – majhen Re), ali pa je izvor tekočine tako izdaten, da je pomemben tudi pri večjih oddaljenostih od izvora. Ne smemo pa pozabiti, da obravnavani model tudi ne sme biti prevelik: če npr. opazujemo razvoj tekočine na razdalji več km in so hitrosti dovolj velike (npr. nekaj m/s), potem je Coriolisova sila lahko primerljiva s silama, ki nastopata v obravnavanem modelu. Zato sedaj končajmo primer, ko je veljala pomembnost začetnega volumna ali izvora tekočine po (10), in se lotimo malo drugačnega problema.

b) Ohranitev mase dvoslojnega sistema tekočin

Sedaj opustimo zahtevo, da se med gibanjem ohranja gostotna razlika $\Delta\rho$, in si oglejmo primer, ko imamo dve homogeni tekočini drugo vrh druge (sl. 4). Recimo, da je tekočina v spodnji plasti turbulentna in da (med gibanjem) zajame nekaj tekočine iz gornje plasti, ki jo izredno hitro porazdeli po svoji višini h_1 z vrtinci, ki so tudi velikostnega reda h_1. Na tak način tekočina ohranja vertikalno homogenost. Opis zajemanja (vnašanja) neturbulentne tekočine s strani turbulentne tekočine („entrainment") je pregledno obravnavan v [7], bežno pa opisan v [8].

Pri vnosu zgornje (neturbulentne) plasti tekočine v spodnjo (turbulentno) plast tekočine[4] se masa sistema tekočin do višine H ohrani: kar je bilo zgoraj odvzeto, je bilo spodaj dodano. Pri tem se torej *poveča* debelina spodnje plasti tekočine od h_1 na h_2 (sl. 4). Pred zajetjem zgornje plasti tekočine v spodnjo smo imeli maso sistema (na enoto horizontalne ploskve) enako $\rho_0(H - h_1) + \Delta\rho_1 h_1 = \rho_0 H + \Delta\rho_1 h_1$, po njem pa maso $\rho_0 H + \Delta\rho_2 h_2$. Iz ohranitve skupne mase sledi, da se pri mešanju ohranja produkt

$$\Delta\rho h = \text{konst.} \tag{16}$$



Slika 4. Skica spremembe gostote spodnje plasti tekočine z zajetjem zgornje plasti. Pri tem procesu ostaja gostota zgornje plasti tekočine ρ_0 nespremenjena. Spodnja plast pa je pred vnosom zgornje plasti imela gostoto $\rho_0 + \Delta\rho_1$ in debelino h_1 (črtkano), po vnosu zgornje plasti pa gostoto $\rho_0 + \Delta\rho_2$ in debelino h_2.

---

[4] Teorija vnosa neturbulentne tekočine v turbulentno je sicer nedokončana. Videti je, da vrtinci turbulentne tekočine sežejo tudi prek meje med plastema tekočin in neturbulentno tekočino blizu meje objamejo ter jo tudi pogoltnejo („engulfment").

Večkrat pa zvezi (16) pravijo tudi ohranitev vzgona, ki je lahko tudi v obliki

$$g'h = \text{konst.}\,, \tag{17}$$

kjer smo v izrazu za reduciran gravitacijski pospešek nadomestili gostoto spodnje plasti kar s konstantno gostoto zgornje plasti $g' = g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$, pri čemer smo naredili zanemarljivo napako. Pri vnosu zgornje plasti tekočine v spodnjo plast smo povečali potencialno energijo sistema na račun turbulentne kinetične energije.

Sedaj pa si predstavljajmo, da se spodnja turbulentna plast tekočine med vnašanjem zgornje plasti po (17) tudi horizontalno giblje. Gostota spodnje plasti, kot tudi njena debelina, sta torej funkciji vzdolžne koordinate. Med gibanjem posameznega stolpca tekočine v spodnji plasti pa se njegova debelina krepi, gostota se manjša in bliža gostoti zgornje plasti, ohrani pa se produkt (17), ki ni funkcija vzdolžne koordinate. V oceni za silo tlaka (8) je tokrat produkt $g'h$ konstanta. Silo tlaka enačimo z vztrajnostno silo (9) in dobimo

$$\begin{cases} l \sim \sqrt{g'h}\,\tau & \text{za 2D primer} \\ r \sim \sqrt{g'h}\,\tau & \text{za OS primer} \end{cases}. \tag{18}$$

Zaradi (17) pa tokrat (v nasprotju s (15)) dobimo znani rezultat za hitrost gostotnega toka

$$c = k\sqrt{g'h} \tag{19}$$

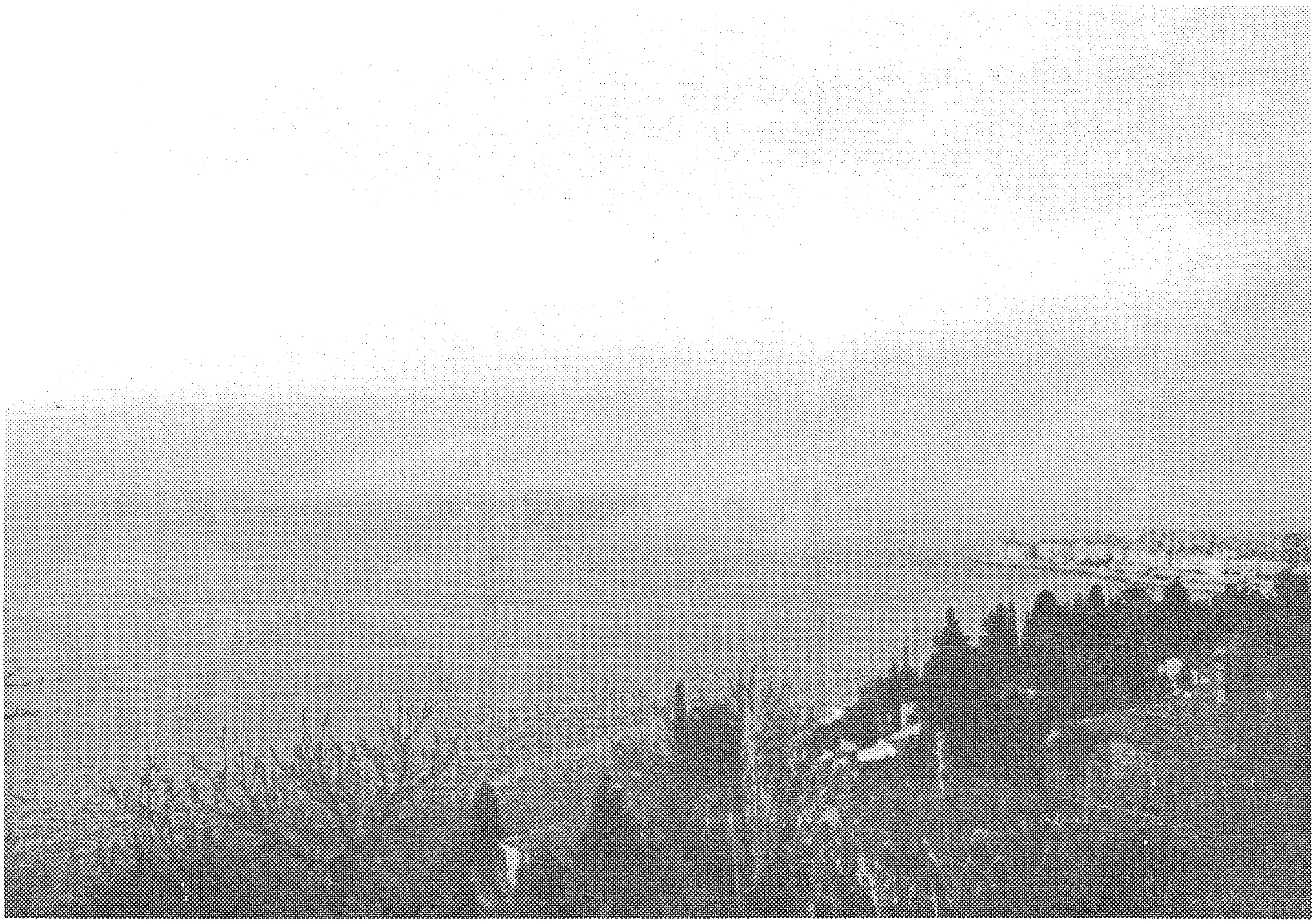
kjer je k konstanta (blizu ena), ki se običajno opredeli s poskusom.

Vredno je še omeniti, da je hitrost c po (19) zelo blizu hitrosti $c = \sqrt{g'h}$ širjenja internih valov, ki se v primeru dvoslojne tekočine gibljejo po tanki vmesni plasti in tudi odnašajo energijo proč od frontnega območja. Ta pomembni rezultat nima zveze z ohranitvijo volumna ali izvora tekočine. Spodnja plast tekočine mora biti dovolj turbulentna, da hitro porazdeli vneseno tekočino in s tem ohranja vertikalno homogenost.

4. Laboratorijski poskus in primeri iz narave

Na poletni šoli leta 1992 smo opravili laboratorijski poskus gibanja sladke vode preko slane vode. Obe tekočini skupaj sta zavzeli volumen kvadra dolžine 170 cm, širine 21 cm ter višine $H = 12$ cm. Potem ko je bila posoda napolnjena s sladko vodo, smo na polovici dolžine posode namestili pregrado in v eno polovico dodajali sol ter tako zagotovili štiri vrednosti reduciranega pospeška $g' = 1$, 2, 5 in 10 cm/s^2. Pregrado smo dvignili po nekaj minutah, ko se je sol dodobra raztopila in je gibanje v obeh polovicah posode zamrlo. Gostejša slana voda se je klinasto gibala pod sladko vodo, ta pa se je zgoraj gibala v nasprotni smeri. Merili smo čas prehoda fronte zgornje in spodnje tekočine mimo ekvidistantnih oznak na posodi. Za gibanje sladke vode smo dobili, da je $k = 0{,}58$, za gibanje slane vode pa $k = 0{,}5$, pri čemer pa je bila debelina spodnje plasti h v izrazu (19) zamenjana s celotno višino H. Po času τ, ki je nekajkrat večji od $\sqrt{H/g'}$, pa pričneta hitrosti upadati zaradi trenja, in sicer tem kasneje, čim večji je g'.

Čeprav smo izpeljali oceno hitrosti širjenja spodnje plasti tekočine skozi redkejšo zgornjo plast, pa je izraz (19) v rabi tudi za hitrost gibanja fronte osladkane vode prek morske vode na gladini morja. Zaradi zahtevnosti izvedbe ustreznih meritev v naravi je še najprimerneje postaviti $k = 1$, za debelino h pa je izbrana značilna debelina zgornje plasti [9].



Slika 5. Posnetek megle, ki je z gostotnim tokom dne 22. decembra 1989 ob 16:10 prodirala iz Tržaškega zaliva mimo piranskega rta Sv. Madonna.

Dne 22. decembra 1989 je klinasto oblikovana fronta meglene zračne plasti prilezla iz Tržaškega zaliva z gostotnim tokom (sl. 5). Megla je bila ustvarjena s kondenzacijo nad gladino izhlapele vodne pare v območju hladnega zraka. Iz slike ocenimo višino meglene zračne mase na $h \cong 100$ m. Nekdanja meteorološka postaja Hidrometeorološkega zavoda na Belem Križu v obdobju posnetka sicer ni bila v megli in zato težko ocenimo gostoto meglene plasti, ki je seveda nasičena z vodno paro, poleg tega pa je še polna drobnih vodnih kapljic. Časovno zaporedje vrednosti temperature in relativne vlažnosti na tej postaji od 15. do 17. ure pa je zgovorno: Ob 15. uri je bila temperatura zraka 13,4°C, relativna vlažnost 77 %, ob 16. uri 12,4°C in 85 % vlažnost, ob 17. uri pa 11,8°C in 84 % vlažnost. Zato sklepamo, da je bila meglena zračna masa za najmanj 1,5°C hladnejša od okolne zračne mase. Če predpostavimo, da je med vztrajnostno silo in silo tlaka ravnovesje, hitrost gibanja takšne mase ocenimo z (19), kjer postavimo kar $k = 1$. Velikostni red hitrosti gibanja meglene zračne mase je tako ocenjen na nekaj m/s ob predpostavki, da je zračni tlak tik nad megleno plastjo enak tlaku v megleni plasti, kjer zanemarimo vodne kapljice, v grobi prvi aproksimaciji pa tudi vodno paro. Slednja aproksimacija je sicer težko upravičena, zaradi številnih aproksimacij, napak in pomanjkljivih podatkov pa bo ta ocena velikostnega reda hitrosti gibanja meglenega klina zadostna. Žal bi bilo potrebno imeti nekaj zaporednih (avionskih) posnetkov, da bi eksperimentalno ocenili pravo smer gibanja, vzdolž nje pa tudi hitrost meglene plasti, in to primerjali z oceno (19), za katero pa bi imeli vse potrebne podatke. V takšnih primerih je enostavnejša izvedba posnetkov v goratem območju s pobočja nad kotlino. Tedaj pa je treba upoštevati še dinamično komponento sile teže, za katero pa je potrebno poznati tudi topografijo območja.

5. Zaključek

V prispevku smo obravnavali dva primera gostotnega toka, v obeh smo imeli opraviti zgolj z ravnovesjem med silo tlaka in vztrajnostno silo, pri čemer smo seveda predpostavili, da preostale sile lahko zanemarimo. Viskozni sili smo se izognili s predpostavko o visokem Reynoldsovem številu (npr. $Re > 2000$). Vendar iz omenjenega ravnovesja sil lahko hitro uganemo, da bi moralo obstajati še brezdimenzijsko število, ki bi bilo kot razmerje med vztrajnostno silo ($\sim U^2/l$) in silo tlaka ($\sim g'h/l$) konstantno. Gre za ti. interno Froudeovo število [10][5]

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g'h}}\,, \tag{20}$$

ki je koren omenjenega kvocienta sil in ima pomembno vlogo v dinamiki tekočin, še posebej v hidravličnih (nelinearnih) problemih. Njemu je sorodno Richardsonovo število plasti tekočine $Ri = 1/Fr^2$, ki je bolj v rabi v geofiziki tekočin[6]. V internem Froudeovem številu nastopa reducirani gravitacijski

[5] William Froude (1810–1879) je kot eden prvih z laboratorijskimi poskusi proučeval upor toka na ladijske modele. Ugotovil je, da se lahko laboratorijski rezultati prenesejo na plovila, če v obeh primerih nastopa enako Fr število.

[6] Lewis Fry Richardson (1881–1953) je eden od tvorcev dinamične meteorologije (rešitve diferencialnih enačb za gibanje atmosfere v obliki končnih diferenc) ter eden od prvih, ki so poskušali numerično napovedovati vreme še pred dobo računalnikov. Ri število, definirano v besedilu, ne gre zamenjevati z gradientnim Ri številom, ki je v rabi pri problemih s stratificirano tekočino, kjer se gostota zvezno spreminja po vertikali $\rho = \rho(z)$.

pospešek g', študentom hidrodinamike pa je bolj znano navadno ali eksterno Froudeovo število, kjer nastopa navadni težni pospešek. Navadno Froudeovo število namreč nastopa v dinamiki homogene tekočine in zato tudi v teoriji valov na njeni gladini. Za prej opisane primere torej velja, da se Fr ohranja

$$Fr \sim 1\,. \tag{21}$$

Bralec ima morda pomisleke, da je vse v prispevku „le približno" in morda pogreša eksaktno analitično rešitev. Seveda v nekaterih primerih obstojijo tudi te. Vendar pa je opisani način dokaj v navadi pri obravnavi turbulentnih problemov. Pokaže se, da je celo nujen, saj z njim ocenimo „težo" posameznih vplivov in velikokrat celo vidimo rešitev, še preden začnemo problem reševati analitično ali numerično. Podobna analiza gostotnega toka za majhna Reynoldsova števila (vztrajnostna sila ni več pomembna, pač pa nastopi viskozna sila) vodi do kvalitativno enakih rešitev kot zahtevno reševanje sistema diferencialnih enačb. Ta problem pa presega območje prispevka. Povejmo le, da tudi ta rešitev odpove, ko je ukrivljenost površine gibajoče se tekočine zadostna in nastopi sila površinske napetosti (do nje pride, ker v „viskozni rešitvi" plasti z večjo debelino potujejo hitreje in se na čelu fronte kopičijo). Zato se npr. pri širjenju medu po kruhu na čelu (fronti) pojavijo „prstki" nestabilnosti, ko je plast medu dovolj razvlečena.

Kako pa naj bi bilo s širjenjem velikega oljnega madeža na vodni gladini? Recimo, da zanemarimo vplive, kot so tvorba finih oljnih kapljic, tok vodne mase ipd. Sprva bi se madež razlezel zaradi ravnovesja vztrajnostne sile in sile tlaka, kot smo opisali v prispevku (primer a), po dovolj dolgem času pa pride do ravnovesja med viskozno silo in silo tlaka.

Pri obravnavi oblike konice fronte opazovane tekočine (npr. konica mejne površine sladke vode, ki drsi prek morske vode) pa se ne da izogniti stratifikaciji opazovane tekočine (zvezna odvisnost gostote od vertikalne koordinate), ki privede tudi do vertikalne porazdelitve sile trenja med sosednjimi tankimi plastmi, nanizanimi druga vrh druge ([4] ter [10]). Tedaj opazujemo obliko fronte v koordinatnem sistemu, ki se s fronto giblje. Vztrajnostna sila (sorazmerna advekcijskemu pospešku) pa se v nekaterih primerih lahko celo zanemari proti gradientni sili tlaka in sili trenja. Tedaj je zvezno porazdeljena gostota funkcija tako vzdolžne kot vertikalne koordinate $\rho = \rho(x,z)$, vendar se dinamika poenostavi z zahtevo, da je $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ zgolj funkcija vzdolžne koordinate x. Sila trenja med plastmi pa ni sila molekularnega značaja (viskozna sila), gre za silo, ki je mnogo večja od viskozne sile in je posledica turbulentnega prenosa horizontalne komponente gibalne količine vzdolž vertikalne osi. Ta sila je sorazmerna z $\frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial z}$, kjer sta u' in w' fluktuaciji komponent hitrosti, oklepaj $\langle\ \rangle$ pa pomeni ustrezno časovno povprečje. Običajno namesto turbulentnih pretokov gibalne količine (npr. $\langle u'w' \rangle$) vpeljemo turbulentne napetosti (npr. $-\rho\langle u'w' \rangle$), ki pomenijo silo na ploskovno enoto. Izvirni greh tega trenja pa velikokrat spregledamo: le-ta je posledica povprečevanja nelinearnega advekcijskega člena v Navier-Stokesovi enačbi, ki jo povprečujemo hkrati s kontinuitetno enačbo [8]. Tako smo zopet pri vztrajnostnem členu – le da upoštevamo njegovo „turbulentno komponento" namesto „povprečne komponente". Slednja je bila uporabljena v prispevku – ima enako obliko kot izvorni advekcijski člen, le da namesto trenutnih hitrosti v njej nastopajo po času povprečene hitrosti.

LITERATURA

[1] J. D. Locatelli, M. T. Stoelinga, P. V. Hobbs, J. Johnson, *Structure and evolution of an undular bore on the High Plains and its effects on migrating birds*, Bull. Amer. Meteor. Soc. **79**, 1043–1060, 1998.

[2] A. R. Paterson, *A first course in fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1983.

[3] P. K. Kundu, *Fluid mechanics*, Academic Press, 1990.

[4] K. F. Bowden, *Physical oceanography of coastal waters*, Ellis Horwood, 1983.

[5] J. E. Simpson, *Gravity currents: in the environmenmt and the laboratory*, Cambridge University Press, 1987.

[6] H. E. Huppert, *Gravity currents and lava domes*, rokopis predavanj, GEFD Summer School 1992, NERC, DAMTP, Cambridge UK, 1992.

[7] J. S. Turner, *Turbulent entrainment: the development of entrainment assumption, and its application to geophysical flows*, J. Fluid Mech. **173**, 41-471, 1986.

[8] V. Malačič, *Modeli poglabljanja termokline*, magistrsko delo, 1989.

[9] R. W. Garwine, *Dynamics of small-scale oceanic fronts*, J. Phys. Oceanogr. **4**, 447–569, 1974.

[10] R. Lewis, *Dispersion in estuaries and coastal waters*, John Wiley, 1997.

VESTI

Poročilo o zasedanju Mednarodne matematične unije (IMU) v Dresdenu

Po štirih letih smo imeli spet generalno skupščino IMU. Skupščina je bila uvod v Mednarodni matematični kongres v Berlinu. Približno sto trideset delegatov in kakih deset opazovalcev je zasedalo v Dresdenu 15. in 16. avgusta.

Matematična društva posameznih držav imajo – glede na svojo matematično „težo" – pravico poslati od enega do pet delegatov. Zanimivo je, da je že med skupščinami veliko prošenj za uvrstitev v višjo kategorijo in da jim je navadno ugodeno, saj to pomeni tudi večji prispevek v blagajno IMU.

Izvršni odbor IMU je tradicionalno sestavljen iz slavnih matematikov. Predsednik David Mumford s harvardske univerze je podal poročilo, v katerem je omenil nekaj problemov, ki pravzaprav niso novosti. Naraščajoča specializacija ovira sporazumevanje med področji. IMU ima malo denarja, vodijo jo ljudje, ki se ne potegujejo za tovrstne položaje.

Med najbolj občutljive naloge Izvršnega odbora sodi organizacija Mednarodnega matematičnega kongresa in izbira tajnega odbora za podelitev Fieldsovih medalj, ki so nekakšne Nobelove nagrade na področju matematike. Tokrat je bil prvič že pred kongresom znan predsednik programskega odbora kongresa. Velika čast je imeti uvodno besedo v sekciji kongresa. Da bi se izognili morebitnim pritiskom, so bila imena članov programskega odbora tudi tokrat tajna.

Paul Griffiths je kot predsednik programskega odbora kongresa ocenil, da se je sprememba v glavnem obnesla, saj je tako dobil več spodbud in bodo uvodničarji tudi nekateri manj znani matematiki. Negativna stran novosti je bila, da je doživel dve organizirani kampanji, ki pa sta bili neuspešni. Eno so pripravili prijatelji nekega matematika, drugo pa kar kandidat za uvodničarja sam. Ta je zaradi zavrnitve zagrozil celo s tožbo.

Na skupščini smo zvedeli, da je bil predsednik odbora za podelitev Fieldsove medalje Juri Manin. Letos je nastal poseben problem, saj je Andrew Wiles pred kratkim dokazal stoletja stari veliki Fermatov izrek. Ker pa je Wiles star več kot štirideset let, ni prišel v poštev za Fieldsovo medaljo in je dobil le posebno srebrno plaketo IMU.

IMU namerava izdati knjigo Matematika jutri. Avtorje so poiskali med dobitniki Fieldsove medalje in drugimi slavnimi matematiki. Večina od kakih trideset naprošenih je bila voljna sodelovati. Zanimivo je, da je prišlo do tekmovanja med založniki za izdajo te knjige. Pravkar pa je izšla knjiga finskega matematika Lehta z naslovom: Zgodovina IMU (Olli Lehto: History of IMU; Mathematics without borders, Springer-Verlag 1998).

Leto 2000 bo po sklepu IMU mednarodno leto matematike. Sponzor bo UNESCO. Posebno zagnano se na to pripravljajo v Franciji, kjer obstaja poseben odbor za to priložnost.

Nemčija in deloma Evropska skupnost sta se izkazali zelo radodarni in sta subvencionirali udeležbo na Mednarodnem kongresu za sto mladih raziskovalcev in štirideset starejših znanstvenikov iz dežel v razvoju. To je stalo 400000 DEM, še nekaj večjo vsoto pa so dali v enak namen za matematike iz vzhodne Evrope. Sredstva za IMU so radodarno prispevali še člani Ameriškega matematičnega društva (AMS), Brazilija (!), od koder je dosedanji tajnik IMU Jacob Palis, Velika Britanija, Royal Society itd.

Komisija za razvoj in izmenjavo pomaga zelo nadarjenim posameznikom iz dežel v razvoju. Pri tem skrbi, da je režija kar se da majhna.

IMU je pravkar izdal World Directory of Mathematicians. Kriteriji za uvrstitev so nekoliko bolj ohlapni kot prej. Tehnično delo je opravila AMS.

Izvolili smo tudi iniciativni odbor za elektronsko izmenjavo informacij in elektronsko založništvo. Na tem področju je mnogo problemov. Nekatera velika društva, kot npr. AMS, so obenem tudi založbe. Ščitijo svoja delovna mesta in tako pogosto niso pripravljena na spremembe standardov ipd. Zato so francoski delegati predlagali, da predstavnike založb izključijo iz odbora. Prevladalo je Mumfordovo mnenje, da je bolje zagotoviti sodelovanje AMS v odboru. Kot smo zvedeli pozneje, pa je že na prvi seji odbora prišlo do zapletov zaradi zelo odločnih stališč AMS.

Čeprav smo matematiki prepričani o izredni uspešnosti jezika TEX kot sredstva za matematični zapis, brskalniki na svetovnem spletu tega izuma ne podpirajo. Med dobrimi novicami smo slišali – in to z ruske strani – pohvalo za ameriški arhiv povzetkov znanstvenih člankov `http://xxx.lanl.gov` (ki je sicer bolj fizikalno orientiran).

Izraelski delegati so opozorili na nerazumno povečevanje cen revij – kljub napredku tehnike. Naročnina za neko revijo enakega obsega kot Israel Journal of Mathematics je deset- do enajstkrat tolikšna kot za njihovo. Elektronska izdaja Mathematical Reviews stane trikrat toliko kot papirna.

Burna razprava se je razvila ob odločanju o kraju naslednjega mednarodnega kongresa. IO je priporočil Kitajsko – pod pogojem, da bodo lahko prišli vsi povabljeni matematiki, kandidirala pa je še Norveška. Zaradi občutljivosti izbire je bilo glasovanje tajno. Rezultat: 99 glasov za Kitajsko, 23 za Norveško, 6 vzdržanih. Naslednji kongres bo torej v Pekingu. Norveška pa bo leta 2002 v vsakem primeru slavila dvestoto obletnico rojstva Nielsa Henrika Abela (1802–1829).

Drugi dan kongresa smo se v glavnem ukvarjali s sestavo novega izvršnega odbora in drugih komisij. Na koncu je skoraj v celoti obveljal predlog starega IO. V novem IO je tako dve tretjini članov prejšnjega, namesto prej predlaganega nemškega predstavnika pa je v IO Martin Groetschel, ki je zbudil simpatije zaradi učinkovitosti pri organizaciji mednarodnega kongresa. Precej časa smo razpravljali o večjem sodelovanju žensk in matematikov z manj znanih področij ter manjših držav v IMU in končno sprejeli ustrezno resolucijo.

Novi predsednik IMU je Jacob Palis z IMPA (Inštitut za čisto in uporabno matematiko) v Rio de Janeiru. Podpredsednika sta Simon Donaldson in Shigefumi Mori, tajnik je Phillip Griffiths, direktor znanega Institute for Advanced Study v Princetonu. Člani so: V. Arnold, J. M. Bismut, B. Enquist, M. Raghunatan, M. Groetschel in avtomatično bivši predsednik D. Mumford. Komisijo za pouk matematike (ICMI) vodi Hyman Bass z univerze Columbia v New Yorku, komisijo za razvoj in izmenjavo (CDE) pa Rolando Rebolledo iz Čila. V komisiji za zgodovino matematike sta J. P. Hogendijk in Karen Parsahll.

Peter Legiša

Peto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Peto mednarodno tekmovanje študentov matematike je potekalo od 29. julija do 3. avgusta 1998 v Blagoevgradu v Bolgariji. V slovenski ekipi so bili Jernej Barbič, Bojan Gornik in Dejan Velušček iz tretjega in Iztok Kavkler iz četrtega letnika.

Študentje so dva dni, vsak dan po pet ur, reševali naloge. Pravilna rešitev je prinesla 20 točk. Številke v oglatih oklepajih povejo, koliko je bil vreden posamezen rešeni del. Naloge pa so bile naslednje:

1. Naj bo V 10-razsežen realni vektorski prostor, U_1 in U_2 pa taka podprostora, da velja $U_1 \subseteq U_2$, $\dim U_1 = 3$ in $\dim U_2 = 6$. Z $\mathcal{E}$ označimo množico vseh linearnih preslikav $V \to V$, ki imajo U_1 in U_2 za invariantna podprostora. Izračunaj razsežnost prostora $\mathcal{E}$ kot realnega vektorskega prostora.
2. Pokaži, da naslednja trditev velja za $n = 3$ [5 točk] in $n = 5$ [7 točk], ne velja pa za $n = 4$ [8 točk]:

   Za poljubno permutacijo π števil $1, 2, \ldots, n$ različno od identitete, obstaja taka permutacija ρ, da se da poljubno permutacijo števil $1, 2, \ldots, n$ dobiti samo s sestavljanjem permutacij π in ρ.
3. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = 2x(1-x)$. Naj bo
$$f_n := \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{n}.$$
   (a) [10] Poišči $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

   (b) [10] Izračunaj integrale $\int_0^1 f_n(x)\, dx$.
4. Za dvakrat odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ velja $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ in $f(1) = 1$. Pokaži, da obstaja realno število $\xi \in (0,1)$, za katero velja
$$f(\xi) \cdot f'(\xi) + f''(\xi) = 0.$$
5. Naj bo P realni polinom stopnje natanko n, ki ima same realne ničle.

   (a) [15] Pokaži, da za vsako realno število x velja neenakost
$$(n-1)(P'(x))^2 \geq nP(x)P''(x).$$
   (b) [5] Kdaj v zgornji neenakosti velja enačaj?
6. Naj bo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero velja: za poljubni števili $x, y \in [0,1]$ je
$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$
   (a) [15] Pokaži, da je $\int_0^1 f(x)\, dx \leq \frac{\pi}{4}$.

   (b) [5] Poišči funkcijo f, za katero v zgornji neenakosti velja enačaj.
7. Naj bo V realni vektorski prostor (lahko neskončno razsežen), $f, f_1, f_2, \ldots, f_k$ pa linearni funkcionali $V \to \mathbb{R}$. Naj bo $f(x) = 0$, če je le

$f_1(x) = f_2(x) = \ldots f_k(x) = 0$. Pokaži, da je funkcional f linearna kombinacija funkcionalov $f_1, f_2, \ldots f_k$.

8. Naj bo

$$\mathcal{P} := \{f;\ f(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R}, > |f(\pm 1)| \leq 1,\ |f(\pm\frac{1}{2})| \leq 1\}.$$

Izračunaj

$$\sup_{f\in\mathcal{P}} \max_{-1\leq x\leq 1} |f''(x)|$$

in poišči vse polinome, za katere je supremum dosežen.

9. Naj bo $0 < c < 1$ in

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{za } x \in [0, c], \\ \frac{1-x}{1-c} & \text{za } x \in [c, 1]. \end{cases}$$

Pravimo, da je $p \in [0,1]$ n-periodična točka, če je

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(p)\ldots)) = p$$

in je n najmanjše število s to lastnostjo. Pokaži, da je za vsako naravno število n množica n-periodičnih točk neprazna in končna.

10. Naj bo $n \geq 3$ in $A_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. Množico $\mathcal{F}$ sestavljajo funkcije $f : A_n \to A_n$, za katere hkrati velja
    (a) $f(k) \leq f(k+1)$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ in
    (b) $f(k) = f(f(k+1))$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$.
    Poišči število elementov množice $\mathcal{F}$.

11. Naj bo $\mathcal{S}$ družina takih sfer v prostoru $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, da v preseku poljubnih dveh leži največ ena točka. Naj bo $\mathcal{M}$ množica točk, ki pripadajo vsaj dvema različnima sferama iz družine $\mathcal{S}$. Pokaži, da je množica $\mathcal{M}$ največ števna.

12. Naj bo $f : (0,1) \to [0, \infty)$ funkcija, ki je nič povsod, razen v točkah $a_1, a_2, \ldots$, ki so paroma različne. Naj bo še $b_n = f(a_n)$ za $n = 1, 2, \ldots$
    (a) Če je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, pokaži, da je funkcija f odvedljiva vsaj v eni od točk iz intervala $(0,1)$.
    (b) Pokaži, da za vsako zaporedje nenegativnih realnih števil $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, za katero velja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, obstaja zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, za katero zgoraj definirana funkcija f ni nikjer odvedljiva.

Naši študenje so dosegli zelo dobre rezultate. Bojan Gornik je dobil prvo nagrado (v skupni razvrstitvi je dosegel odlično sedmo mesto), Iztok Kavkler, Dejan Veluščček in Jernej Barbič pa so dobili drugo nagrado.

Iztok Kavkler je dobil tudi posebno nagrado za fair-play. Po objavi neuradnih rezultatov se je pritožil, ker je zaradi tipkarske pomote dobil 20 točk pri nalogi, ki je sploh ni reševal. Tako mu je za sedem točk ušla prva nagrada.

Letos je bilo tekmovanje v primerjavi s prejšnjimi leti veliko bolje organizirano, saj je potekalo v prostorih in campusu Ameriške univerze v Blagoevgradu. Zaradi finančne podpore programa Tempus za Bolgarijo je bilo tekmovanje doslej vsako leto v Bolgariji. Naslednje leto bo ob Blatnem jezeru na Madžarskem. Organizatorji in vodje ekip smo izrazili željo, da bi bilo tekmovanje odslej vsako leto v drugi državi.

Marjan Jerman

Poročilo o skupščini Evropskega matematičnega društva (EMS)

Po končanem Mednarodnem matematičnem kongresu je zadnje dni avgusta 1998 na Humboldtovi univerzi v Berlinu zasedala skupščina EMS.

Evropsko matematično društvo obstaja šele osem let. Pred štirimi leti sem se udeležil skupščine, na kateri je predsedstvo prevzel Jean-Pierre Bourguignon (trenutno tudi direktor znane raziskovalne ustanove I.H.E.S.). Takrat je društvo lahko le malo pokazalo, bilo pa je mnogo načrtov.

Kot se je zdaj pokazalo, je bilo nekatere namere (denimo povezavo referativne revije Zentralblatt s sorodnimi revijami in preoblikovanje v osrednjo evropsko matematično bazo podatkov) mogoče le delno uresničiti. Sicer pa se je J. P. Bourguignon izkazal kot sposoben organizator. V svojem uvodnem govoru v Berlinu je nanizal nekatere dosežke, pa tudi probleme.

Podoba matematike v javnosti je problem. Pojavljajo se napadi nanjo in sovražno obarvani članki, celo v obdobju mednarodnega matematičnega kongresa. Presenetila nas je izjava, da ima francoski minister za šolstvo zelo negativen odnos do matematike in da je to že kar tradicionalno. Pri tem pa je matematik očitno povsod po svetu iskan poklic: nezaposlenih matematikov tako rekoč ni.

Založba Springer bo l. 1999 v sodelovanju z EMS začela izdajati Journal of the European Mathematical Society (JEMS).

Ustanovljen je bil Diderotov matematični forum, v okviru katerega so bila srečanja: Matematika in denarništvo, Matematika in okolje, Prispevek matematike h kulturi. Vsako srečanje traja dva dni in poteka v treh evropskih mestih hkrati. Za forum o okolju je dal denar ustrezni evropski sekretariat, ki se ni mogel načuditi, da matematiki zahtevajo tako malo. Predvidena so še: Matematika in glasba, Matematika in telekomunikacije. Poskusili so tudi s telekonferencami, vendar so težave s tehnologijo, izmenjavo mnenj pa je treba tudi zelo dobro pripraviti.

Revija Newsletter je dobila novo, privlačnejšo podobo, ki so jo v glavnem ustvarili kar matematiki sami. Dodani so intervjuji z znanimi matematiki, predvidene pa so predstavitve matematičnih institucij in intervjuji z ljudmi iz industrije. Uvedena bodo pisma bralcev.

Organiziranih je bilo več poletnih šol. Predsednik je posebno pohvalil tisto v Cluju, kjer so romunski organizatorji izredno dobro poskrbeli za udeležence, stroški pa so znašali le petino tistih na Zahodu.

Pri tovrstnih srečanjih so težave s financiranjem in s selekcijo študentov, saj je zanimanje zelo veliko. Za forum o telekomunikacijah je recenzent predlagal, naj stroške krijejo udeležena podjetja – ki pa ne bodo financirala študentov. (Mimogrede, še hujše posledice je imelo mnenje recenzenta, ki je za znana inštituta v Oberwolfachu in Luminyju predlagal stalno financiranje. Zato so kot prvi ukrep prekinili dosedanje neredne prihodke!)

EMS predavanja bo imel profesor Ljubič v treh mestih.

Potrebnih je bilo veliko obiskov v Buslju. Po Bourguignonu sta glavni slabosti Evropske skupnosti togost in neprilagodljivost. Matematiki bi radi, da bi bili novi Centri odličnosti odprti tudi za postdoktorske kadre, ne le za doktorande. Posrečilo se je doseči, da bo mreža manjših visoko usposobljenih skupin obravnavana podobna kot velike raziskovalne kapacitete. Financiranje raznih velikanskih štiriletnih projektov večkrat ni najbolje premišljeno. Tako so se nekatera znanstvena omrežja kopala v denarju, druga niso dobila ničesar. Kljub vsemu temu se je lobiranje v ES splačalo. Stiki na vseh ravneh evropske birokracije so pomagali premagati odpor, sumničenja in negativne odgovore z najvišjih mest.

Matematična tiskovna agencija (EMPRESSA), ki naj bi zbirala zanimive poljudne članke in novice iz cele Evrope, še ni zaživela.

Velike težave so z dogovori glede elektronskega publiciranja, saj se mnenja Ameriškega matematičnega društva in EMS očitno razlikujejo.

Na izobraževalnem področju po besedah V. Villanija pripravljajo prevode učnih načrtov in zbirajo druge podatke o kurikulih. Prof. Saunders iz Londonskega matematičnega društva je v zelo črnih barvah opisal stanje v angleškem izobraževalnem sistemu, kjer med kurikulom in dejanskim znanjem zeva precejšen prepad. Eden od vzrokov za to je veliko pomanjkanje ustreznih učiteljev.

Evropski matematični kongres bo leta 2000 v Barceloni. Hudo polemiko je izzval izbor plenarnih govornikov, saj so se mnoga področja čutila zapostavljena, favorizirana pa naj bi bila teorija števil. Izglasovali smo resolucijo, po kateri naj bi razmislili o razširitvi števila plenarnih govornikov in večji uravnoteženosti raznih matematičnih vej. Starostna meja za nagrade mladim matematikom bo ostala pri 32 letih, čeprav se je precej delegatov, zlasti pa Izraelci, zavzemala za povišanje.

Estonci so pripravili večjezični matematični slovar, ki naj bi bil kmalu na razpolago na strežniku `www.EMIS.de`. Potekajo tudi raziskave o ženskah v matematiki, denimo o tem, ali se ženske v matematiki uveljavijo šele pozno.

Prihodnje leto bo na Poljskem konferenca v čast Schauderju. V Rusiji se pripravljajo na obletnice Kovalevske, Rohlina in Kolmogorova (2003). Leta 2000 bo v Granadi konferenca na temo: Islamska matematika, simetrija, umetnost.

Novi predsednik EMS je Rolf Jeltsch z ETH v Zürichu. Ukvarja se z uporabno matematiko in mehaniko. Podpredsednik je Luc Lemaire iz Bruslja, tajnik David Brannan z angleške Open University.

Peter Legiša