



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

XII. LETNIK — 4. ŠTEVILKA

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

LJUBLJANA, DECEMBER 1965

VSEBINA

Članki	Stran
O teoriji množične strežbe (R. Jamnik)	145
Elastične funkcije (A. Vadnal)	162
Jedrska snov (R. F. Peierls — prev. J. Strnad)	166
Novice	
Preprost model jedra (J. Strnad)	173
Nov spektrometer za vzbujena stanja mezonov (M. Rosina)	180
Šola	
Specialna teorija relativnosti (J. Strnad)	186
Nove knjige	189

CONTENTS

Articles	Page
On the Theory of Queues (R. Jamnik)	145
The Elasticity of Function (A. Vadnal)	162
Nuclear Matter (R. F. Peierls — transl. by J. Strnad)	166
News	
A Simple Model of the Nucleus (J. Strnad)	173
A New Spectrometer for Excited States of Mesons (M. Rosina)	180
School	186
New Books	189

O TEORIJI MNOŽIČNE STREŽBE

RAJKO JAMNIK

1. Uvod

V vsakdanjem življenju in v proizvodnji so zelo pogosti primeri, da kakšna naprava ali organizacija opravlja dela po naročilu, drugače rečeno, organizacija *streže* naročnikom. Navadno pri tem ne gre samo za eno storitev določene vrste, temveč je enakih ali vsaj podobnih storitev veliko. Tedaj imamo opraviti z *množično strežbo*. Primerov za to je nič koliko: prodaja vstopnic v kinematografih, gledališčih in na športnih prireditvah, prodaja vozovnic na železniških in avtobusnih postajah, strežba v trgovinah in gostinskih obratih, delovanje telefonskih central, vzdrževanje strojev v tovarnah in še in še.

Imenujmo napravo ali organizacijo, ki opravlja množično strežbo, *strežni sistem*. Strežni sistem ima lahko eno samo strežno enoto (npr. prodajalca pri blagajni ali v trgovini, natakarja v gostinskem obratu, mehanika za vzdrževanje strojev v tovarni in podobno), ali pa je strežnih enot več. Strežno enoto bomo poslej imenovali *kanal*. Strežni sistem je torej lahko enokanalen ali večkanalen. Vselej pa je kanalov le končno mnogo. Vendar za teorijo ni brez pomena limitni primer — neskončnokanalni sistem.

Ker ima strežni sistem na razpolago le končen šop kanalov, včasih ne more takoj ustreči vsem zahtevam. Tedaj je mogoče, da kakšno zahtevo zavrne (npr. avtobus more sprejeti le omejeno število potnikov). To vrsto množične strežbe imenujemo *sistem z odklonitvami*. Druga možnost pa je, da zahteva, ki ji ni mogoče takoj ustreči, počaka na začetek strežbe. Tedaj pravimo, da gre za *sistem s čakanjem*. Zahteve, ki čakajo, sestavljajo vrsto (npr. vrste pred trgovinami v časih potrošniške mrzlice).

Kakor so prej naštet primeri množične strežbe med seboj različni, jim je poglavitno vprašanje vendarle skupno: kolikor mogoče zanesljivo je treba ugotoviti zvezo med številom kanalov in kvaliteto strežbe. Kvaliteta se pri sistemih z odklonitvami navadno meri z deležem odklonjenih zahtev, pri sistemih s čakanjem pa s povprečno dolžino čakanja na začetek strežbe. Kvaliteta strežbe je seve tem boljša, čim več kanalov ima strežni sistem. Po drugi strani pa je preveliko število kanalov neekonomično. Zato je navadno tako, da se najprej določi primerna kvaliteta strežbe, nato pa se poskuša ugotoviti, koliko kanalov je najmanj potrebnih, da se ta kvaliteta res doseže.

Ta naloga bi bila kaj lahka, ko bi bili število zahtev, dolžina strežbe posamezni zahtevi in kvaliteta kanalov konstantni; in če že ne konstantni, ko bi bile vsaj znane funkcije časa. Toda vse tri količine so ne le odvisne od časa, temveč poleg tega še od slučaja. Odvisnost od slučaja ne pomeni samo manjših motenj v sicer zakonitem poteku procesa, temveč je prav bistvena. Kakšne narave so torej z matematičnega gledišča te tri količine — število zahtev, ki jim je treba ustreči, dolžina posamezne strežbe in število uporabnih kanalov?

Nemogoče je predvideti vnaprej, da bo do določenega trenutka prišlo tako in tako število zahtev, pač pa se da oceniti porazdelitev verjetnosti po mogočih številih zahtev. Pri določenem t je torej število zahtev $x(t)$ do trenutka t slučajna spremenljivka. Ker se ta spremenljivka s časom spreminja, je $x(t)$ enoparametrična družina slučajnih spremenljivk; kot je znano, rečemo taki družini slučajni proces. Tudi dolžina strežbe in število uporabnih kanalov sta, če smo natančni, slučajna procesa, le da je pri njiju odvisnost od časa nepri- merno manj izrazita. Zato se ne pregrešimo preveč, če vzamemo, da sta slučajni spremenljivki, ali celo, da je število uporabnih kanalov konstantno.

Vsekakor je na dlani, da se je mogoče lotiti prej omenjene in podobnih nalog le z metodami iz verjetnostnega računa. Teorija množične strežbe je torej del verjetnostnega računa.

2. Tok zahtev

Število prispelih zahtev bomo poslej imenovali *tok zahtev*. Prva naloga teorije množične strežbe je opisati in preučiti ta slučajni proces. Kot smo že omenili, je število zahtev $x(t)$ do trenutka t enoparametrična družina slučajnih spremenljivk. Vlogo parametra ima čas t . Navadno vzamemo, da teče čas od $t = 0$, to se pravi, prihajajoče zahteve in čas začnemo šteti hkrati.

Slučajna spremenljivka $x(t)$ je pri vsakem t diskretna, saj more zavzeti le kakšno nenegativno celo vrednost. Nadalje je očitno, da je vsaka realizacija toka zahtev naraščajoča funkcija časa: če ima $x(t)$ v trenutku t_1 vrednost k , ne more imeti v kakšnem poznejšem trenutku manjše vrednosti. Kar zadeva zalogo vrednosti slučajnih spremenljivk $x(t)$, je torej tok zahtev kar prijeten slučajni proces.

Z njegovo verjetnostno naravo pa je drugače. Le-ta je popisana, če je za vsako naravno število n in za poljubne nenegativne vrednosti $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ znan porazdelitveni zakon slučajnega vektorja

$$[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]$$

Ker so komponente vektorja diskretne slučajne spremenljivke, je seve zadosti, če za vsak naravni n , poljubne nenegativne $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ in kakršne koli cele nenegativne $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ zapišemo verjetnosti

$$P[x(t_1) = k_1, x(t_2) = k_2, \dots, x(t_n) = k_n] \quad (1)$$

Toda tudi ta zahteva je tako huda, da ji ni mogoče ustreči pri vsakem toku zahtev. Na srečo pa se tok zahtev pogosto odlikuje s kakšno lastnostjo, ki prej omenjeno nalogo olajša. Naštejmo nekaj takih lastnosti!

1. Naj bo tok tak, da je pri vsakem $t > 0$ in $a \geq 0$ verjetnost $P_k(t)$ za to, da pride v časovnem presledku $(a, a + t)$ natanko k zahtev, neodvisna od a . Za tak tok rečemo, da je *stacionaren*. Stacionarni tok zahtev je torej slučajni proces s stacionarnimi spremembami.

2. Če je pri toku za vsak $t > 0$ in $a > 0$ število zahtev v presledku $(a, a + t)$ neodvisno od toka do trenutka a , pravimo, da je tok *brez posledic*.

3. Naj bo $\psi(a, t)$ verjetnost, da prideta v presledku $(a, a + t)$ vsaj dve zahtevi. Če je pri vsakem $a \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(a, t)}{t} = 0$$

ali drugače zapisano,

$$\psi(a, t) = o(t) \quad (a \geq 0, t \rightarrow 0)$$

se imenuje tok *ordinaren*.

Ordinarnemu stacionarnemu toku brez posledic rečemo *najpreprostejši tok*. Oglejmo si ga natančneje in pokažimo, da so pri njem n -razsežni porazdelitveni zakoni (1) dani že z enorazsežnim porazdelitvenim zakonom.

Naj bo kot prej $P_k(t)$ verjetnost, da pride v presledku $(a, a + t)$ natanko k zahtev. Verjetnosti $P_k(t)$ so neodvisne od a ($a \geq 0$) in jih veže pri vsakem $t > 0$ relacija

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \quad (2)$$

Določimo verjetnosti $P_j(t)$! Razdelimo časovni interval $(0, 1)$ na poljubno število, recimo n , enakih podintervalov. Verjetnost za to, da v takem podintervalu ne pride niti ena zahteva, je $P_o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ker je tok stacionaren, je ta enaka za vse podintervale. In ker je tok brez posledic, je

$$P_o(1) = \left[P_o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n$$

Postavimo $P_o(1) = A$; potem sledi iz zadnje relacije

$$P_o\left(\frac{1}{n}\right) = A^{\frac{1}{n}}$$

Naj bo zdaj n fiksiran, k pa poljubno naravno število. Interval z dolžino k/n se da razdeliti na k podintervalov z dolžino $1/n$, zato je

$$P_o\left(\frac{k}{n}\right) = \left[P_o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^k = A^{\frac{k}{n}} \quad (3)$$

Vzemimo še poljubno pozitivno število t . Lahko najdemo tako naravno število k , da je

$$\frac{k-1}{n} < t \leq \frac{k}{n} \quad (4)$$

Ker število zahtev s časom narašča, je verjetnost $P_o(t)$ padajoča funkcija časa; zato je

$$P_o\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq P_o(t) \geq P_o\left(\frac{k}{n}\right)$$

in zaradi (3)

$$A^{\frac{k-1}{n}} \geq P_o(t) \geq A^{\frac{k}{n}} \quad (5)$$

Ta ocena velja pri vsakem fiksiranem n , da le k ustreza ocenama (4). Naj gre $n \rightarrow \infty$. Tedaj dobimo iz (5)

$$P_o(t) = A^t \quad (6)$$

Število $A = P_o(1)$ je verjetnost, zato velja zanj ocena

$$0 \leq A \leq 1$$

Če je $A = 1$, je po formuli (6) $P_o(t) = 1$ za še tako velik t . To pomeni, da se v poljubno dolgem presledku ne more pojaviti niti ena zahteva. Če je $A = 1$, torej sploh ni toka. To možnost lahko pustimo ob strani. Prav to velja tudi

za primer $A = 0$. Tedaj namreč $P_0(t) = 0$ za še tako majhen t . To se pravi, da v poljubno kratkem presledku gotovo pride vsaj ena zahteva, pa ne le ena, temveč celo neskončno mnogo. Pri dejanskih množičnih strežbah se to nikdar ne primeri. Potemtakem se lahko omejimo na primere, ko je

$$0 < A < 1$$

Če postavimo

$$\ln \frac{1}{A} = \lambda$$

je λ pozitivno število in $A = e^{-\lambda}$. Formulo (6) potem lahko zapišemo v obliki

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (7)$$

Do relacije (7) smo prišli, ne da bi kje upoštevali, da je najpreprostejši tok ordinaren. Zato velja (7) za vsak stacionarni tok brez posledic.

Eno izmed verjetnosti $P_k(t)$ že imamo. Določimo še druge! Naj bosta t in τ poljubni pozitivni števili, k katero koli naravno število, k_1 število zahtev v presledku $(0, t)$ in k_2 število zahtev v presledku $(t, t + \tau)$. Dogodek, da pride v presledku $(0, t + \tau)$ natanko k zahtev, se lahko zgodi ali tako, da je $k_1 = k$ in $k_2 = 0$, ali tako, da je $k_1 = k - 1$ in $k_2 = 1$, in tako naprej, ali pa tako, da je $k_1 = 0$ in $k_2 = k$. To so vsi mogoči načini dogodka ($x(t + \tau) = k$) in očitno so med seboj paroma nezdružljivi. Poleg tega je, ker je tok brez posledic, za poljubni naravni števili r in s , ki ustrezata pogoju $r + s = k$,

$$P(k_1 = r, k_2 = s) = P(k_1 = r) P(k_2 = s) = P_r(t) P_s(\tau)$$

Potemtakem je

$$P_k(t + \tau) = P_k(t) P_0(\tau) + P_{k-1}(t) P_1(\tau) + P_{k-2}(t) P_2(\tau) + \dots + P_0(t) P_k(\tau) \quad (8)$$

Naj gre $\tau \rightarrow 0$. Tedaj je po formuli (7)

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = 1 - \lambda\tau + o(\tau) \quad (9)$$

in zaradi ordinarnosti toka

$$P_1(\tau) = 1 - P_0(\tau) - \psi(\tau) = \lambda\tau + o(\tau) \quad (10)$$

$$\sum_{r=2}^k P_{k-r}(t) P_r(\tau) \leq \sum_{r=2}^k P_r(\tau) = \psi(\tau) = o(\tau) \quad (11)$$

Iz relacij (8)–(11) dobimo

$$P_k(t + \tau) = P_k(t) (1 - \lambda\tau) + P_{k-1}(t) \lambda\tau + o(\tau)$$

od tod pa

$$\frac{P_k(t + \tau) - P_k(t)}{\tau} = \lambda [P_{k-1}(t) - P_k(t)] + o(1)$$

Funkcije $P_k(t)$ so torej pri vsakem $t > 0$ odvedljive, in sicer je

$$\frac{d P_k(t)}{d t} = \lambda [P_{k-1}(t) - P_k(t)] \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

Če postavimo še $P_{-1}(t) \equiv 0$, se vidi iz (7), da velja relacija (12) tudi za $k = 0$.

Sistem linearnih diferencialnih enačb (12) je mogoče rešiti na različne načine, eden od njih je tale. Vpeljimo rodovno funkcijo

$$F(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) x^k$$

Vrsta na desni je absolutno konvergentna pri $|x| \leq 1$. Pomnožimo vse člene v sistemu (12) z x^k in sumirajmo po k od 0 do ∞ ; dobimo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_{k-1}(t) x^k - \lambda F = \lambda (x - 1) F$$

ali drugače zapisano,

$$\frac{\partial \ln F}{\partial t} = \lambda (x - 1)$$

Torej je

$$\ln F(t, x) - \ln F(0, x) = \lambda (x - 1) t \quad (13)$$

Ker je $P_0(0) = 1$ in $P_k(0) = 0$ pri $k > 0$, je

$$F(0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) x^k = P_0(0) = 1$$

in zato

$$F(t, x) = e^{\lambda(x-1)t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t x} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k$$

Če primerjamo ta izraz z definicijo funkcije $F(t, x)$, dobimo

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

Število zahtev je torej pri vsakem $t > 0$ porazdeljeno po Poissonovem zakonu, najpreprostejši tok je Poissonov slučajni proces.

S formulami (14) je že dan enorazsežni porazdelitveni zakon Poissonovega slučajnega procesa. Iz njega res takoj dobimo n -razsežni porazdelitveni zakon pri poljubnem naravnem številu n . Da to sprevidimo, vzemimo poljubno naravno število n , kakršna koli nenegativna števila $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ in poljubna nenegativna cela števila $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$. Ker je tok brez posledic, je

$$\begin{aligned} P(x(t_1) = k_1, x(t_2) = k_2, \dots, x(t_n) = k_n) &= \\ &= P(x(t_1) = k_1) P(x(t_2) = k_2 / x(t_1) = k_1) \dots P(x(t_n) = k_n / x(t_{n-1}) = k_{n-1}) = \\ &= P(x(t_1) = k_1) P(x(t_2) - x(t_1) = k_2 - k_1) \dots P(x(t_n) - x(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}) = \\ &= P_{k_1}(t_1) P_{k_2 - k_1}(t_2 - t_1) \dots P_{k_n - k_{n-1}}(t_n - t_{n-1}) = \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{k_1} e^{-\lambda t_1}}{k_1!} \prod_{r=2}^n \frac{[\lambda(t_r - t_{r-1})]^{k_r - k_{r-1}} e^{-\lambda(t_r - t_{r-1})}}{(k_r - k_{r-1})!} \end{aligned} \quad (15)$$

pa je naloga rešena.

Parameter λ v formulah (14) je lahko vsako pozitivno število in Poissonov slučajni proces je z njim natanko določen. Poglejmo, kakšen pomen ima vrednost λ za slučajni proces. Naj bo $Q(t)$ verjetnost za to, da pride v presledku z dolžino t vsaj ena zahteva, to se pravi,

$$Q(t) = 1 - P_0(t) = P_1(t) + \psi(t) = 1 - e^{-\lambda t} = \lambda t + o(t)$$

Potemtakem je

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(t)}{t} = \lambda \quad (16)$$

To relacijo bi lahko imeli tudi za definicijo parametra λ . Mimogrede naj omenimo, da obstaja limita (16) pri vsakem stacionarnem toku, in ne samo pri Poissonovem.

Parameter λ pa ima za najpreprostejši tok še bolj otipljiv pomen. Da ga bomo spoznali, izračunajmo matematično upanje števila zahtev, ki pridejo v časovnem presledku z dolžino t :

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k (\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t \end{aligned} \quad (17)$$

saj je očitno

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = e^{\lambda t}$$

Imenujmo povprečno število zahtev, ki pritečejo v časovni enoti, *jakost toka zahtev* in jo zaznamujemo z μ . Ugotovitev (17) kaže, da je pri stacionarnem Poissonovem toku jakost toka ravno λ :

$$\mu = \lambda$$

Za vsak stacionarni tok pa velja ocena

$$\mu \geq \lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(t)}{t} \quad (18)$$

To se hitro vidi: očitno je

$$E[x(t)] = \mu t = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(t) \geq \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = Q(t)$$

in je zato

$$\mu \geq \frac{Q(t)}{t}$$

To velja pri vsakem $t > 0$. Pri $t \rightarrow 0$ pa sledi od tod ocena (18).

Doslej smo obravnavali tok zahtev kot slučajni proces $x(t)$, katerega »vrednost« je pri vsakem $t > 0$ slučajna spremenljivka — število zahtev v intervalu $(0, t)$. Toda tok je mogoče opisati tudi drugače. Vzemimo spet, da se začne tok v trenutku $t_0 \neq 0$, in opazujmo trenutke, v katerih prihajajo zahteve. Naj bo t_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) trenutek, ko pride i -ta zahteva; postavimo še

$$t_i - t_{i-1} = T_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Potemtakem je T_1 presledek do prve zahteve, pri $i > 1$ pa je T_i presledek med zahtevama z indeksoma $i-1$ in i . Vse količine t_i in T_i so nenegativne slučajne spremenljivke. Domenimo se, da je tok opisan, če je za vsako naravno število n znan porazdelitveni zakon slučajnega vektorja

$$(T_1, T_2, \dots, T_n) \quad (19)$$

S tega gledišča je tok zahtev slučajni proces z diskretnim parametrom, torej zaporedje slučajnih spremenljivk. Včasih je tako gledanje na tok zahtev ugodnejše.

Dokaz, da sta oba opisa toka zahtev med seboj ekvivalentna, ni težak, vendar ga tu ne bomo navajali. Pač pa bomo pokazali, kako dobimo pri najpreprostejšem toku iz formul (14) porazdelitvene zakone slučajnih vektorjev (19).

Ker je Poissonov tok brez posledic, je pri njem potek toka od poljubnega trenutka t naprej neodvisen od dotedanjega poteka. Zato so pri njem tudi slučajne spremenljivke T_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) med seboj neodvisne in je mogoče

dobiti porazdelitvene zakone slučajnih vektorjev (19) že iz porazdelitvenih zakonov slučajnih spremenljivk T_i . Nadalje je Poissonov tok stacionaren in so zato slučajne spremenljivke T_i enako porazdeljene. Določimo torej porazdelitveno funkcijo $F(t)$ kar za spremenljivko $T_1 = t_1$. Pri $t \leq 0$ je njena vrednost 0. Naj bo torej t poljubno pozitivno število; tedaj je

$$F(t) = P(t_1 < t) = P(x(t) \geq 1) \quad (20)$$

saj sta dogodka

$$(t_1 < t) \quad \text{in} \quad (x(t) \geq 1)$$

očitno ekvivalentna: oba namreč pomenita, da je prišla prva zahteva pred trenutkom t . Iz (20) sledi

$$F(t) = 1 - P(x(t) = 0) = 1 - P_0(t)$$

Od tod in iz (14) pa

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Potemtakem so slučajne spremenljivke T_i porazdeljene po zakonu

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases} \quad (21)$$

Drugače rečeno, pri njih je gostota verjetnosti

$$p(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases} \quad (22)$$

Oglejmo si nazadnje še preprosto posplošitev Poissonovega toka. Vzemimo, da število zahtev, ki pridejo v časovnem presledku $(t, t + \tau)$, ni odvisno samo od dolžine presledka τ , temveč tudi od začetnega trenutka t . S tem privzetkom smo se odrekli stacionarnosti toka. Verjetnost za k ($k = 0, 1, 2, \dots$) zahtev v presledku $(t, t + \tau)$ bodi $P_k(\tau, t)$. Označimo kot v stacionarnem primeru

$$1 - P_0(\tau, t) = Q(\tau, t)$$

$$1 - P_0(\tau, t) - P_1(\tau, t) = \psi(\tau, t)$$

Od toka zahtevajmo še, naj bo ordinaren, to se pravi, pri vsakem fiksiranem $t \geq 0$ mora biti

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\psi(\tau, t)}{\tau} = 0$$

Pri vsakem $t \geq 0$ naj obstaja

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{Q(\tau, t)}{\tau} = \lambda(t)$$

Poleg tega naj bo tok brez posledic. Zaznamujmo

$$L(\tau, t) = \int_0^\tau \lambda(t + u) du$$

S skoraj tako proceduro kot pri Poissonovem toku se dobi, da je pri vsakem $\tau > 0$ in $t \geq 0$

$$P_k(\tau) = \frac{[L(\tau, t)]^k e^{-L(\tau, t)}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

Formule (23) so zelo podobne formulam (14). Zato imenujemo tok, ki smo ga pravkar opisali, nestacionarni Poissonov tok. Najpreprostejši tok je samo njegov posebni primer: dobimo ga, če je pri vsakem $t \geq 0$

$$L(\tau, t) = \lambda \tau$$

Drugih posplošitev Poissonovega toka v tem sestavku ne moremo obravnavati, čeprav so za uporabo potrebne.

3. Dolžina strežbe

Kot smo omenili že v uvodu, je potek množične strežbe odvisen tudi od dolžine posamezne strežbe. Ta dolžina je lahko neslučajna konstanta (taka je — vsaj približno — če opravlja strežni sistem samo storitve ene vrste), ali pa je slučajne narave. Zadnja možnost je splošnejša, zato se bomo ukvarjali le z njo. Strogo vzeto je slučajna dolžina strežbe slučajni proces, vendar skoraj zmeraj zadošča, če vzamemo, da je slučajna spremenljivka. Zaznamujmo jo z δ , njeno vsakokratno vrednost pa z d . Največkrat je tako, da so najpogostejše kratke strežbe, dolge pa tem redkejše, čim daljše so. Zato po navadi lahko vzamemo, da je slučajna spremenljivka δ porazdeljena po eksponentnem zakonu

$$F(d) = P(\delta < d) = 1 - e^{-\beta d} \quad (d > 0)$$

Pri tem je β pozitivna konstanta, značilna za dan strežni sistem. Njen pomen bomo spoznali, ko izračunamo matematično upanje $E(\delta)$ slučajne spremenljivke δ :

$$E(\delta) = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} x F'(x) dx = \beta \int_0^{\infty} x e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta} \quad (24)$$

Potemtakem je β povprečno število zahtev, ki jim en kanal postreže v časovni enoti.

Eksponentni porazdelitveni zakon za dolžino strežbe je ne le v večini primerov najbolj ustrezen, temveč tudi edini, pri katerem so problemi iz teorije množične strežbe rešljivi brez velikih težav. Eksponentni porazdelitveni zakon ima namreč tole lastnost:

Če je slučajna spremenljivka δ porazdeljena po eksponentnem zakonu

$$P(\delta \geq d) = e^{-\beta d}$$

je pri poljubnih pozitivnih a in d

$$P(\delta \geq d + a/\delta \geq d) = P(\delta \geq a) = e^{-\beta a} \quad (25)$$

Ali parafrazirano za dolžino strežbe: Če je strežba že trajala d časovnih enot, je verjetnost, da bo trajala vsaj še a časovnih enot, prav taka, kot je bila na začetku strežbe verjetnost, da bo njena dolžina vsaj a .

Dokazati izrek (25) ni prav nič težko. Po definiciji pogojne verjetnosti je namreč

$$P(\delta \geq d + a/\delta \geq d) = \frac{P(\delta \geq d + a)}{P(\delta \geq d)}$$

torej

$$P(\delta \geq d + a/\delta \geq d) = \frac{e^{-\beta(d+a)}}{e^{-\beta d}} = e^{-\beta a}$$

Iz dokaza je obenem razvidno, da velja izrek (25) samo za eksponentni porazdelitveni zakon.

4. Erlangov problem

Zdaj, ko smo si kolikor toliko na jasnem o poglavitnih elementih množične strežbe, lahko razmislimo, kako sistem množične strežbe deluje. Vzeti bomo, da razpolaga strežni sistem z n kanali, in ti naj bodo enako dostopni vsaki zahtevi. Število kanalov naj bo konstantno, nanje naj doteka stacionarni Poissonov tok zahtev, dolžina strežbe pa naj bo porazdeljena po eksponentnem zakonu s parametrom 1:

$$p(d) = e^{-d}$$

S to zadnjo zahtevo na splošnosti nič ne izgubimo, saj pomeni le, da vzamemo za časovno enoto povprečno dolžino strežbe.

Naj bo v nekem trenutku 0 zasedenih k ($0 \leq k \leq n$) kanalov. Število $N(t)$ zasedenih kanalov v katerem koli poznejšem trenutku je tedaj slučajna spremenljivka, katere vrednost je odvisna od tega, kdaj se končajo strežbe, ki so v teku v trenutku 0, od tega, kdaj v presledku $(0, t)$ pritečejo nove zahteve, in od tega, kako dolga strežba je potrebna za te nove zahteve. Ker je količina $N(t)$ odvisna med drugim od slučajnega procesa (števíla novih zahtev), je tudi sama slučajni proces.

Kakšna je — pri prejšnjih privzetkih — narava tega slučajnega procesa? Naj bo v trenutku t_0 zasedenih i kanalov, torej $N(t_0) = i$. Zanima nas, kakšna je pri tem pogoju verjetnost za to, da bo v trenutku $t_1 > t_0$ zasedenih j kanalov, se pravi pogojna verjetnost

$$P(N(t_1) = j | N(t_0) = i) = p_{ij}(t_1 - t_0) \quad (26)$$

Ta je, kot smo rekli, najprej odvisna od tega, kako dolgo bodo še trajale že začete strežbe. Po izreku (25) je porazdelitev njihove dolžine neodvisna od tega, kako dolgo so že trajale do trenutka t_0 . Nadalje vpliva na verjetnost (26) tok zahtev. Ker je ta po privzetku brez posledic, tudi zaradi njega verjetnost (26) ni odvisna od tega, kaj se je zgodilo pred trenutkom t_0 . Še toliko bolj velja to za dolžine strežb, ki se začno po trenutku t_0 . Proces $N(t)$ je torej tak: Potek procesa od trenutka t_0 naprej je odvisen samo od tega, kakšno vrednost ima proces v trenutku t_0 , prav nič pa od njegove zgodovine do t_0 . Drugače rečeno, $N(t)$ je markovski proces.

Poslej bomo uporabljali pri procesu $N(t)$ terminologijo, ki je pri markovskih procesih običajna. Če je $N(t) = i$, bomo rekli, da je sistem v stanju i . Količina i more imeti katero koli izmed vrednosti $0, 1, \dots, n$. Proces $N(t)$ ima torej $n + 1$ mogočih stanj. Verjetnosti (26) so očitno prehodne verjetnosti markovskega procesa. Za vsak pozitiven t je seve

$$p_{ij}(t) \geq 0 \quad \sum_{j=0}^n p_{ij}(t) = 1$$

Pri vsakem $t_1 > 0$ in $t_2 > 0$ pa pri poljubnih i in j od 0 do n velja enačba Chapmana in Kolmogorova

$$p_{ij}(t_1 + t_2) = \sum_{r=0}^n p_{ir}(t_1) p_{rj}(t_2) \quad (27)$$

Verjetnosti $p_{ij}(t)$ karakterizirajo vedenje procesa v katerem koli poznejšem trenutku t , če je znano, da je v začetnem trenutku 0 v stanju i . Vze-

mimo nekoliko splošneje, da nam ni znano začetno stanje procesa, temveč le začetna porazdelitev verjetnosti

$$\{p_i(0), i = 0, 1, \dots, n / p_i(0) \geq 0, \sum_{i=0}^n p_i(0) = 1\} \quad (28)$$

po vseh mogočih stanjih i . Za vsak j od 0 do n in za vsak $t > 0$ je verjetnost $p_j(t)$, da bo v trenutku t sistem v stanju j ,

$$p_j(t) = \sum_{i=0}^n p_i(0) p_{ij}(t) \quad (29)$$

Pomnožimo v relaciji (27) obe strani s $p_i(0)$ in sumirajmo po vseh i ; dobimo

$$p_j(t_1 + t_2) = \sum_{r=0}^n p_r(t_1) p_{rj}(t_2) \quad (30)$$

Kot kaže formula (29), so verjetnosti $p_j(t)$ odvisne od t in od začetne porazdelitve $p_i(0)$. Kako se vedejo verjetnosti $p_j(t)$, ko raste t čez vse meje? Markovski proces $N(t)$ je očitno tak, da je pri dovolj velikem t

$$p_{ij}(t) > 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

Za tak proces rečemo, da je *tranzitiven*. Kot je znano, velja za tranzitivne procese ergodijski izrek Markova:

Če je proces tranzitiven, obstaja pri vsakem j od 0 do n

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j \quad (31)$$

in je neodvisna od i .

Dokaz tega izreka bi bil tu predolg. Sicer pa je natanko tako kot pri navadni tranzitivni markovski verigi.¹

Ta izrek bomo uporabili, da dokažemo tole:

Pri tranzitivnem markovskem procesu obstajajo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = p_j \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

in so neodvisne od začetne porazdelitve $\{p_i(0); i = 0, 1, \dots, n\}$.

Res! Po izreku Markova obstajajo limitne verjetnosti (31). Naj bo začetna porazdelitev kakršna koli, po formuli (29) je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \sum_{i=0}^n p_i(0) \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j \sum_{i=0}^n p_i(0) = p_j$$

pa je dokazano, kar smo hoteli dokazati.

Pri procesu $N(t)$ torej obstajajo limitne verjetnosti p_j . Od njih se pri dovolj velikem t poljubno malo razločujejo verjetnosti $p_j(t)$, da bo sistem v trenutku t v stanju j . Zato v uporabah navadno vzamejo od časa neodvisne verjetnosti p_j za verjetnosti, da bo sistem kdaj pozneje v stanju j .

Zastavimo zdaj Erlangov problem: poiskati verjetnosti p_j .

Da si olajšamo pisanje, se domenimo: če sta $a(\tau)$ in $b(\tau)$ poljubni funkciji τ , naj pomeni zapis

$$a(\tau) \approx b(\tau)$$

da je

$$a(\tau) - b(\tau) = o(\tau)$$

¹ Prim. npr. B. V. Gnedenko, Kurs teorije verjetnosti, Fizmatgiz 1961, str. 116 sl.

Pri procesu $N(t)$, ki ga obravnavamo, je potemtakem verjetnost $Q(\tau)$, da pride v presledku τ vsaj ena zahteva,

$$Q(\tau) \approx \lambda\tau \quad (32)$$

in verjetnost $\psi(\tau)$, da prideta v tem presledku vsaj dve zahtevi,

$$\psi(\tau) = o(\tau)$$

Če je kak kanal zaseden, je verjetnost $V_1(\tau)$, da bo zaseden še po presledku τ ,

$$V_1(\tau) = e^{-\tau}$$

Če pa je zasedenih j ($j \leq n$) kanalov, je verjetnost $V_j(\tau)$, da bodo po presledku τ še zasedeni,

$$V_j(\tau) = e^{-j\tau}$$

Verjetnost $W_j(\tau)$, da se bo v tem presledku vsaj eden od zasedenih j kanalov odprl, je potemtakem

$$W_j(\tau) = 1 - e^{-j\tau} \approx j\tau \quad (33)$$

Vse to kaže, da je verjetnost za to, da količina $N(t)$ v presledku τ vsaj enkrat spremeni vrednost, $\approx \tau$, verjetnost, da se spremeni $N(t)$ v presledku τ vsaj dvakrat, pa ≈ 0 .

Na podlagi teh ugotovitev zlahka ocenimo vedenje prehodnih verjetnosti $p_{ij}(\tau)$, ko gre $\tau \rightarrow 0$.

1. Če je $|i - j| > 1$, mora količina $N(t)$ za prehod iz stanja i v stanje j vsaj dvakrat spremeniti vrednost; zato je

$$p_{ij}(\tau) \approx 0 \quad (|i - j| > 1) \quad (34)$$

2. Za prehod iz stanja i ($i < n$) v stanje $i + 1$ v časovnem intervalu τ je treba, da ali v tem presledku pride ena zahteva, ali pa $N(t)$ več kot enkrat spremeni vrednost; torej je zaradi (32)

$$p_{i,i+1}(\tau) \approx \lambda\tau \quad (0 \leq i < n) \quad (35)$$

Če je $i > 0$, more preiti sistem v presledku τ tudi iz stanja i v stanje $i - 1$. Za to je potrebno, da se ali eden od zasedenih kanalov odpre, ali pa $N(t)$ več kot enkrat spremeni vrednost. Po formuli (33) je potemtakem

$$p_{i,i-1}(\tau) \approx i\tau \quad (0 < i \leq n) \quad (36)$$

3. Ostale so nam še verjetnosti $p_{ii}(\tau)$. Če upoštevamo (34), dobimo

$$p_{ii}(\tau) \approx 1 - p_{i,i+1}(\tau) - p_{i,i-1}(\tau)$$

Ta ocena velja za $0 < i < n$; če postavimo $p_{n,n+1}(\tau) = p_{0,-1}(\tau) = 0$, pa tudi pri $i = 0$ in $i = n$. Od tod, iz (35) in (36) dobimo

$$\begin{aligned} p_{00}(\tau) &\approx 1 - \lambda\tau \\ p_{ii}(\tau) &\approx 1 - \lambda\tau - i\tau \quad (0 < i < n) \\ p_{nn}(\tau) &\approx 1 - n\tau \end{aligned} \quad (37)$$

Te ocene nam bodo služile pri preučevanju verjetnosti $p_j(t)$. Pri vsakem fiksiranem $t \geq 0$ in poljubnem $\tau > 0$ je po formuli (30)

$$p_j(t + \tau) = \sum_{r=0}^n p_r(t) p_{rj}(\tau)$$

Uporabimo v tej relaciji za verjetnost $p_{rj}(\tau)$ asimptotične ocene (34)—(37):

$$\begin{aligned} p_0(t + \tau) &= p_0(t) p_{00}(\tau) + p_1(t) p_{10}(\tau) + o(\tau) = \\ &= (1 - \lambda\tau) p_0(t) + \tau p_1(t) + o(\tau) \\ p_j(t + \tau) &= p_{j-1}(t) p_{j-1,j}(\tau) + p_j(t) p_{jj}(\tau) + p_{j+1}(t) p_{j+1,j}(\tau) + o(\tau) = \\ &= \lambda\tau p_{j-1}(t) + (1 - \lambda\tau - j\tau) p_j(t) + (j+1)\tau p_{j+1}(t) + o(\tau) \quad (0 < j < n) \\ p_n(t + \tau) &= p_{n-1}(t) p_{n-1,n}(\tau) + p_n(t) p_{nn}(\tau) + o(\tau) = \\ &= \lambda\tau p_{n-1}(t) + (1 - n\tau) p_n(t) + o(\tau) \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} \frac{p_0(t + \tau) - p_0(t)}{\tau} &= -\lambda p_0(t) + p_1(t) + o(1) \\ \frac{p_j(t + \tau) - p_j(t)}{\tau} &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + j) p_j(t) + (j+1) p_{j+1}(t) + o(1) \\ &\quad (0 < j < n) \\ \frac{p_n(t + \tau) - p_n(t)}{\tau} &= \lambda p_{n-1}(t) - np_n(t) + o(1) \end{aligned}$$

V vseh teh relacijah obstajajo na desni strani limite, ko gre τ proti nič. Funkcije $p_j(t)$ so torej odvedljive, in sicer je

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + p_1(t) \\ p_j'(t) &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + j) p_j(t) + (j+1) p_{j+1}(t) \quad (0 < j < n) \\ p_n'(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - np_n(t) \end{aligned} \quad (38)$$

To je Erlangov sistem diferencialnih enačb.

Sistema (38) nam ni treba reševati, saj nas ne zanimajo verjetnosti $p_j(t)$ same, temveč le njihove limite p_j , ko raste t čez vse meje; da te limite obstajajo, smo že pokazali. Vse desne strani imajo torej limite pri $t \rightarrow \infty$, zato jih imajo tudi leve strani. Nobena limita na levi strani ne more biti različna od nič. Ko bi namreč bila, bi ustrezna $p_j(t)$ rasla po absolutni vrednosti obenem s t čez vse meje; to pa ni mogoče, ker je $p_j(t)$ verjetnost in zato $0 \leq p_j(t) \leq 1$ pri vsakem t . Potemtakem je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j'(t) = 0 \quad (0 \leq j \leq n)$$

in Erlangov sistem diferencialnih enačb preide v limiti v algebrski sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + p_1 &= 0 \\ \lambda p_{j-1} - (\lambda + j) p_j + (j+1) p_{j+1} &= 0 \quad (0 < j < n) \\ \lambda p_{n-1} - np_n &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Iz tega sistema in iz očitne zveze

$$\sum_{j=0}^n p_j = 1 \quad (40)$$

se zlahka dobe verjetnosti p_j . V ta namen postavimo

$$\lambda p_{j-1} - j p_j = z_j \quad (0 < j \leq n)$$

in zapišimo sistem (39) v obliki

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_j - z_{j+1} &= 0 \quad (0 < j < n) \\ z_n &= 0 \end{aligned}$$

Potemtakem so vsi $z_j = 0$, to se pravi

$$p_j = \frac{\lambda}{j} p_{j-1} \quad (1 \leq j \leq n)$$

Torej je

$$p_j = \frac{\lambda^j}{j!} p_0 \quad (0 \leq j \leq n)$$

Zaznamujmo na kratko

$$\sum_{r=0}^n \frac{\lambda^r}{r!} = \frac{1}{K}$$

Potem dobimo iz pogoja (40) $p_0 = K$ in je nazadnje

$$p_j = K \frac{\lambda^j}{j!} \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (41)$$

Te tako imenovane Erlangove formule so rešitev Erlangovega problema. Pot, po kateri smo prišli do njih, je uporabna le, če je dolžina strežbe porazdeljena po eksponentnem zakonu, saj je samo tedaj $N(t)$ markovski proces in se moremo opreti na ergodijski izrek Markova. Toda kot je dokazal B. A. Sevastjanov², veljajo Erlangove formule ne glede na to, kako je porazdeljena dolžina strežbe.

Doslej nas ni zanimalo, kaj počno zahteve, ki najdejo vse kanale zasedene. Tako stališče se dobro prilega sistemom z odklonitvami, saj so zanje odklonjene zahteve, kot da jih sploh ni. Pa pogledjmo, kaj pomenijo Erlangove formule za sistem z odklonitvami. Iz (41) dobimo, da je verjetnost za to, da je proces $N(t)$ v stanju n ,

$$p_n = K \frac{\lambda^n}{n!}$$

To je verjetnost, da so vsi kanali zasedeni, torej verjetnost za to, da bo zahteva odklonjena. Verjetnost p_n je potemtakem prav tista mera za kvaliteto sistema z odklonitvami, ki smo jo omenili v uvodu. Pri enokanalnem sistemu je npr. verjetnost za odklonitev (ali povprečni delež odklonjenih zahtev)

$$p_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

Kvalitete sistema s čakanjem pa na podlagi Erlangovih formul še ni mogoče oceniti. Tu namreč ni dovolj vedeti, kolika je verjetnost, da bo zahteva morala počakati na strežbo, temveč je še pomembnejše vprašanje, kako dolgo bo čakanje. Dolžina čakanja, imenujmo jo γ , je seve slučajna spremenljivka. Matematično upanje te slučajne spremenljivke pa že primerno označuje kvaliteto sistema s čakanjem. Da bi to matematično upanje izračunali, je treba seve poznati porazdelitveni zakon spremenljivke γ .

² »Ergodičeskaja teorema dlja markovskih procesov i ee primenenija k telefonnym zadačam s otkazami«, Teor. verojat., t. 2, vyp. 1, 1957, str. 106—116.

Vzemimo spet, da priteka v sistem stacionarni Poissonov tok zahtev z jakostjo λ , dolžina strežbe δ pa naj bo porazdeljena po eksponentnem zakonu

$$P(\delta > d) = e^{-\beta d} \quad (d > 0, \beta > 0)$$

Označimo z $M(t)$ število zahtev, ki so v trenutku t prisotne, se pravi, ki jim sistem ravno streže ali ki čakajo na strežbo, in naj bo za vsak $t \geq 0$ in $j = 0, 1, 2, \dots$

$$p_j(t) = P(M(t) = j)$$

Za verjetnosti $p_j(t)$ lahko sestavimo sistem diferencialnih enačb na podoben način, kot smo dobili Erlangov sistem (38). Za $j < n$ se ta sistem celo ujema z Erlangovim:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \beta p_1(t) \\ p_j'(t) &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + j\beta) p_j(t) + (j+1)\beta p_{j+1}(t) \quad (0 < j < n) \end{aligned}$$

le da smo v sistemu (38) imeli $\beta = 1$. Pri $j = n$ pa je že drugače, saj je zdaj mogoč prehod iz stanja n tudi v vsako stanje j z $j > n$ in vsa ta stanja imajo pozitivno verjetnost $p_j(t)$.

Oglejmo si verjetnost $p_j(t)$ pri poljubnem $j \geq n$. Prav tako, kot smo dobili asimptotične ocene (34)–(37), ugotovimo, da je pri $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} p_{ij}(\tau) &\approx 0 \quad (|i - j| > 1) \\ p_{j-1,j}(\tau) &\approx \lambda\tau \\ p_{j+1,j}(\tau) &\approx n\beta\tau \\ p_{jj}(\tau) &\approx 1 - \lambda\tau - n\beta\tau \end{aligned} \quad (42)$$

Od primera $j < n$ se razločujejo te ocene le v tem, da je $p_{j+1,j}(\tau) \approx n\beta\tau$ in ne $\approx (j+1)\beta\tau$, ker je pač v stanju $j+1$ zasedenih tu n kanalov in ne $j+1$. Iz ocen (42) dobimo, če upoštevamo (30),

$$p_j(t + \tau) \approx p_{j-1}(t)\lambda\tau + p_j(t)(1 - \lambda\tau - n\beta\tau) + p_{j+1}(t)n\beta\tau$$

od tod pa za vsak $j \geq n$ diferencialno enačbo

$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + n\beta) p_j(t) + n\beta p_{j+1}(t)$$

Tako imamo v celem za verjetnosti $p_j(t)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) tale neskončni sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \beta p_1(t) \\ p_j'(t) &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + j\beta) p_j(t) + (j+1)\beta p_{j+1}(t) \quad (0 < j < n) \\ p_j'(t) &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + n\beta) p_j(t) + n\beta p_{j+1}(t) \quad (j \geq n) \end{aligned} \quad (43)$$

Kot pri sistemu (38) nas ne zanimajo verjetnosti $p_j(t)$ same, temveč le njihove limite, ko raste t čez vse meje; le-te vzamemo za od časa neodvisne verjetnosti stanj $M(t) = j$. Povejmo brez dokaza, da v naši situaciji, ko priteka stacionarni Poissonov tok zahtev in je dolžina strežbe porazdeljena eksponentno, limitne verjetnosti res obstajajo. Potemtakem imajo v sistemu (43) vse desne strani limito, ko gre $t \rightarrow \infty$, in leve strani prav tako. Limite na levi strani pa so iz prav takih razlogov kot v sistemu (38) vse enake nič. Če upoštevamo vse to, dobimo iz sistema (43) za limitne verjetnosti p_j neskončen algebrski sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \beta p_1 &= 0 \\ \lambda p_{j-1} - (\lambda + j\beta) p_j + (j+1)\beta p_{j+1} &= 0 \quad (0 < j < n) \\ \lambda p_{j-1} - (\lambda + n\beta) p_j + n\beta p_{j+1} &= 0 \quad (j \geq n) \end{aligned} \quad (44)$$

Iz njega in iz pogoja

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

je mogoče izračunati verjetnosti p_j .

Pri $j \leq n$ se dobi kot v sistemu (39)

$$p_j = \frac{\lambda}{j\beta} p_{j-1}$$

Če postavimo še $\lambda/\beta = y$, sledi od tod

$$p_j = \frac{y^j}{j!} p_0 \quad (0 \leq j \leq n)$$

Pri $j = n$ je zato

$$p_n = \frac{y^n}{n!} p_0 \quad (45)$$

Vrednosti p_j pri $j > n$ bomo dobili iz zadnje skupine enačb v sistemu (44). Zapišimo jih takole:

$$n\beta(p_{j+1} - p_j) = \lambda(p_j - p_{j-1}) \quad (j \geq n)$$

Vzemimo poljubno nenegativno celo število r in sumirajmo po j od n do $n+r$:

$$n\beta(p_{n+r+1} - p_n) = \lambda(p_{n+r} - p_{n-1})$$

ali drugače zapisano

$$n\beta p_{n+r+1} - \lambda p_{n+r} = n\beta p_n - \lambda p_{n-1} = 0$$

Potemtakem je

$$p_{n+r+1} = \frac{y}{n} p_{n+r} \quad (r \geq 0)$$

in če upoštevamo še (45),

$$p_{n+r+1} = \left(\frac{y}{n}\right)^{r+1} \frac{y^n}{n!} p_0 \quad (r \geq 0)$$

Za vsak $j \geq n$ je torej

$$p_j = \left(\frac{y}{n}\right)^{j-n} p_n = \frac{y^j}{n! n^{j-n}} p_0 \quad (46)$$

Izračunajmo še p_0 . Iz pogoja $\sum p_j = 1$ sledi, da je

$$\frac{1}{p_0} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{y}{n}\right)^j$$

Zaznamujmo prvo vsoto na desni s $s_{n-1}(y)$. Drugo vsoto pa je mogoče izračunati, če je le $y < n$, se pravi, če le v povprečju priteka manj zahtev, kot jih n -kanalni sistem v povprečju lahko odpravi; za uporabo očitno pridejo v poštev le taki primeri, saj sicer vrsta pred sistemom neomejeno raste. Naj bo torej $y < n$; potem je

$$\frac{n^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{y}{n}\right)^j = \frac{n^n}{n!} \frac{(y/n)^n}{1 - y/n} = \frac{y^n}{(n-1)!(n-y)}$$

in je zato

$$\frac{1}{p_0} = s_{n-1}(y) + \frac{y^n}{(n-1)!(n-y)}$$

Tako smo dobili verjetnosti vseh stanj $M(t) = j$. Iz njih lahko izračunamo verjetnost W za to, da so vsi kanali zasedeni:

$$W = P(M(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} p_j = p_0 \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{y}{n}\right)^j = \frac{y^n p_0}{(n-1)!(n-y)} \quad (47)$$

Zdaj bomo že lahko prišli do živega verjetnosti $P(\gamma > t)$, da bo zahteva, ki pride kadar koli, čakala dlje kot t ($t \geq 0$) časovnih enot. Po formuli za popolno verjetnost je

$$P(\gamma > t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j P(\gamma > t/M(t) = j) = \sum_{j=n}^{\infty} p_j P(\gamma > t/M(t) = j) \quad (48)$$

saj pride pri $j < n$ zahteva takoj na vrsto.

Količine p_j v relaciji (48) so verjetnosti stanj $M(t) = j$ in jih že poznamo. Poiščimo še verjetnosti

$$P(\gamma > t/M(t) = j) = P_j(\gamma > t) \quad (j \geq n)$$

Postavimo $j - n = k$. Določiti moramo verjetnosti za to, da bo zahteva, ki ravno prispe, morala čakati na strežbo vsaj t časovnih enot, če čaka pred njo že k zahtev. Zahteva, ki je ravno prišla, bo torej na vrsti, ko se odpre $k + 1$ kanalov. Verjetnost, da bo morala čakati vsaj ves presledek t , je torej enaka verjetnosti za to, da se v presledku t ne odpre več kot k kanalov. Naj bo $q_r(t)$ verjetnost dogodka, da se v presledku t odpre natanko r kanalov; tedaj je pri $j \geq n$

$$P_j(\gamma > t) = \sum_{r=0}^{j-n} q_r(t)$$

Odpiranje kanalov je v naših okoliščinah stacionarni Poissonov tok z jakostjo $n\beta$, saj je verjetnost za to, da se v presledku t ne odpre niti en kanal, če so vsi zasedeni, enaka

$$(e^{-\beta t})^n = e^{-n\beta t}$$

Torej je po formulah (14)

$$q_r(t) = \frac{(n\beta t)^r e^{-n\beta t}}{r!} \quad (0 \leq r \leq j - n)$$

in

$$P_j(\gamma > t) = e^{-n\beta t} \sum_{r=0}^{j-n} \frac{(n\beta t)^r}{r!} \quad (j \geq n)$$

Od tod, iz (46) in iz (48) se dobi po kratkem računu

$$P(\gamma > t) = \frac{P_n}{1 - y/n} e^{-(n\beta - \lambda)t}$$

in če upoštevamo še (47),

$$P(\gamma > t) = W e^{-(n\beta - \lambda)t}$$

Naloga, ki smo si jo zastavili, je rešena: slučajna spremenljivka γ ima očitno porazdelitveno funkcijo

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - We^{-(n\beta - \lambda)} & t > 0 \end{cases}$$

in matematično upanje

$$E(\gamma) = \int_0^{\infty} t F'(t) dt = \frac{W}{n\beta - \lambda}$$

S tem pa lahko ocenimo kvaliteto sistema s čakanjem.

Ilustrirajmo povedano s primerom. Na strežni sistem z dvema kanaloma naj priteče v povprečju vsake 3 minute po ena zahteva, povprečni strežni čas pa naj bo 4 minute. Kako dolgo bo zahteva v povprečju morala čakati na strežbo?

Iz podatkov se neposredno vidi, da je

$$\lambda = \frac{1}{3} \quad \beta = \frac{1}{4} \quad y = \frac{4}{3} \quad n\beta - \lambda = \frac{1}{6}$$

Torej je za verjetnost p_0 , da ne bo prisotna nobena zahteva,

$$\frac{1}{p_0} = s_1(y) = \frac{y^2}{2 - y} = 5$$

Verjetnost W , da bo zahteva morala čakati na strežbo, je potem

$$W = \frac{y^2}{5(2 - y)} = \frac{8}{15}$$

povprečna dolžina čakanja pa

$$E(\gamma) = \frac{W}{n\beta - \lambda} = \frac{16}{5} \text{ minute}$$

Ko pa bi recimo hoteli, naj povprečna dolžina čakanja ne bo daljša kot 1 minuto, bi moralo biti število kanalov

$$n \geq \frac{\lambda + W}{\beta} = \frac{52}{15}$$

torej vsaj enako 4.

V obravnavi sistema s čakanjem smo molče privzeli, da sistem streže zahtevam po vrsti, tako kot prihajajo. Mogoče pa je tudi, da sistem izbira čakajoče zahteve na slepo. Prav tako nismo predpisali nobenih omejitev za dolžino čakanja ali za število čakajočih zahtev. V splošnem pa je seve mogoče, da obstajajo glede tega kakšne meje. Te tako imenovane mešane sisteme moremo v tem sestavku le omeniti.

Literatura

1. Bharucha-Reid, Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications, McGraw-Hill, 1960.
2. A. J. Hinčin, Matematičeskie metody teorii massovogo obsluživanja, Trudy mat. inst. im. V. A. Steklova, t. 49, Izd. AN SSSR, Moskva 1955.

ELASTIČNOST FUNKCIJE

ALOJZIJ VADNAL

V funkciji, ki je izražena z enačbo $y = f(x)$, sta spremenljivki x in y z vidika teoretične matematike v splošnem neimenovani količini. Tako funkcijo si lahko geometrično ponazorimo v koordinatnem sistemu z določeno krivuljo. Odvod funkcije je tudi neimenovana količina in je definiran takole:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Po tej definiciji velja za relativno majhne prirastke neodvisne spremenljivke ocenitev:

$$f'(x) \sim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

oziroma ocenitev:

$$y = \sim f'(x) \Delta x$$

Na osnovi te ocenitve sledi tale razlaga odvoda funkcije v določeni točki:

Odvod funkcije v določeni točki je število, ki približno izraža, kolikokrat večji je prirastek odvisne spremenljivke od ustreznega prirastka neodvisne spremenljivke.

To razlago izrazimo lahko še nekoliko bolj površno takole:

Če priraste neodvisna spremenljivka za 1 enoto, tedaj priraste odvisna spremenljivka približno za $f'(x)$ enot.

Vse to je dokaj preprosto, dokler imamo opraviti z neimenovanimi količinami, torej zlasti v teoretični matematiki. Stvar pa ni tako preprosta v uporabni matematiki pri njeni aplikaciji v tehniki, biologiji, ekonomiji itd., ko imamo opraviti po navadi z imenovanimi količinami ob svobodnem izboru merskih enot. Izbor merskih enot bistveno učinkuje na podobo funkcije, ki ustreza obravnavanemu problemu in na velikost njenega odvoda.

Oglejmo si najprej nekaj posledic transformacije merskih enot.

Denimo, da imamo opraviti z določeno količino, ki ima pri izbrani merski enoti e velikost x . Če vzamemo namesto merske enote e mersko enoto $\bar{e}$, za katero velja transformacijski zakon:

$$e = k \bar{e} \quad \bar{e} = \frac{1}{k} e$$

dobi količina velikost $\bar{x}$. Ker velja enačba:

$$x e = \bar{x} \bar{e}$$

dobimo za velikost količine transformacijski zakon:

$$x = \frac{1}{k} \bar{x} \quad \bar{x} = k x$$

Transformacija funkcije. V funkciji:

$$y = f(x) \quad (1)$$

merimo neodvisno spremenljivko x v merskih enotah e_x , odvisno spremenljivko y pa v merskih enotah e_y . Merski enoti transformiramo po transformacijskem zakonu:

$$\begin{aligned} e_x &= k_x \bar{e}_x & \bar{e}_x &= \frac{1}{k_x} e_x \\ e_y &= k_y \bar{e}_y & \bar{e}_y &= \frac{1}{k_y} e_y \end{aligned} \quad (2)$$

Pri tej transformaciji merskih enot velja za spremenljivki x in y transformacijski zakon:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{k_x} \bar{x} & \bar{x} &= k_x x \\ y &= \frac{1}{k_y} \bar{y} & \bar{y} &= k_y y \end{aligned} \quad (3)$$

Če vstavimo transformirani spremenljivki v funkcijo (1), dobimo transformirano funkcijo:

$$\bar{y} = k_y f\left(\frac{\bar{x}}{k_x}\right) \quad (4)$$

Vsebinsko isti funkcijski odnos med dvema spremenljivkama podajata lahko količinsko dve različni funkciji (1) in (4); razlika je le v izboru merskih enot, ki je pa svoboden. Pri geometrični ponazoritvi te funkcijske odvisnosti dobimo potemtakem dve različni krivulji, katerih oblika je odvisna od takega ali drugačnega izbora merskih enot.

Transformacija odvoda. Pri navedenih transformacijah merskih enot (2) se transformira tudi odvod funkcije. Če odvedemo funkcijo (4) na novo neodvisno spremenljivko $\bar{x}$, dobimo odvod:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{k_y}{k_x} f'(x) \quad (5)$$

Velikost odvoda je torej odvisna od izbora merskih enot. Po transformaciji merskih enot (2) se odvod pomnoži s kvocientom pretvornikov k_y in k_x .

Ta lastnost odvoda, da je pravzaprav odvisen od merskih enot, je za razmotrivanje količinskih odnosov med funkcijsko odvisnimi spremenljivkami dokaj neugodna zlasti pri obravnavanju funkcijskih odnosov v ekonomiji. Zaradi take neprikladnosti odvoda se je v ekonomiji uvedel in tudi uveljavil namesto odvoda nek podoben pojem: elastičnost.

Elastičnost funkcije $y = f(x)$ pišemo in definiramo takole:

$$\frac{E y}{E x} = \frac{x}{y} \frac{d y}{d x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (6)$$

Elastičnost funkcije dobimo torej tako, da odvod funkcije pomnožimo s kvocientom spremenljivk x/y .

Elastičnost funkcije odlikuje lastnost, da ni odvisna od izbora merskih enot, s katerimi merimo spremenljivki. Pri transformaciji merskih enot (2) velja namreč:

$$\frac{E \bar{y}}{E \bar{x}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \cdot \frac{d \bar{y}}{d \bar{x}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \cdot \frac{k_y}{k_x} \cdot \frac{d y}{d x} = \frac{x}{y} \frac{d y}{d x} = \frac{E y}{E x}$$

S tem je dokazano, da je elastičnost funkcije invariantna proti transformaciji merskih enot.

Ulomek $\Delta x/x$ imenujemo relativni prirastek spremenljivke x . Ker velja pri transformaciji merske enote (2):

$$\frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} = \frac{\Delta x}{x}$$

je relativni prirastek tudi invarianten proti transformaciji merske enote. Relativni prirastek radi izražamo v procentih prvotne vrednosti; potemtakem je v procentih izražen zgornji relativni prirastek enak

$$100 \frac{\Delta x}{x} \%$$

Podobno je v procentih izražen relativni prirastek odvisne spremenljivke enak

$$100 \frac{\Delta y}{y} \%$$

Iz definicije elastičnosti funkcije (6) sledi za relativno majhne prirastke neodvisne spremenljivke ocenitev:

$$\frac{E y}{E x} \sim \frac{x}{y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

oziroma ocenitev:

$$100 \frac{\Delta y}{y} \% = \sim \frac{E y}{E x} \left(100 \frac{\Delta x}{x} \% \right)$$

Na osnovi te ocenitve sledi tale razlaga elastičnosti funkcije v določeni točki:

Elastičnost funkcije v določeni točki je število, ki približno izraža kolikokrat večji je relativni prirastek odvisne spremenljivke od ustreznega relativnega prirastka neodvisne spremenljivke.

To razlago izrazimo lahko še nekoliko bolj površno takole:

Če priraste neodvisna spremenljivka za 1 %, tedaj priraste odvisna spremenljivka približno za $\frac{E y}{E x}$ procentov.

Za elastičnost sestavljenih funkcij je lahko dokazati obrazce:

$$\begin{aligned} \frac{E(u \pm v)}{E x} &= \frac{u \frac{E u}{E x} \pm v \frac{E v}{E x}}{u \pm v} \\ \frac{E(u v)}{E x} &= \frac{E u}{E x} + \frac{E v}{E x} \\ \frac{E\left(\frac{u}{v}\right)}{E x} &= \frac{E u}{E x} - \frac{E v}{E x} \end{aligned}$$

Elastičnost funkcije se pogosto uporablja pri analizi raznih funkcijskih odvisnosti, ki jih srečamo v ekonomiji.

Vzemimo za primer funkcijo popraševanja. Po privzemu določenih ekonomskih hipotez lahko predpostavimo, da je popraševanje x po kakem blagu padajoča in odvedljiva funkcija cene p tega blaga:

$$x = x(p)$$

To funkcijo imenujemo funkcijo popraševanja. Elastičnost vsake padajoče funkcije je pri pogojih $x > 0$ in $p > 0$ negativna. Da bi se znebil negativnega predznaka je znani ekonomist Marshall definiral elastičnost popraševanja takole:

$$\eta = - \frac{E x}{E p} = - \frac{p}{x} \frac{d x}{d p}$$

potemtakem je elastičnost popraševanja vedno pozitivna ali pa kvečjemu enaka 0.

Vzemimo, da se cena blaga dvigne za q %. Kakšne posledice bo rodil tak dvig cene? Popraševanje po tem blagu bo padlo za $\eta \cdot q$ %. Glede na velikost elastičnosti popraševanja pri prvotni ceni razlikujemo dve bistveno različni možnosti.

a) $\eta > 1$. V tem primeru pade popraševanje po blagu za več procentov, kakor je narastla cena blaga. Zaradi tega se dohodek od prodanega blaga zmanjša. Ukrep zvišanja cene je torej povzročil znižanje dohodka in zato ekonomsko ni bil utemeljen. V taki situaciji pravijo ekonomisti, da je popraševanje neelastično.

b) $\eta < 1$. V tem primeru pade popraševanje po blagu za manj procentov, kakor je narastla cena blaga. Zaradi tega se dohodek od prodanega blaga poveča. Ukrep zvišanja cene povzroči torej zvišanje dohodka in je zato ekonomsko utemeljen. V taki situaciji pravijo ekonomisti, da je popraševanje elastično.

Pri dviganju ali nižanju cene kakega blaga je ekonomski učinek ukrepa bistveno odvisen od tega, ali je pri prvotni ceni popraševanja elastično ali neelastično. Zato je v tem primeru elastičnost mnogo bolj uporaben instrument raziskave kot pa odvod.

L i t e r a t u r a

R. G. D. Allen: Mathematical Analysis for Economists, London 1956.

JEDRSKA SNOV*

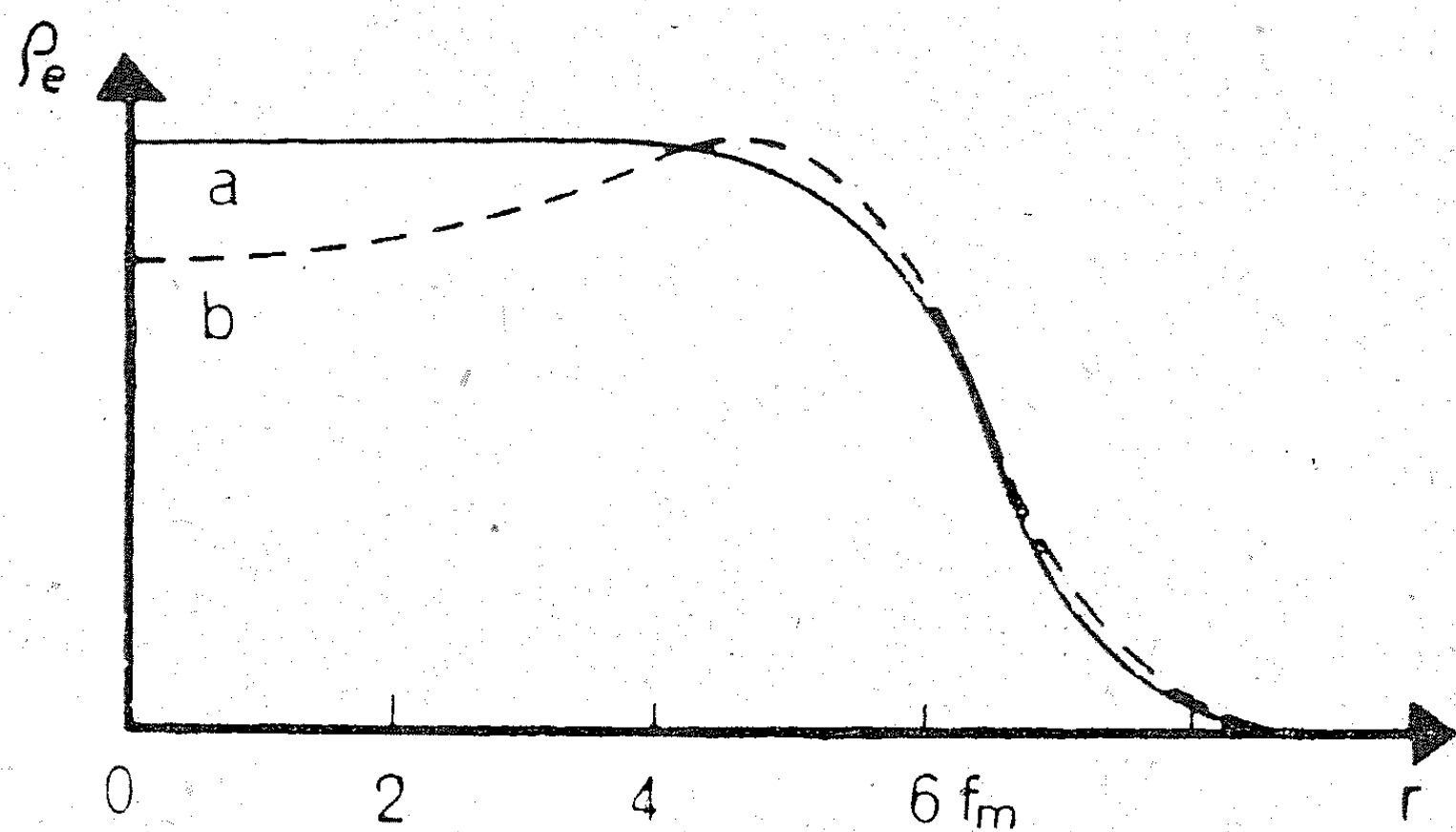
R. F. PEIERLS

Seznam atomskih jeder je zelo dolg in za opis njihovih lastnosti potrebujemo cele knjige. To naraščajoče gradivo lažje pregledamo, če si pomagamo s preprostim modelom na podlagi splošnih dejstev. Glavno tako dejstvo je, da imajo jedra z izjemo najlažjih enaki specifični količini: specifično prostornino, to je prostornino na en nukleon, in vezavno energijo na nukleon. Okoliščine v notranjosti dovolj velikega jedra torej niso odvisne od velikosti jedra. Nukleoni v notranjosti tvorijo jedrsko snov. Jedra so kapljice jedrske snovi.

Medtem ko je idealna jedrska snov v notranjosti jeder enakomerna, je blizu površine snov v drugačnem stanju. Za študij idealne jedrske snovi so tedaj primerna velika jedra, pri katerih je razmerje med površino in prostornino sorazmerno majhno. Velikost jeder pa je omejena, saj zaradi elektrostatnega odboja med velikim številom protonov težka jedra niso stabilna in se zacepijo. Največja jedra, ki so dovolj dolgoživa, da delajo z njimi poskuse, imajo okoli 250 nukleonov. To se zdi veliko, toda gruča 250 tesno druga ob drugo naloženih kroglic ima premer, ki je samo šestkratni premer ene kroglice. Vrhu tega je več kot polovica kroglic na površini.

Pri primerjavi resničnih jeder z jedrsko snovjo ne gre brez idealizacije. Od pojma jedrske snovi ne smemo pričakovati preveč, v pravih mejah pa je ta pojem zelo koristen. Jedrska snov ima vse lastnosti, ki jih pripisujemo drugim oblikam snovi. Načelno lahko zanjo definiramo gostoto, viskoznost, specifično toploto in druge količine. Vendar vse te niso zanimive za jedrskega fizika.

Lastnosti jedrske snovi. Gostota. Standfordski poskusi s sipanjem elektronov so najlepše potrdili sorazmernost prostornine jeder s številom nukleonov^{1.**}



Sl. 1. Gostota naboja ρ_e v odvisnosti od razdalje od središča jedra

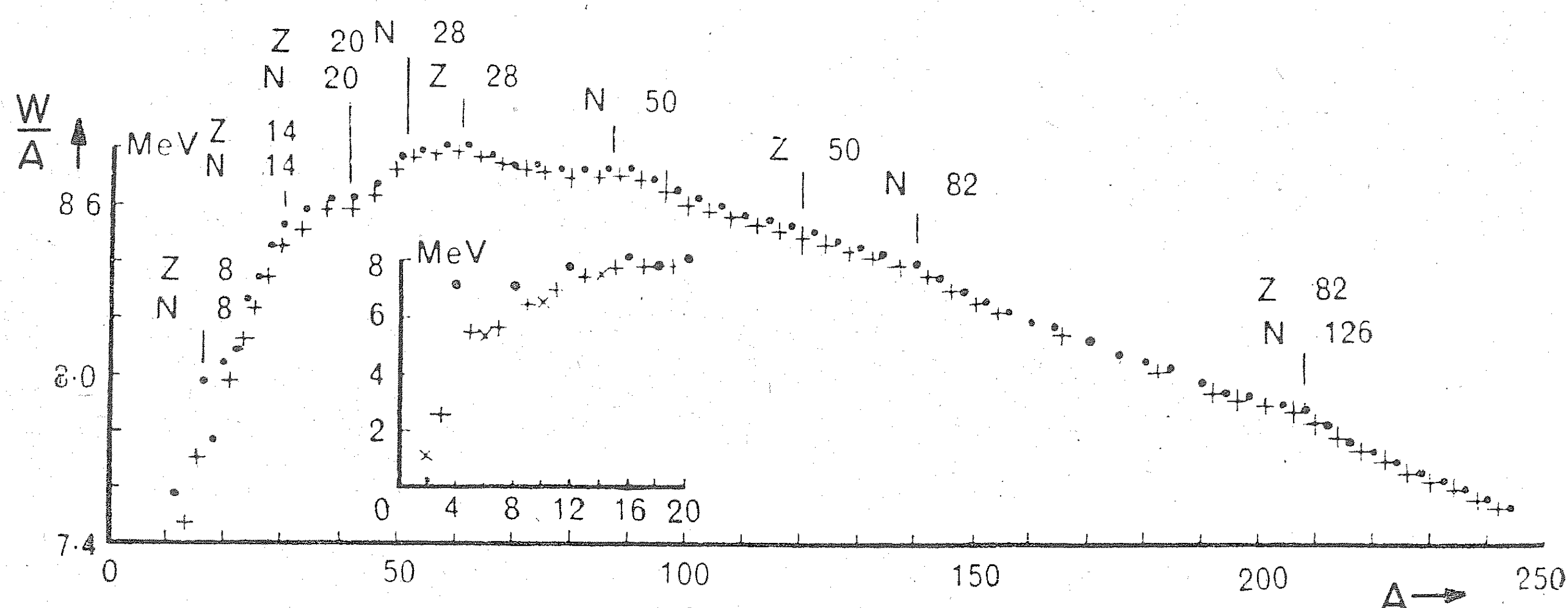
* Članek »Nuclear Matter« je izšel v reviji družbe ICI Endeavour, **22**, 146 (1964). Profesorju Peierlsu in uredništvu revije se zahvaljujemo za ljubeznivo dovoljenje za prevod. Članek je prevedel J. Strnad.

** J. Strnad: Elektromagnetna struktura nukleonov. Obz. mat. fiz. **8**, 120 (1961) (op. prev.).

Pokazali so, da je gostota protonov enakomerna okoli srede jedra in proti površini hitro pade na nič. Verjetno ima gostota na sredi jedra zaradi elektrostatskega odboja, ki tišči protone vsaksebi proti površini, plitev minimum. Na obstoj tega minimuma kažejo računi. Eksperimentalni podatki, ki so še ne-natančni, ne nasprotujejo temu.

Nekaj razlogov govori za to, da se porazdelitev nevtronov ujema s porazdelitvijo protonov. Zato ponazarja krivulja na sl. 1 tudi porazdelitev snovi. Srednji ravni del krivulje ustreza jedrski snovi. Gostota jedrske snovi je $0,17 \text{ nukleona/fm}^3$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). To ni prava ravnovesna gostota enakomerne jedrske snovi, ker je v kapljici zaradi površinske napetosti večji tlak. Vendar deluje v jedru elektrostatski odboj proti površinski napetosti. Zato popravek ni velik, tako da je prava gostota morda $0,2 \text{ fm}^{-3}$, to je $3,3 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$.

Gostota energije. Vezavno energijo jeder lahko določijo precej natančno iz njihovih mas. Večjo natančnost dosežejo z merjenjem energije, ki se sprosti, če dodajo jedru nukleon ali dva. Slika 2 kaže vezavno energijo na nukleon kot funkcijo masnega števila A , to je števila nukleonov. Pri majhnih A , to je pri lahkih jedrih, je ta energija manjša zaradi večjega deleža površinske energije. Pri velikih A , to je pri težkih jedrih z velikim nabojem, pa je ta energija manjša zaradi elektrostatskega odboja. V težjih jedrih je več kot



Sl. 2. Vezavna energija jeder, preračunana na nukleon (W/A) v odvisnosti od števila nukleonov v jedru (A). Vsaka točka ponazarja povprečje čez nekaj sosednjih jeder: krožci za sodo-sod A , križci za lih A . V vstavku za majhen A ustrezajo pokončni križci liho lihim jedrom.²

polovica nevtronov. Tudi to zmanjša vezavno energijo, saj pride privlačna sila med nukleoni najbolj do izraza, če je nevtronov toliko kot protonov. Vsak od prispevkov k vezavni energiji ima drugačno odvisnost od masnega števila. Ločimo jih tako, da vskladimo krivuljo na sl. 2 s primerno formulo in prilagodimo koeficiente pri posameznih členih. Po tej poti ugotovimo, da je energija v enakomerni jedrski snovi -15 MeV na nukleon, če ne upoštevamo elektrostatskega odboja in gostota energije jedrske snovi -31 MeV/fm^3 , če vzamemo, da je energija prostih mirujočih nukleonov enaka nič.

Površinska napetost. Koeficient ustreznega člena v formuli, ki smo jo prilagodili krivulji s sl. 2, da za površinsko energijo okoli $1,3 \text{ MeV/fm}^2$.

Stisljivost. Čeprav stisljivosti jedrske snovi ne morejo določiti s poskusom, je zanimiva, ker nastopa v mnogih računih pri jedrskih reakcijah. Na žalost pa nastopajo v računih hkrati še druge količine, ki prav tako niso

neposredno merljive. Zaupamo pa vrednosti, ki jo da teorija, ker da ista teorija pravo ravnovesno gostoto in gostoto energije. Taka teorija mora namreč dati zanesljivo tudi spremembo energije okoli ravnovesne vrednosti, kar je v preprosti zvezi s stisljivostjo. Iz teorije Brucknerja in Gammla (glej dalje) sledi za stisljivost $2,7 \text{ fm}^2/\text{MeV}$, to je $1,7 \cdot 10^{-27} (\text{kp}/\text{cm}^2)^{-1}$. Hitrost zvoka v jedrski snovi naj bi bila tedaj okoli 15 % hitrosti svetlobe.*

Specifična toplota. Če zadene jedro hitri nukleon ali če jedro absorbira foton, lahko ostane jedro v stanju, v katerem si presežek energije razdelijo vsi nukleoni. Gibanje nukleonov spominja v tem primeru na termično gibanje, tako da lahko prevzamemo pojme iz statistične mehanike. Če je energija dovolj velika, pride do emisije — izhlapevanja — nukleonov. Ti imajo seveda samo del razpoložljive energije, kot ima izhlapela molekula iz kapljice vode samo del notranje energije kapljice. Porazdelitev nukleonov po hitrosti je Maxwelllova porazdelitev za temperaturo jedra po emisiji. V splošnem namreč ohlajitev jedra zaradi emisije nukleona ni zanemarljiva. Prek kinetičnih energij izhlapelih nukleonov lahko merimo temperaturo jedra z določeno energijo in ugotovimo njegovo specifično toploto. Sprva ni šlo gladko, ker je bilo število nukleonov, ki so prevzeli vso ali skoraj vso razpoložljivo energijo, dosti večje, kot bi smelo biti po Maxwelllovi porazdelitvi. Toda ugotovili so, da gre pri tem za emisijo pred porazdelitvijo energije na vse nukleone, to je pred vzpostavitvijo termičnega ravnovesja.

Specifično toploto lahko dobijo tudi z merjenjem resonanc počasnih nevtronov. Počasni nevtron, ki zadene jedro z masnim številom A , lahko tvori jedro z masnim številom $A + 1$ v visoko vzbujenem stanju, saj se pri zajetju nevtrona sprosti 6 do 8 MeV. Navzlic visoki energiji to jedro precej časa ne razpade, ker posamezen nukleon le stežka zbere za pobeg potrebno energijo. Zato ima jedro precej ostre energijske nivoje, ki jih lahko preštejejo na izbranem energijskem intervalu. Dobljeno število je v zvezi z entropijo. Iz odvisnosti entropije od energije lahko izračunajo specifično toploto. To je specifična toplota končnih jeder in ne jedrske snovi. Pravzaprav bi bilo treba obravnavati specifično toploto kot funkcijo mase jedra in izračunati specifično toploto jedrske snovi, tako kot smo s sl. 2 ugotovili energijsko gostoto. Vendar podatki za kaj takega še niso dovolj izčrpni.

Merjenja kažejo, da narašča specifična toplota s temperaturo. Podatki govorijo, da je termična energija $W = \frac{1}{2} \gamma T^2$. Pri tem ima konstanta γ velikostno stopnjo $\frac{1}{4} \text{ MeV}^{-1}$ na nukleon, če merimo temperaturo v MeV. Ta majhna vrednost priča, da ima jedrska snov celo pri temperaturi 1 MeV specifično toploto, ki je samo dvanajstina vrednosti po ekviparticijskem teoremu.* Zato smemo primerjati jedrsko snov z navadno snovjo pri zelo nizkih temperaturah.

Teoretična razmišljanja. Razlogi za nasičenje. Lastnosti jedrske snovi izzivajo teoretike. Zakaj ima ravnovesna gostota določeno vrednost? Zakaj ne

* Za hitrost zvoka v tekočini velja $c_s = (\chi \rho)^{-1/2}$. Vstavimo za stisljivost $\chi = 1,7 \cdot 10^{-32} (\text{N}/\text{m}^2)^{-1}$ in za gostoto $\rho = 3,3 \cdot 10^{17} \text{ kg}/\text{m}^3$ in dobimo navedeno vrednost (op. prev.).

* Iz $W = \frac{1}{2} \gamma T^2$ je specifična toplota $c_v = \gamma T$, to je $\frac{1}{4}$ na nukleon pri temperaturi 1 MeV. Po ekviparticijskem teoremu pa je $W = 3 T$, torej $c_v = 3$, če merimo temperaturo v energijskem merilu (MeV). Glej npr. I. Supek: Teorijska fizika II, Zagreb (Naučna knjiga), 1954, s. 330 (op. prev.).

narašča z naraščajočim številom nukleonov tako kot pri atomih? To je seveda posledica narave sil med nukleoni. Če bi se vsi nukleoni medsebojno privlačevali v vseh okoliščinah, bi se jedro krčilo, dokler se vsak nukleon ne bi znašel v dosegu privlačnih sil vseh drugih nukleonov. Zaradi nasičenja pa ne pride do tega. Pri razpravi moramo upoštevati Paulijevo izključitveno načelo, ki pravi, da dva nukleona ne moreta biti v natančno istem stanju. Da bi spravili mnogo nukleonov v majhno prostornino, jih je treba razporediti na različna stanja, zaradi česar morajo imeti nekateri precejšnje hitrosti. Pokaže se, da spravimo lahko 4 nukleone ene vrste z določeno orientacijo spina v kocke z robom de Brogliejeve valovne dolžine za najhitrejši nukleon.* To pomeni, da je lahko kvečjemu 16 nukleonov v prostornini λ^3 , kjer je $\lambda = h/mv$ de Brogliejeva valovna dolžina. Večja gostota zahteva manjše valovne dolžine in s tem večje kinetične energije.

Izključitveno načelo zares nasprotuje zgostitvi. Toda kinetična energija delca narašča samo kot kvadrat hitrosti, torej kot gostota na potenco $\frac{2}{3}$. Na drugi strani pa pri čisto privlačnih silah narašča potencialna energija v negativno smer sorazmerno z gostoto, dokler vsak nukleon ne privlači vseh drugih. S tem pridemo do zaključka, da bi morala v celoti gostota jedrske snovi še vedno naraščati z naraščanjem števila nukleonov. Navadna snov, kot npr. voda, kaže nasičenje, ker se dve molekuli privlačita samo v veliki razdalji, ko pa se bolj približata, postane sila odbojna. Jedrski fiziki so sprva nasprotovali vpeljavi odbojne sile med nukleoni, saj ima že jedrska privlačna sila izredno kratek doseg, okoli 2 fm. Misel o izredno močni odbojni sili s še krajšim dosegom se je zdela preveč dajnosežna. Vendar so s sipanjem protonov na protonih pri velikih energijah potrdili obstoj močne odbojne sile v razdalji do 0,4 fm. Nukleoni zares spominjajo na toge kroglice z radijem okoli 0,4 fm.

Nadaljnji vzrok za nasičenje so Heisenbergove zamenjalne sile. Zaradi zamenjalnih sil pri trku med protonom in nevtronom nevtron in proton zamenjata legi. Do nenadnih sprememb ne pride zlahka, zato so zamenjalne sile učinkovite le med delcema, ki sta v prostoru praktično v isti točki in imata enako hitrost. Zaradi tega sodeluje nukleon prek zamenjalnih sil samo z majhnim številom drugih nukleonov. Poskusi pri trkih hitrih protonov z nevtroni so potrdili obstoj Heisenbergovih zamenjalnih sil. Vendar so obenem pokazali, da je delež zamenjalnih sil premajhen, da bi zagotovil nasičenje. Zato je treba upoštevati oboje: zamenjalne sile in odbojne sile s kratkim dosegom. Poskusi neposredno potrjujejo obstoj obeh.

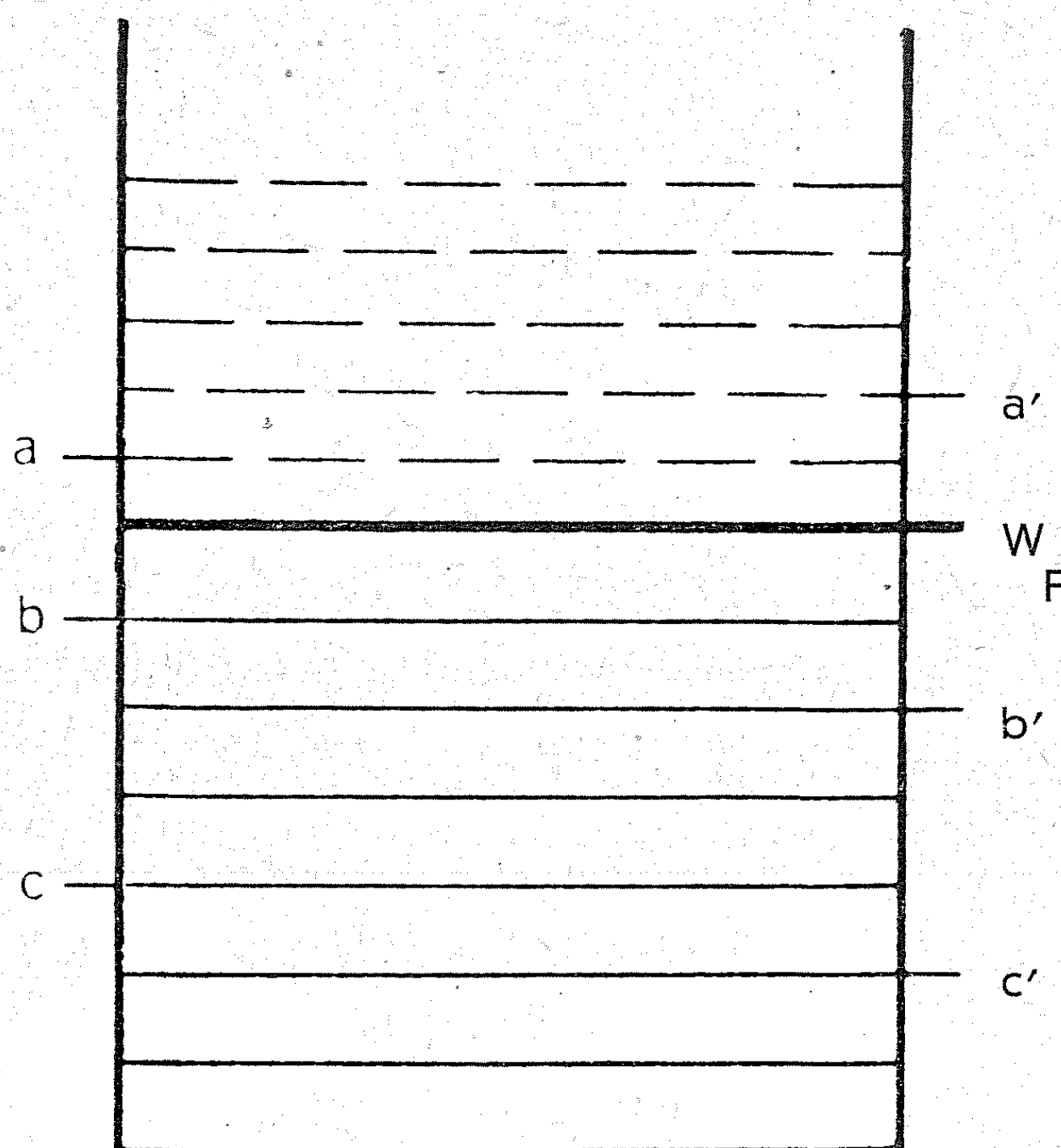
Teoretična slika. Zdaj ko poznamo bistvene značilnosti sil med nukleoni, je treba izdelati še kvalitativno sliko njihovega delovanja v jedrski snovi. V navadni trdni snovi so atomi zaradi medsebojnih sil urejeno razporejeni. Vse snovi z izjemo helija se strdijo, če je temperatura dovolj nizka. Samo helij ostane tekoč še pri absolutni ničli, če ne povečamo tlaka. Pri tem je treba

* Število možnih stanj za delec z gibalno količino med 0 in G je enako razmerju med razpoložljivo prostornino faznega prostora in najmanjšo celico h^3 , pri čemer moramo upoštevati 4 možnosti; delec je lahko proton ali nevtron s spinom navzgor ali navzdol: $dN = 4 d^3V d^3G/h^3$. Za prostornino vzemimo kocko z robom a ($d^3V = a^3$), za prostornino v prostoru gibalne količine pa kroglo z radijem G ($d^3G = \frac{4}{3} \pi G^3$) in dobimo $dN = \frac{4}{3} \pi \cdot 16 (mv/h)^3 a^3$ in $dN = 16 (a/\lambda)^3$, kjer smo namesto $\frac{4}{3} \pi$ postavili 1 in je λ de Brogliejeva valovna dolžina. Glej npr. I. Supek: Teorijska fizika, s. 318 (op. prev.).

upoštevati nedoločitveno načelo kvantne mehanike, po katerem ne moremo hkrati natančno določiti lege in hitrosti delca. Vsak poskus, pri katerem določimo lego delca, povzroči ustrezno negotovost o njegovi hitrosti. Če bi bil atom v trdni snovi natančno lokaliziran, bi kvantna mehanika zahtevala veliko in po smeri nedoločeno hitrost, torej veliko kinetično energijo. Stanje trdne snovi pri nizki temperaturi je kompromis med učinkovanjem sil, ki poskušajo atome lokalizirati in kinetično energijo, ki nasprotuje temu zaradi nedoločljivega načela. Atomi zato celo pri absolutni ničli nihajo. To ničelno nihanje je tem izrazitejše, čim lažji so atomi in čim šibkejši so sile. Helijevi atomi so zelo lahki in sile med njimi šibke, o čemer priča nizko vrelišče. Zato je ničelno nihanje dovolj izrazito, da prepreči strditev. Helij je kvantna tekočina. Tudi jedrska snov je kvantna tekočina. Jedra namreč nimajo niti ene lastnosti, ki bi bila značilna za trdno snov.

Tekoči helij je najbolj podoben jedrski snovi, toda ne izotop He^4 , ker za atome He^4 ne velja Paulijevo izključitveno načelo. Zelo podoben jedrski snovi je lahki izotop He^3 , za katerega velja Paulijevo načelo. Upoštevati pa moramo razlike v naravi privlačnih sil med atomi in med nukleoni.

Gibanje vsakega nukleona je navzlic močnim silam zaradi izključitvenega načela v glavnem neodvisno od podrobnosti gibanja drugih nukleonov. Pri veliki gostoti so namreč vsa možna stanja z majhno energijo že zasedena. Trk med nukleonoma zato tu ne more povzročiti majhnih sprememb v smereh gibanja kot npr. trk v praznem prostoru, saj bi to privedlo do stanj, ki so že



Sl. 3. Zasedeni (polne črte) in prazni nivoji (črtane črte) v jedru. Navzgor je nanesena energija; W_F je Fermijeva energija

zasedena. Slika 3 shematično kaže možna stanja nukleonov. Vsi nivoji do Fermijeve energije W_F so zasedeni, vsi višji so prazni. Pri trku nukleonov v stanjih b in b' ali c in c' je možen samo prehod v stanji a in a' , kar zahteva povečanje skupne energije. Za stanji b in b' , ki sta tik pod W_F , to povečanje ni zelo veliko, če sta končni stanji tik nad W_F . Toda pri nižje ležečih stanjih c in c' je povečanje energije znatno. Iz tega sledi, da večina trkov med pari nukleonov lahko zmoti gibanje samo ob znatnem povečanju energije. V kvantni mehaniki so za zelo kratek čas možni trki, pri katerih se ne ohrani energija.

Vpliv takih trkov pa je tem manjši, čim večja je razlika energije. Izključitveno načelo torej bistveno zmanjša medsebojno interferenco delca z gibanjem drugih delcev.

Zaradi tega si smemo predstavljati, da se vsak nukleon giblje prosto. Njegova energija je odvisna od okolice kot celote, ne pa od naključnih trkov z drugimi nukleoni. Ta slika se ujema z lupinskim modelom za končna jedra.* Dokler niso upoštevali izključitvenega načela, je bil uspeh lupinskega modela pri opisovanju jeder in njihovih spektrov nerazumljiv. Vsiljuje se misel, da bi pri računu gibanja nukleona upoštevali povprečno polje sil vseh drugih nukleonov, za katere bi vzeli, da se tudi prosto gibljejo. To je Hartree-Fockov približek, ki so ga uspešno uporabili pri elektronih v atomu. Vendar dosledna uporaba tega postopka pri jedru ni možna zaradi odbojnih sil kratkega dosega. Zaradi teh sil je potencialna energija dveh nukleonov, ki sta dovolj blizu, praktično neskončna. Zato se pri resničnem gibanju nukleoni izogibajo drug drugega. Pri hipotetičnem neodvisnem gibanju, ki je osnova Hartree-Fockovega približka, pa pride včasih kaka dvojica nukleonov zelo blizu skupaj. Čeprav se to primeri le redko, je odbojna sila tako močna, da se pokvari povprečje in nastanejo računske težave.

Te težave je prvi obšel K. A. Brueckner. Njegov postopek so pozneje izpopolnili drugi. Izkoristil je dejstvo, da je doseg odbojne sile zelo kratek v primeri s povprečno razdaljo med nukleoni. Če se dva nukleona tako približata, da postane sila odbojna, ni verjetno, da bi v istem trenutku še kak tretji nukleon vplival na njuno gibanje. Zato lahko vzamemo, da se motnja zaradi odbojne sile tiče samo obeh nukleonov, ki sta blizu skupaj. Zato ne predpostavimo kot pri Hartree-Fockovem približku, da se vsak nukleon giblje v povprečnem potencialu drugih, ampak obravnavamo interakcijo dveh nukleonov v sredstvu, s katerim nadomestimo vpliv vseh drugih nukleonov. Z znano interakcijo med prostima nukleonoma lahko po tej poti ob znatnem računskem naporu pridemo do interakcije med nukleonoma v jedrski snovi in s tem do energije jedrske snovi kot funkcije gostote. Interakcijo med prostima nukleonoma so precej podrobno določili s sipanjem nukleonov na nukleonih, čeprav ni rečeno, da novejša, natančnejša merjenja ne bi mogla prinesiti kake spremembe. Dobljeni vrednosti za energijo in gostoto jedrske snovi se dobro ujemata z navedenima eksperimentalnima vrednostma. Če poskušamo ta postopek uporabiti na področju ob površini jedra ali na končna jedra, naletimo na zelo velike težave, tako da še ni zanesljivih računov.

Pri računu specifične toplote lahko vzamemo, da je gibanje nukleonov neodvisno v osnovnem stanju in v vzbujenih stanjih, če energija ni prevelika. Pri tem upoštevamo dejstvo, da se nukleona ne moreta preveč približati s popravkom pri interakciji med prostima nukleonoma. To navede na misel, da je specifična toplota jedrske snovi enaka kot pri ^3He ali pri elektronih v kovini: $W = \frac{1}{2} \gamma T^2$. Koeficienta pa za zdaj še ne znamo izračunati.

Omejitve. Slika 3 kaže, da so prehodi močno ovirani le, če oba nukleona nimata samo malo manjše energije kot W_F . Zaradi tega je navedeni približek neveljaven za majhen del nukleonov z energijo blizu W_F , kar pa ne vpliva na lastnosti jedrske snovi kot celote. Vendar so transportne lastnosti, kot npr. viskoznost, odvisne predvsem od nukleonov z največjo energijo.

* M. Rosina: Lupinski model jedra. Obz. mat. fiz. 10, 13 (1963) (op. prev.).

Možno je, da je jedrska snov superfluidna, kot elektroni v supraprevodni kovini. Podobne podrobnosti so važne za specifično toploto pri zelo nizkih temperaturah. Vendar je podrobna razporeditev nivojev blizu W_F odvisna obenem še od velikosti jeder. Celo najtežja jedra se verjetno preveč razlikujejo od idealne jedrske snovi, da bi tu superfluidnost lahko imela kako praktično posledico.

Literatura

- ¹ L. R. B. Elton: Nuclear Sizes. London (Oxford University Press), 1961; R. Hofstadter, Rev. Mod. Phys. **28**, 214 (1956).
- ² A. H. Wapstra: Handbuch der Physik 38/I. Berlin (Springer), 1958.
- ³ K. J. le Couteur, D. W. Long, Nucl. Phys. **13**, 32 (1959); K. J. le Couteur: Nuclear Reactions. Amsterdam (North Holland Publ. Co.), 1958, s. 318.
- ⁴ M. A. Preston: Physics of the Nucleus. Reading, Mass. (Addison-Wesley), 1962.
- ⁵ K. A. Brueckner v The Many Body Problem. London (Methuen), 1959; K. A. Brueckner v Quantum Mechanics (urednik D. R. Bates), III. New York (Academic Press), 1962, s. 286.

POPRAVEK

V prejšnji številki »Obzornika« se je v članek *Lok kot topološki prostor* (M. Vencelj) vrnilo nekaj tiskarskih napak, ki bistveno spremenijo smisel. Zato jih tukaj objavljamo:

Stran	Vrsta	Pravilno	Namesto
104	7. zg.	$x \in (a, b) \subset A$	$x \in (a, b) \supset A$
104	3. sp.	$A \subset Y$	$A \supset Y$
106	3. zg.	$U_c \cap U_b$	$U_c \cap B_b$
107	24. zg.	$d'(f(x'), f(x)) < \varepsilon$	$d'(f(x'), f(x)) > \varepsilon$
107	26. zg.	$g: A \rightarrow Y$	$g: A \leftarrow Y$
110	21. zg.	$\overline{B}_1$	B_1
110	26. — 27. zg	$\overline{B}_{k-1} = B_{k-1} \cup p_{n_k-1}$	$B_{k-1} = B_{k-1} \cap p_{n_k-1}$
110	15. sp.	$A_n \supset A_{n+1}$	$A_n \subset A_{n+1}$
110	13. sp.	$A = \bigcap A_k$	$A \cap A_k$
110	3. sp.	$B \subset X - p \subset \overline{B} = X$	$B \subset X - p \subset B = X$

PREPROST MODEL JEDRA*

Pri opisu atomskega jedra se moramo zadovoljiti s katerim od modelov: z lupinskim modelom,¹ modelom kapljice,^{1,2} modelom skupkov³ (angl. cluster model, tudi *model delcev α*) ali s katerim drugim. Vsak izmed teh modelov je posebno primeren za opis določene lastnosti jedra. V posameznih primerih dosežejo zelo dobro kvantitativno ujemanje z eksperimentalnimi podatki. Preprost in nazoren model, ki ga je izdelal znani kemijski fizik L. Pauling,⁴ nima takega cilja, a pripomore h kvalitativnemu razumevanju nekaterih lastnosti jeder. Novi model se naslanja na model skupkov, v katerem opišejo jedro kot gručo skupkov, to je lahkih jeder He^4 , He^3 , H^3 , H^2 in *dinevtronov* — dvojic nevtronov, ki proste niso stabilne. Z modelom skupkov so uspešno opisali nekatera stanja lahkih jeder.⁵ Pri tem so v dokaj zahtevnem variacijskem računu upoštevali sile med vsemi nukleoni v jedru in dejstvo, da so vsi protoni med seboj in vsi nevtroni med seboj nerazločljivi. V modelu skupkov so torej skupki samo izhodišče za račun. Paulingu pa je skupek — *sferon* — prava toga kroglica.

Mislimo si jedrsko silo med dvema nukleonoma v jedru razdeljeno v del s kratkim dosegom in v del z dolgim dosegom! Nukleone vežejo v sferone sile kratkega dosega, sile dolgega dosega pa povzročajo dodatne sile med sferoni. Zaradi medsebojnih privlačnih sil so sferoni v jedru gosto naloženi, kot atomi v kristalu, in je vsak sferon obdan s čim večjim številom neposrednih sosedov. Jedro je zato sestavljeno iz plasti sferonov. Od površine jedra navznoter imenujmo te plasti *skorja*, *zunanja sredica* in *notranja sredica*! Najlažja jedra imajo samo skorjo, nekoliko težja skorjo in zunanjo sredico, težka pa vse tri plasti. (Najtežja jedra imajo v sredini še četrto plast.)

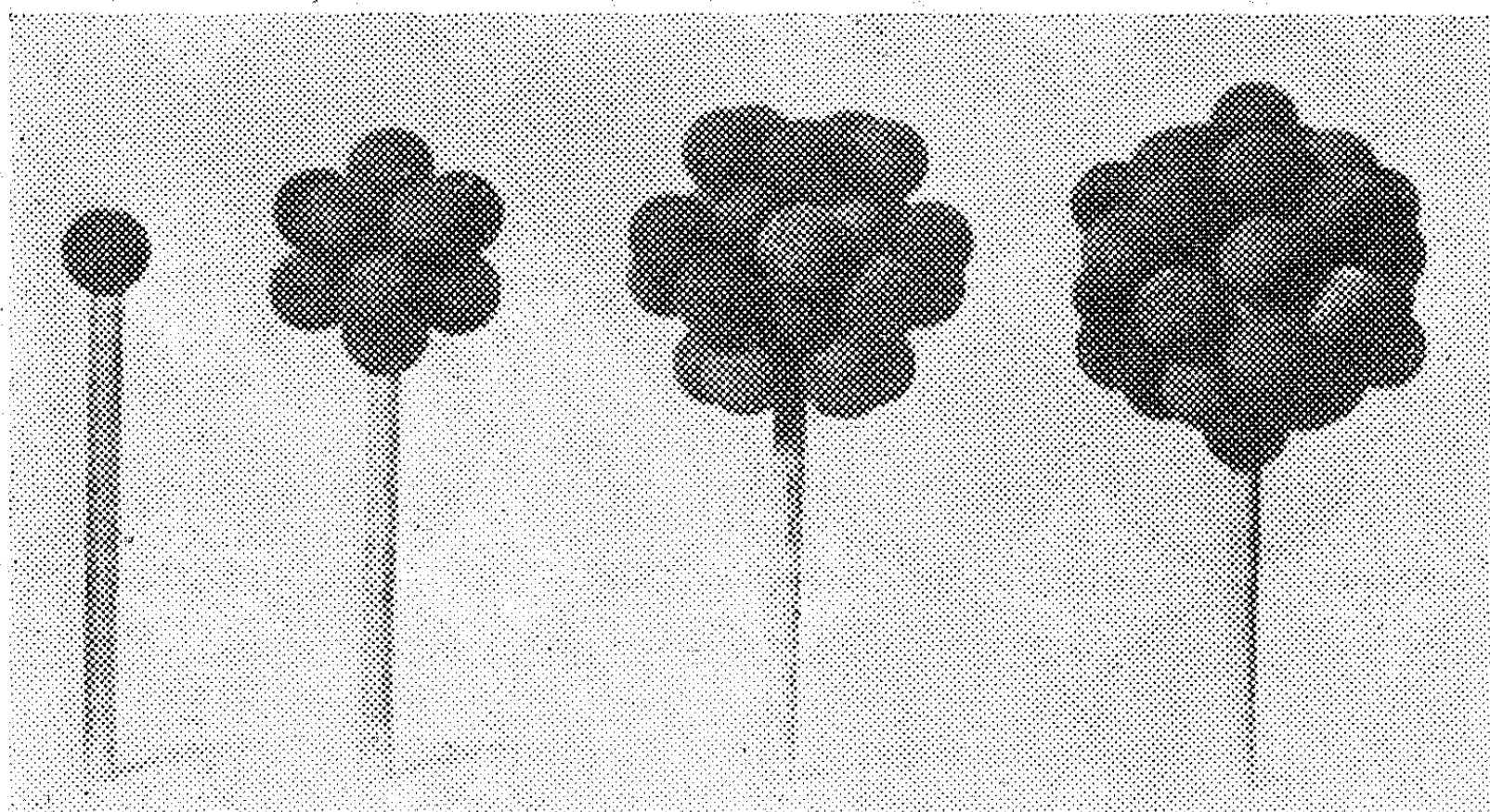
V vsaki od plasti je lahko samo določeno število sferonov. Najgostejši sklad množice kroglic, npr. atomov v kristalu, je dobro znan. Nasprotno pa še niso splošno rešili geometrijskega problema najgostejšega sklada manjšega števila kroglic, npr. sferonov v jedru. Pauling je za sferone v jedru prevzel sklad, ki ga je dognal pri intermetalni spojini $\text{Mg}_{32}(\text{Al}, \text{Zn})_{49}$. Pri tem *ikozaedrskem skladu* je na sredi gruča ena kroglica. Okoli nje je plast 12 kroglic v ogliščih pravilnega ikozaedra. V naslednji bolj zunanji plasti je 32 kroglic: najprej 20 v ogliščih pravilnega dodekaedra in nato še 12 v ogliščih večjega pravilnega ikozaedra. V zunanji plasti je 72 kroglic (sl. 1). Vzemimo, da je efektivna prostornina, ki pride na eno kroglico, konstantna! Tedaj brez težav izpeljemo zvezo

$$n_1^{1/3} = n_0^{1/3} + 1,3 \quad (1)$$

med skupnim številom vseh kroglic n_1 v nekaj izpolnjenih plasteh gruča in med številom kroglic n_0 v gruča brez prejšnje zunanje plasti. Konstanta 1,3 je

* Slike 1, 4, 5 in 6 so z ljubeznivim dovoljenjem uredništva in profesorja Paulinga vzete iz članka L. Pauling: The Close-Packed-Spheron Theory and Nuclear Fission. Science 150, 297 (1965).

v zvezi z efektivno prostornino, ki pride na eno kroglico. Določili so jo tako, da so rezultati enačbe (1) čim bližje ikozaedorskemu skladu: $1, 13 = 12 + 1$, $45 = 13 + 32$, $117 = 45 + 72$. Enačba (1) je le približna in velja na ± 1 natančno. Uporabna naj bo približno tudi v primeru, če na sredi gruče ni ena sama kroglica, ampak več kroglic.



Sl. 1. Ikozaedrski sklad sferonov. V notranji sredici je en sferon (a). V zunanji sredici je 12 sferonov v ogliščih pravilnega ikozaedra (b). Skorjo z 32 sferoni tvori 20 sferonov v ogliščih pravilnega dodekaedra (c) in 12 sferonov v ogliščih večjega ikozaedra (d) (od leve proti desni)

Število sferonov v jedru je odvisno od števila nevtronov N . Če je N sod, je $\frac{1}{2}N$ sferonov, če je lih, je $\frac{1}{2}(N + 1)$ sferonov. Z enačbo (1) določimo razporeditev sferonov na posamezne plasti. Npr. v jedru ${}_{26}\text{Fe}^{52}$ je 12 sferonov v skorji in eden v zunanji sredici; v jedru ${}_{36}\text{Kr}^{86}$ ali jedru ${}_{42}\text{Mo}^{92}$ je 21 sferonov v skorji in 4 v zunanji sredici; v jedru ${}_{56}\text{Ba}^{138}$ ali jedru ${}_{60}\text{Nd}^{142}$ je 31 sferonov v skorji, 9 v zunanji in eden v notranji sredici. Število protonov v jedru Z in liho ali sodo število nevtronov določata, kateri od naštetih sferonov so v jedru in koliko je katerih.

Po drugi strani se sferonski model opira na lupinski model. V lupinskem modelu povemo stanje vsakega posameznega nukleona, označimo ga s kvantnimi števili nl_j .¹ Radialno kvantno število n je v zvezi s številom vozlov n_r radialne valovne funkcije: $n = n_r + 1$. Obhodno kvantno število l določa velikost tirne vrtilne količine; njegove vrednosti 0, 1, 2, 3 ... zaznamujemo s črkami s, p, d, f ... Kvantno število $j = l \pm 1$ določa velikost celotne vrtilne količine. Preostane še magnetno kvantno število m_j , ki meri projekcijo celotne vrtilne količine v neki odlikovani smeri. Nukleoni, ki se ujemajo po nl_j (razločujejo pa se po m_j), pripadajo eni podlupini. Podlupina sprejme največ $2j + 1$ nukleonov. V jedrih se najprej napolnijo podlupine z najnižjo energijo, pri čemer ima za določen l podlupina $l + \frac{1}{2}$ manjšo energijo kot podlupina $l - \frac{1}{2}$.

Zvezo med sferonskim in lupinskim modelom vzpostavi predpostavka: če so v jedru samo nevtroni podlupine z $n = 1$, so ti v skorji; če so v jedru nevtroni dveh podlupin z enakima l_j , so tisti z $n = 2$ v skorji, tisti z $n = 1$ pa v zunanji sredici, če so v jedru nevtroni treh podlupin z enakimi l_j , so tisti z $n = 3$ v skorji, tisti z $n = 2$ v zunanji sredici in tisti z $n = 1$ v notranji sredici. Ta predpostavka je sprejemljiva, saj je pri izbranem l radialna valovna

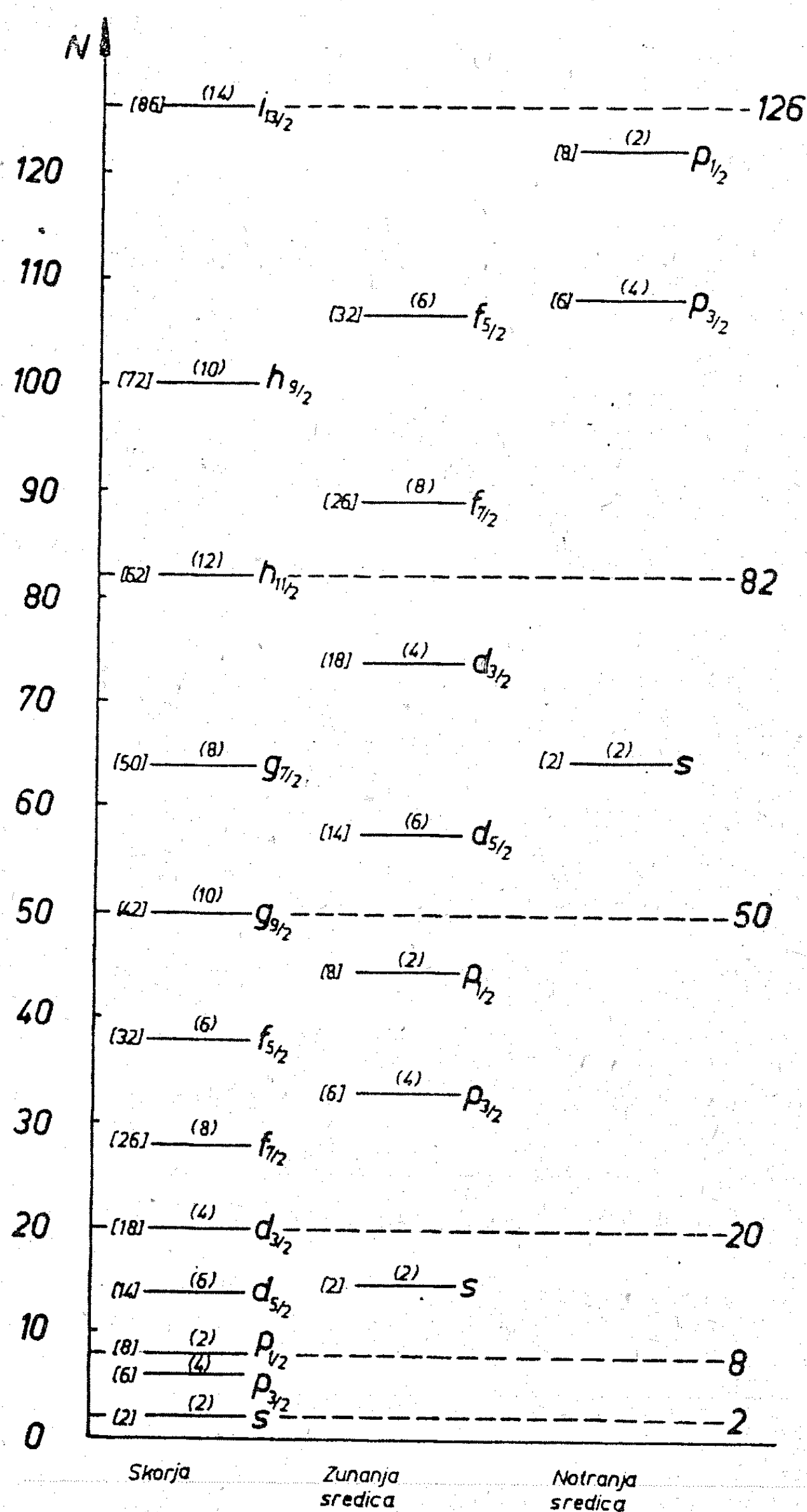
funkcija npr. za $n = 2$ zunaj vozalne ploskve velika in pozitivna, znotraj pa majhna in negativna, medtem ko je znotraj ustrezna valovna funkcija za $n = 1$ velika in pozitivna. Prav enaka predpostavka naj velja za zdaj tudi za protone.

Poskusimo pojasniti še povezavo med valovnimi funkcijami nukleonov v sferonih in valovnimi funkcijami nukleonov v jedru. Za valovne funkcije nukleonov v sferonih je $n = 1$ in $l = 0$ (1s), saj noben sferon nima več kot dva nukleona ene vrste. Te funkcije so mišljene seveda v koordinatnem sistemu z izhodiščem v težišču sferona, medtem ko se valovne funkcije sferonov v jedru nanašajo na koordinatni sistem z izhodiščem v težišču jedra. Vzemimo jedro O^{16} , ki ga sestavljajo štirje delci α . Ti štirje sferoni, ki so kolikor možno blizu skupaj, se namestijo v ogliščih tetraedra.

Če vzporejamo nukleone v jedru z elektroni v atomih, moramo primerjati sferone z zgoščinami v oblaku elektronov v molekuli. Jedro O^{16} spominja tedaj na molekulo metana CH_4 . O tej molekuli je iz teorije kemijske vezi znano tole: Atom ogljika ima v osnovnem stanju šest elektronov: $(1s)^2, (2s)^2, p^2$. Približne valovne funkcije elektronov v molekuli metana dobijo s »hibridizacijo«: najprej vzbudijo enega izmed elektronov $2s$ v stanje p . Potrebno energijo pokrije del vezavne energije. Nato iz štirih valovnih funkcij, ene $2s$ in treh p , sestavijo štiri posebne linearne kombinacije. Kvadrat absolutne vrednosti vsake izmed teh kombinacij ima največjo vrednost v smeri proti enemu izmed oglišč tetraedra, ki ima v središču jedro ogljika. Atomi vodika se namestijo v ogliščih tetraedra, da se valovne funkcije njihovih elektronov kar najbolj prekrivajo z ustreznimi kombinacijami valovnih funkcij štirih elektronov ogljika. S podobnim mešanjem valovnih funkcij nukleonov v jedru O^{16} in v drugih jedrih naj bi prišli približno do valovnih funkcij nukleonov v sferonih, ki so lokalizirani v posameznih plasteh.

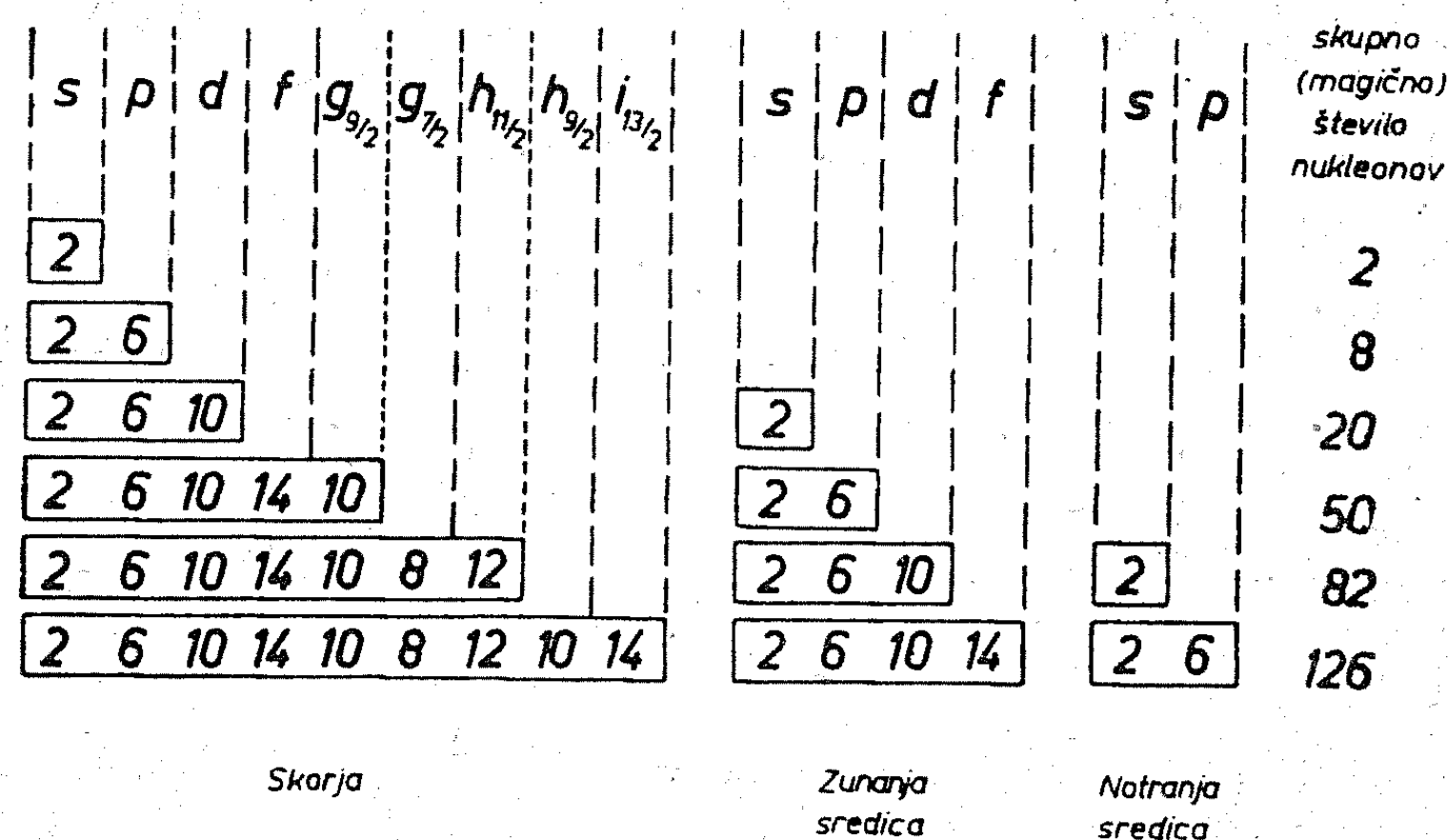
Zavemo se, da je sferonski model zelo grob približek. Vendar z njim začuda dobro okvirno pojasnimo nekatere lastnosti jeder. Z modelom sferonov pridemo do razvrstitve nivojev v lupinskem modelu. Predpostaviti je treba še, da se v posamezni plasti najprej napolni podlupina z manjšim obhodnim kvantnim številom l . Omenili smo že, da se napolni podlupina s kvantnim številom celotne vrtilne količine $j = l + \frac{1}{2}$ prej kot podlupina z $j = l - \frac{1}{2}$. Pokažimo, kako poteka račun za nukleone ene vrste npr. za nevtrone! V skorji sprejmejo posamezni nivoji $s, p_{3/2}, p_{1/2}, d_{5/2} \dots$ po vrsti po 2, 4, 2, 6 ... nevtronov. Skupno število nevtronov v izpolnjenih nižjih nivojih je tedaj 2, 6, 8, 14 ..., čemur ustreza polovično število sferonov 1, 3, 4, 7 ... Po enačbi (1) izračunamo, pri katerem skupnem številu sferonov v skorji se začnejo polniti podlupine $s, p_{3/2}, p_{1/2}, d_{5/2} \dots$ v zunanji sredici. Za n_0 vstavimo po vrsti 1, 3, 4, 7 ... in dobimo za n_1 zaokroženo 2, 12, 21, 24 ... sferonov, to je 4, 24, 41, 48 ... nevtronov. Nivo $p_{3/2}$ v zunanji sredici se npr. začne polniti pri skupnem številu 24 nevtronov v jedru in je do kraja napolnjen, ko se začne polniti naslednji, to je pri 41 nevtronih. Zato postavimo nivo $p_{3/2}$ k srednjemu skupnemu številu $\frac{1}{2}(24 + 41) = 33$ nevtronov. Tako sezidamo razvrstitev nivojev, v kateri so nivoji razporejeni po skupnem številu nevtronov v jedru (sl. 2). Razvrstitev se skoraj natančno ujema z običajno razvrstitvijo nivojev v lupinskem modelu. Dobljena razvrstitev pa ne pove nič o energijskih razmikih med nivoji.

V razvrstitvi izstopajo magična števila 2, 8, 20, 50, 82, 126, ki jih da lupinski model. Pri teh skupnih številih nevtronov so v neki plasti ravno izpolnjene vse podlupine od $l = 0$ do l_{maks} ali pa je v skorji izpolnjena kaka podlupina z danim j . Izpolnjena podlupina z danim l ima $2(2l + 1)$ nukleonov,



Sl. 2. Razvrstitev nivojev lupinskega modela po plasteh v odvisnosti od skupnega števila nevtronov N (ali protonov) v jedru

vse izpolnjene podlupine od $l = 0$ do l_{maks} pa imajo skupno $2(l_{\text{maks}} + 1)^2$ nukleonov. Izpolnjena podlupina j ima $2j + 1$ nukleonov. Magična števila so tedaj sestavljena takole (sl. 3):

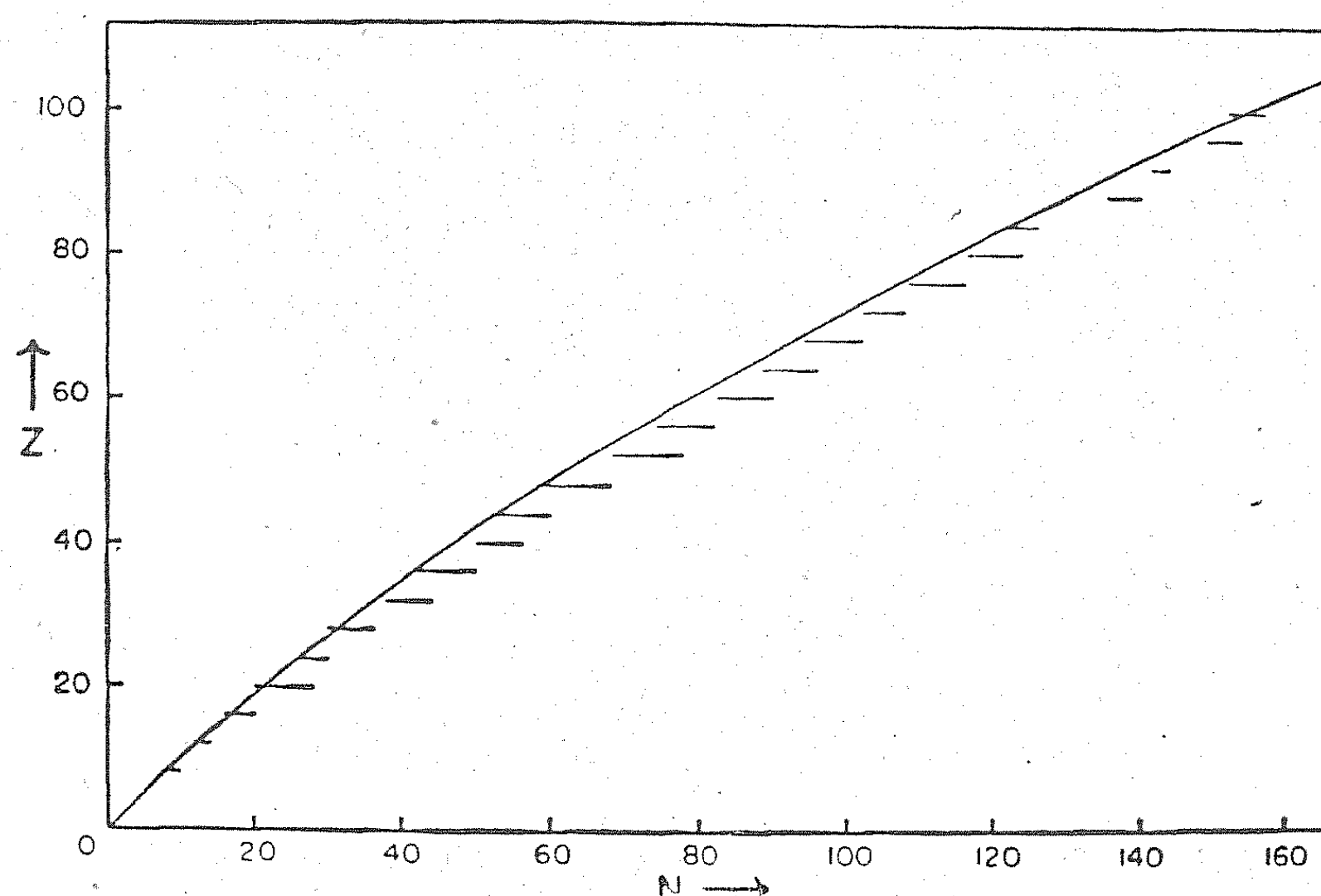


Sl. 3. Sestav plasti v jedrih z magičnim številom nevtronov ali protonov

$$\begin{aligned}
2.1^2 &= 2, \\
2.2^2 &= 8, \\
2.3^2 &+ 2.1^2 = 20, \\
[2.4^2 + (2.\frac{9}{2} + 1)] + 2.2^2 &= 50, \\
[2.5^2 + (2.\frac{11}{2} + 1)] + 2.3^2 + 2.1^2 &= 82, \\
[2.6^2 + (2.\frac{13}{2} + 1)] + 2.4^2 + 2.2^2 &= 126,
\end{aligned}$$

kjer ustrezajo trije stolpci na levi trem plastem sferonov v jedru.

Sferonski model pojasni razmerje med številom nevtronov in številom protonov v stabilnih jedrih. Vse, kar smo ugotovili, velja za nevtrone in za protone, le da je treba pri protonih upoštevati še elektrostatske odbojne sile. Te silijo protone v skorjo jedra. Jedro Ru^{96} ima npr. 52 nevtronov in 44 protonov. Po razvrstitvi nivojev (sl. 2) je v skorji 37 protonov in 44 nevtronov, to je 15 delcev α in 7 tritonov, in v zunanji sredici 7 protonov in 8 nevtronov, to je trije delci α in en triton. Najmanjšo elektrostatsko energijo pa bi imela razvrstitev, pri kateri bi bilo v skorji 22 delcev α in v zunanji sredici 4 dinevtroni. Jedro Ru^{96} je najbrž mešanica obeh navedenih sferonskih stanj. Če bi temu jedru dodali še en proton, pa drugo od navedenih sferonskih stanj ne bi bilo več možno, kajti dodatni proton bi moral v sredico. S tem bi se elektrostatska energija tako povečala, da jedro najbrž ne bi bilo več stabilno. Tako smo določili največje možno število protonov pri 52 nevtronih. Podobno lahko storimo še pri drugih številih nevtronov, npr. pri magičnih številih 2, 8, 20, 50, 82, 126. Največje možno število protonov je tedaj enako številu nevtronov v skorji: 2, 8, 18, 42, 62, 86. Krivulja skozi izračunane točke v diagramu $Z(N)$ se zares dotika žleba stabilnih jeter za sodo število protonov (sl. 4).

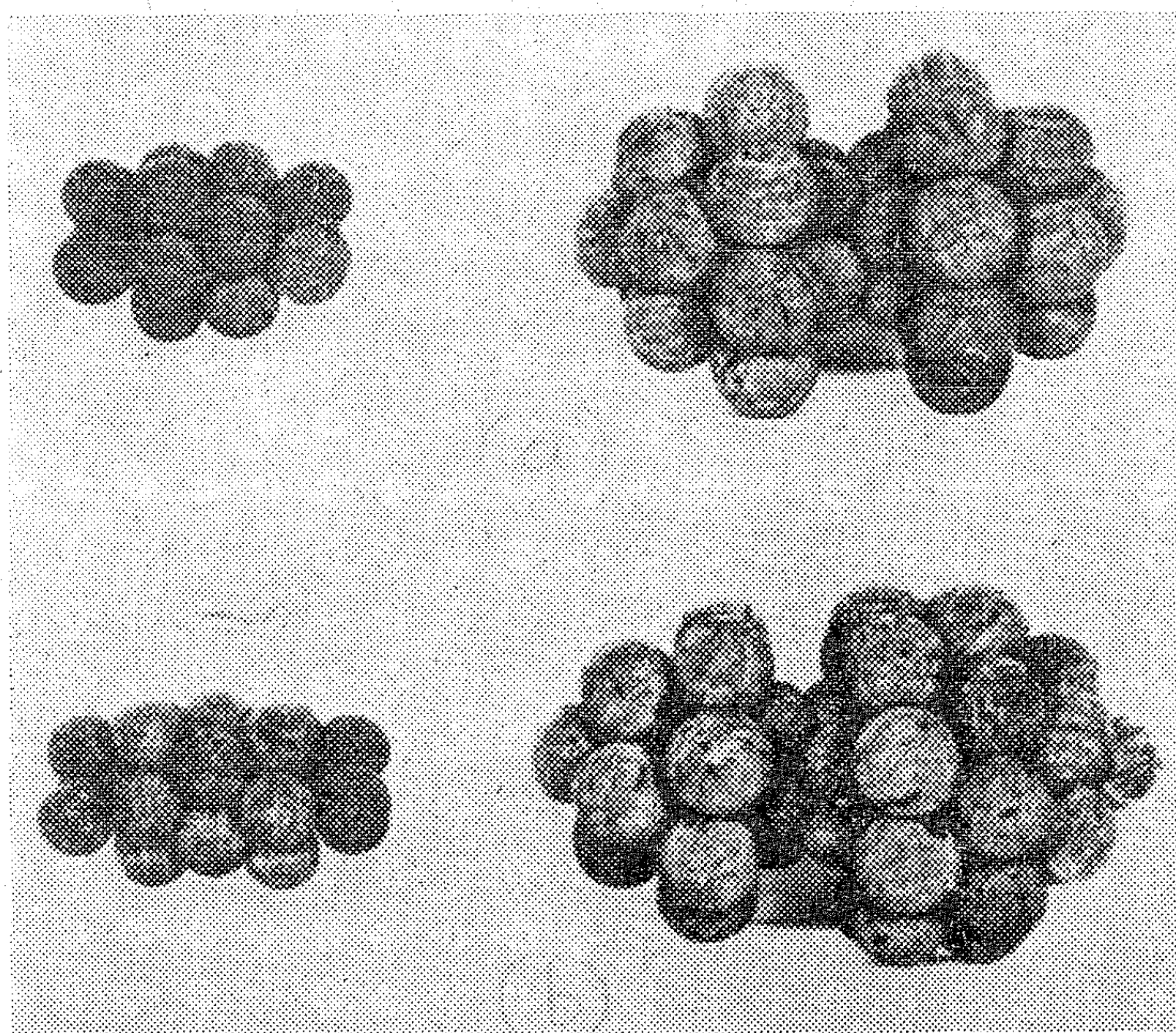


Sl. 4. Zveza med številom protonov Z in številom nevtronov N v nekaterih jedrih s sodim številom protonov. Krivulja je dobljena s predpostavko, da so sferoni v skorji delci α in sferoni v sredici dinevtroni. Vodoravne črtice so narisane med najtežjim in najlažjim stabilnim izotopom, pri težjih elementih pa so z njimi zaznamovani štirje radioaktivni izotopi z najdaljšim razpadnim časom

Ugotovili smo, da se v skorji težjih jeter kopičijo delci α in v sredici dinevtroni. Radij delcev α je vsekakor večji kot radij dinevtronov, zato je pri težjih jedrih skorja debelejša od zunanje ali notranje sredice. To se mora poznati pri konstanti, ki meri efektivno prostornino na sferon, v enačbi (1). Razvrstitev nivojev (sl. 2) je dobljena sicer z vrednostjo 1,3 za nivoje v vseh plasteh. Izjemi sta le nivo $p_{3/2}$ v notranji sredici, pri katerem smo vzeli 1,2 in v isti plasti nivo $p_{1/2}$, pri katerem smo vzeli 1,05.

Sferonski model preprosto pojasni tudi deformacijo težjih jeder. Iz podatkov za kvadrupolne momente in iz drugih podatkov je znano, da imajo sodo—soda jedra z masnimi števili med 150 in 190 obliko podolgovatega rotacijskega elipsoida. Ugotovljeno je, da preide krogelna oblika v elipsoidno nekako pri 90 nevtronih. Tega v sferonskem modelu ni težko pojasniti. Jedro, ki ima v notranji plasti en sferon, je krogelno simetrično. Težje jedro z dvema sferonoma v notranji plasti pa je elipsoidno. Pri ikozaedrskega skladu je v notranji sredici 1 sferon, v zunanji sredici 12 sferonov in v skorji 32 sferonov, če jedro nima več kot 45 sferonov, to je 88 ali 90 nevtronov. Sferon, ki ga dodamo takemu jedru, pride v notranjo sredico in napravi jedro elipsoidno. To se pri meri torej zares pri prehodu od 90 k 92 nevtronom.

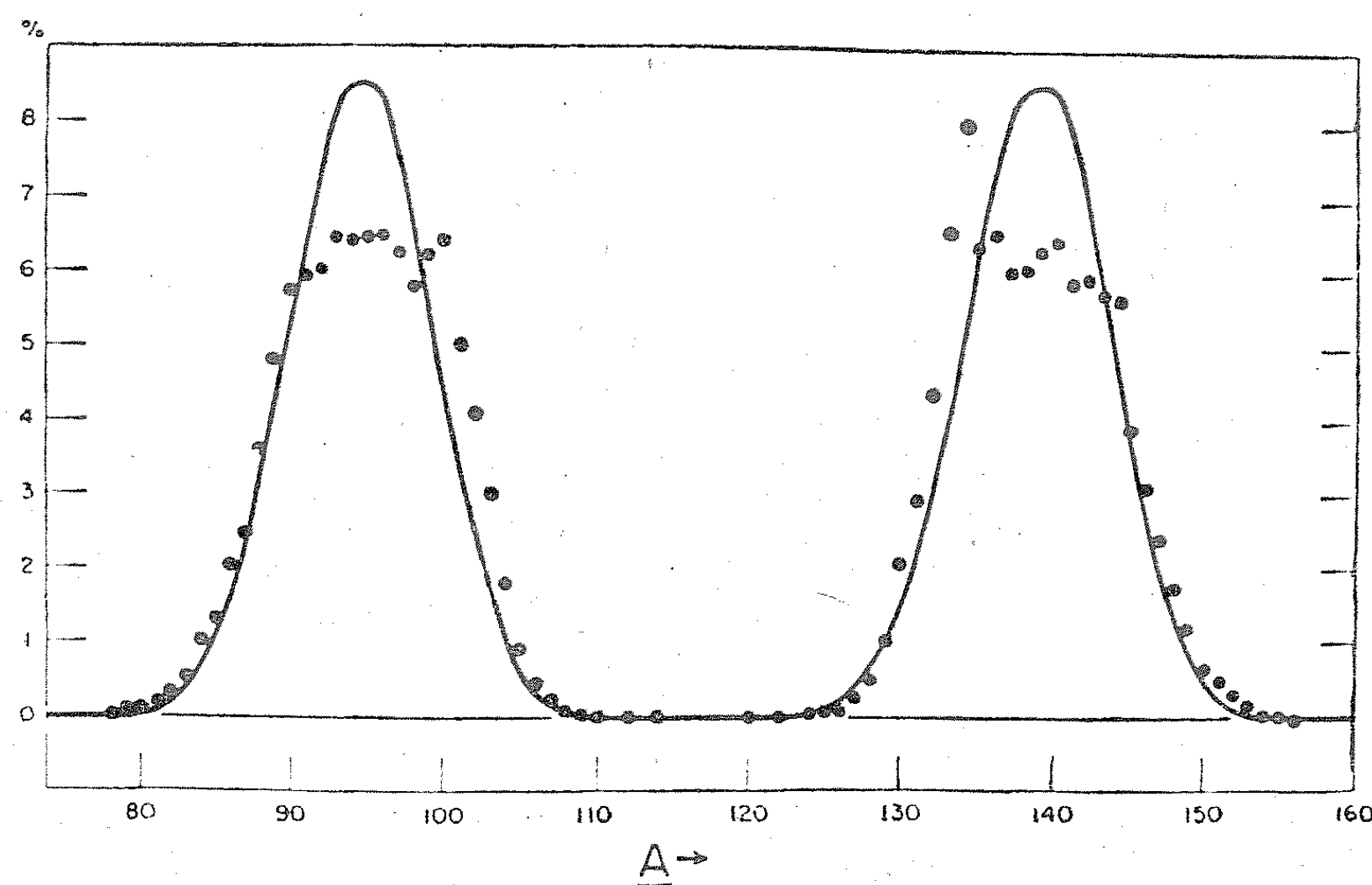
Sferonski model prav preprosto pojasni simetrično in asimetrično cepitev težkih jeder. To so do zdaj delno zadovoljivo pojasnili samo še v modelu skupkov.⁶ Jedra okoli Pb^{208} se po obstreljevanju s hitrimi delci, npr. z devteroni z energijo 20 MeV, razcepijo pretežno v dva enako težka dela. V porazdelitvi pogostosti cepitve po masnem številu enega od razcepkov je simetričen vrh z razpolovno širino od 8 do 15 masnih enot. Sferonski model pojasni to takole: Jedra okoli Pb^{208} so prvotno krogelna. Ko jih zadene hitri delec, začnejo nihati in med nihanjem dosežejo podolgovato elipsoidno obliko. Prvotno je sredica jedra s 16 sferoni v zunanji in 4 v notranji sredici skoraj kroglasta. Med nihanjem pa postane podolgovata: v notranji sredici so tedaj trije sferoni v eni črti, v zunanji sredici pa je 16 sferonov, ki ovijajo prvo trojico z obroči po 3, 5, 5, 3 sferoni (sl. 5 a). Taka razporeditev ima simetrijsko ravnino med obročema



Sl. 5. Deformirana sredica (levo) in jedro tik pred cepitvijo (desno) za simetrično (a, zgoraj) in asimetrično (b, spodaj) cepitev. Razmerje med radijema sferonov v skorji in sferonov v sredici je na sliki pretirano veliko

s po petimi sferoni. Pri cepitvi se zunanja sredica prekine ravno po simetrijski ravnini. Sferoni iz skorje in sferon iz notranje sredice ob simetrijski ravnini se po naključju pridružijo prvemu ali drugemu razcepku. S tem je pojasnjeno, zakaj je cepitev simetrična in zakaj ima vrh v porazdelitvi pogostosti cepitve razpolovno širino 8 do 15 masnih enot.

Drugače je pri najtežjih jedrih. Jedro U^{235} se po zajetju počasnega nevtrona razcepi pretežno v dva neenaka dela. Jedro U^{236} je že spočetka deformirano. Med nihanjem pa se deformira še bolj, tako da so tedaj v notranji sredici 4 sferoni v črti in v zunanji sredici obroči s po 3, 5, 5, 5, 3 sferoni (sl. 5 b). Pri tem pa simetrijska ravnina ne poteka med dvema obročema. Pri cepitvi se zunanja sredica prekine med dvema obročema s po petimi sferoni, sferoni v skorji ob simetrijski ravnini pa se po naključju pridružijo prvemu ali drugemu razcepku. Taka cepitev je asimetrična. Porazdelitev pogostosti po masi enega razcepka ima značilno dvogrbo obliko. Rezultat preprostega računa v sferonskem modelu se kar dobro sklada z eksperimentalnimi podatki (sl. 6).



Sl. 6. Eksperimentalni podatki (točke) in s sferonskim modelom izračunana krivulja za porazdelitev pogostosti cepitve U^{235} po masnem številu A enega izmed razcepkov. Krivulja je dobljena ob predpostavki, da velja za porazdelitev sferonov iz skorje in notranje sredice na oba razcepka binomska porazdelitev (ki so jo lahko aproksimirali kar s Poissonovo porazdelitvijo)

J. Strnad

L i t e r a t u r a

- ¹ M. Rosina: Lupinski model jedra. *Obz. mat. fiz.* **10**, 13 (1963).
- ² R. E. Peierls: Jedrska snov — prevod. *Obz. mat. fiz.* **12**, 166 (1966).
- ³ K. Wildermuth, Th. Kanellopoulos: The Cluster Model of the Atomic Nuclei. *Nuclear Physics* **7**, 150 (1958).
- ⁴ L. Pauling: Structural Significance of the Principal Quantum Number of Nucleonic Orbital Wave Functions. *Phys. Rev. Letters* **15**, 499 (1965); The Close-Packed-Spheron Model of Atomic Nuclei and its Relation to the Shell-Model. *Proc. U. S. Nat. Acad. Sci.* **54**, 989 (1965); Structural Basis of Neutron and Proton Magic Numbers in Atomic Nuclei. *Nature* **208**, 174 (1965); Structural Basis of the Onset of Nuclear Deformation at Neutron Number 90. *Phys. Rev. Letters* **15**, 868 (1965); The Close-Packed-Spheron Theory and Nuclear Fission. *Science* **150**, 297 (1965).
- ⁵ Npr. L. D. Pearlstein, Y. C. Tang, K. Wildermuth: Nuclear Levels in He^5 and Li^5 . *Phys. Rev.* **120**, 224 (1960).
- ⁶ H. Faissner, K. Wildermuth: Cluster Model of Nuclear Fission. *Nuclear Physics* **58**, 177 (1964).

NOV SPEKTROMETER ZA VZBUJENA STANJA MEZONOV

V prvih desetletjih tega stoletja se je razvila atomska spektroskopija. Črtasti optični in rentgenski spektri so pokazali, da imajo atomi in molekule stanja s točno določenimi energijami. Kvantna stanja atoma z njihovimi energijami in kvantnimi števili imenujemo spekter atoma. Atomi in molekule imajo do ionizacijske energije črtast spekter, nad njo pa zvezen spekter. S proučevanjem atomskih spektrov so prišli do naslednjih dognanj: 1. atom je sestavljen iz jedra in elektronov, 2. gibanja elektronov okrog jedra ne moremo opisati klasično, temveč moramo uporabiti kvantno mehaniko. Študij atomskih spektrov je torej bistveno prispeval k odkritju zakonov gibanja v svetu majhnih delcev — k odkritju kvantne mehanike, 3. med jedrom in elektroni delujejo enake elektromagnetne sile, kot jih poznamo v makroskopskem svetu, 4. ker so atomi in molekule sistemi več teles, so njihovi spektri zelo pestri. Odkrivanje in razlaga njihovih lastnosti prispeva k razumevanju problema več teles v atomskih pogojih.

Zadnji desetletji sta doba jedrske spektroskopije. Tudi jedra so sistemi več teles (protonov in nevtronov) s črtastim spektrom vzbujenih stanj in s pestrimi lastnostmi problema več teles. Za razliko od atomske spektroskopije, kjer so poznali sile in iskali zakone gibanja, pa pri jedrski spektroskopiji že poznamo zakone gibanja (kvantno mehaniko) in iščemo lastnosti jedrskih sil. Pri sistemih 2 do 4 nukleonov v glavnem proučujejo jedrske sile, pri jedrih z več kot petimi nukleoni pa zanimive lastnosti problema več teles.

V zadnjih letih se je razvila še tretja spektroskopija — spektroskopija osnovnih delcev. Izkazalo se je, da imajo tudi osnovni delci črtast spekter vzbujenih stanj. Odkrili so že več simetrij, ki jih imajo spektri mezonov in barionov ter našli nekaj povezav med statičnimi in dinamičnimi lastnostmi posameznih stanj (npr. med mirovnimi energijami, verjetnostmi za razpade in reakcije itd.). Vendar za razliko od atomske in jedrske spektroskopije pri osnovnih delcih še ne poznamo njihovih gradnikov niti sil med njimi niti zakonov gibanja za tako majhne in močno povezane delce.

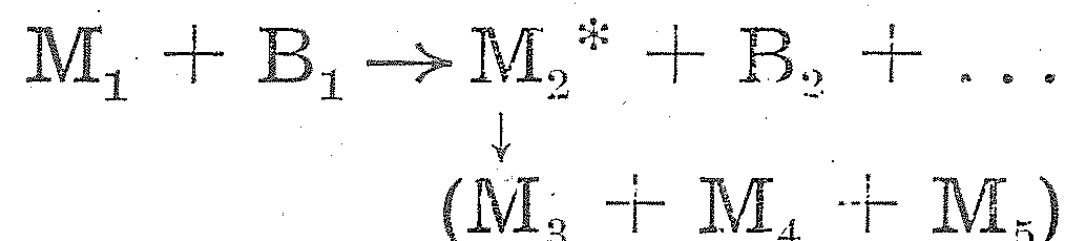
Ena od ovir pri iskanju teorije osnovnih delcev je dejstvo, da poznamo zaenkrat le razmeroma malo vzbujenih stanj mezonov in barionov. Delno poznavanje spektrov včasih lahko samo zavede teoretika; želeli bi imeti sistematski pregled čez komplet spekter osnovnih delcev. Zato iščejo eksperimentalni fiziki nove metode za odkrivanje vzbujenih stanj mezonov in barionov. Skupini visokoenergijskih fizikov pri CERN je nedavno uspelo skonstruirati nov spektrometer za vzbujene mezone,^{1,2} od katerega si obetajo precej boljšo ločljivost in statistično natančnost, kot jo imajo dosedanje metode.

Vzbujena stanja mezonov in barionov so zelo kratkoživa (razpadni čas je 10^{-21} do 10^{-24} s). Njihova sled v fotografski emulziji ali v mehurni celici je prekratka, da bi jih z njo lahko identificirali in jim določili mirovno energijo (maso), kot napravijo to z dolgoživimi delci. Potrebne so druge metode.

Prva metoda je opazovanje resonanc³ pri preseku za sipanje in reakcije tipe $M_1 + B_1 \rightarrow B^* \rightarrow M_2 + B_2$, kjer so M mezoni in B barioni. Lega resonance pove mirovno energijo (maso) vmesnega (vzbujenega) bariona, širina pa njegov razpadni čas. Ta metoda je uporabna samo za vzbujena stanja barionov. Da bi

dobili vzbujen mezon, bi morali namreč streljati z mezonom v mezon,* pa na žalost nimamo tarč iz mezonov. Tudi vseh barionskih resonanc ne moremo dobiti na ta način, ker ima ta tipa reakcije včasih premajhen presek, včasih jo prepovedujejo ohranitveni zakoni, včasih (zlasti pri višjih energijah) pa nastane v vmesnem stanju še en ali več delcev in vmesno stanje nima več točno določene energije.

Pri drugi metodi^{3, 4} opazujemo razpadne produkte vmesnega delca (vzbujenega mezona ali bariona), npr.



Izmeriti moramo gibalne količine in energije delcev M_1 , M_2 in M_3 , iz česar potem lahko izračunamo mirovno energijo te trojice (to je energijo v njihovem težiščnem sistemu), ki je enaka mirovni energiji mezona M_2^* . Kot vidimo, sme pri tej metodi nastati v vmesnem stanju več delcev in zato ni težav z ohranitvenimi zakoni ter lahko opazujemo vzbujene mezone in barione. S to metodo so doslej odkrili veliko vzbujenih mezonov in barionov. Metoda pa ima tudi svoje slabosti.

1. Pri visokih energijah nastane kot končen produkt reakcije veliko število mezonov in moramo uganiti, kateri trije spadajo skupaj. Pri 7 končnih mezonih je npr. 35 kombinacij za trojice in od teh je kvečjemu ena »prava«. Ozadje (»šum«) je torej ogromno. 2. Sledi nevtralnih delcev ne vidimo. Če nastane na koncu en nevtralen delec, to še ni hudo, saj lahko njegovo gibalno količino in energijo določimo z zakonom o ohranitvi gibalne količine in energije, če le poznamo ti količini za vse ostale delce. Često pa nastane več nevtralnih delcev in ne moremo več določiti mirovne energije vzbujenega delca. 3. Eksperimentalno je težko določiti, kateri delci so nastali ob razpadu, kar vnese negotovost v rezultat. 4. Pri vsakem dogodku je treba izmeriti veliko energij in kotov, zaradi česar se nakopičijo napake pri računu mirovne energije vzbujenega delca.

Tretja metoda, ki so jo nedavno uporabili v CERN, se razlikuje od druge v tem, da pri reakciji $M_1 + B_2 \rightarrow M_3^* + B_4$ ne opazujemo razpadnih produktov kratkoživega mezona M_3 , temveč izmerimo gibalno količino in energijo stabilnega (ali dolgoživega) bariona B_4 . Če poznamo ti količini še za začetna delca, lahko z ohranitvenimi zakoni izračunamo gibalno količino in energijo vzbujenega mezona M_3 , iz česar dobimo njegovo maso (mirovno energijo):

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 & p_3^2 &= p_1^2 + p_4^2 - 2 p_1 p_4 \cos \vartheta, \\ W_1 + W_2 &= W_3 + W_4 & W_3^2 &= (W_1 + W_2 - W_4)^2, \\ & & (m_3 c^2)^2 &= W_3^2 - (p_3 c)^2 \end{aligned}$$

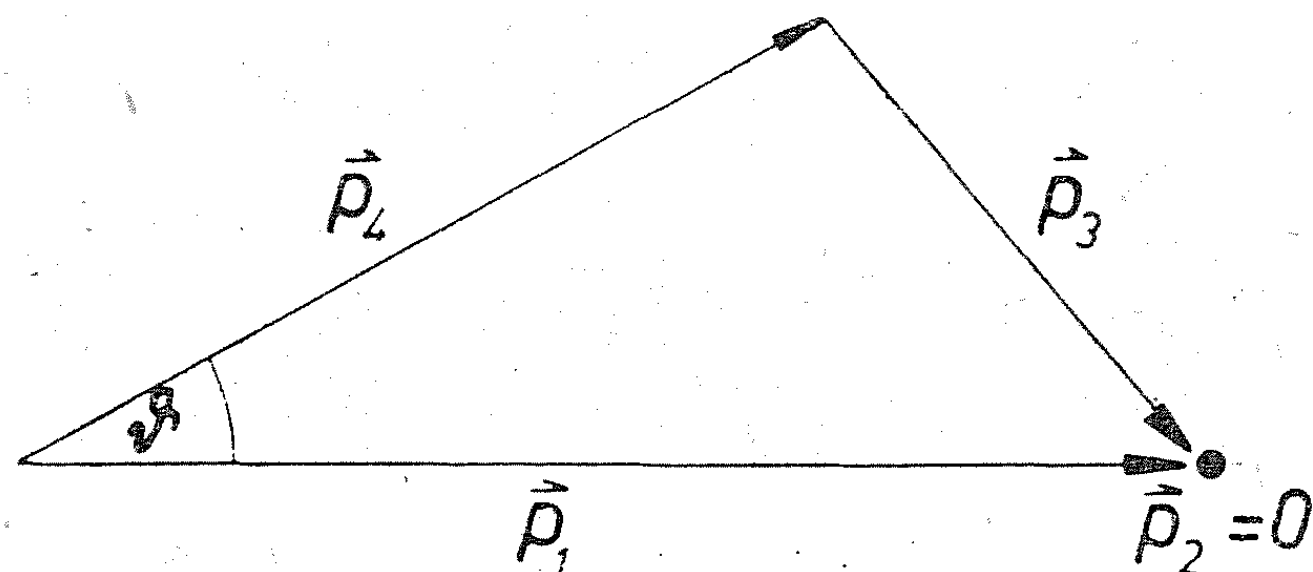
Pri tem je W celotna energija delcev (to je vsota kinetične in mirovne energije) in veljajo formule tudi pri relativističnih hitrostih.

Če narišemo v diagramu število dogodkov v odvisnosti od mase m_3 , dobimo ostre vrhove pri masah raznih vzbujenih mezonov M_3^* . Ti vrhovi so superponirani na gladko krivuljo zaradi konkurenčnih reakcij, pri katerih nastane namesto mezona M_3^* več mezonov direktno: $M_1 + B_2 \rightarrow M_a + M_b +$

* Tudi pri obstreljevanju barionov z antibarioni bi bilo možno opazovati vzbujene mezone, vendar zaradi težavnosti eksperimenta do zdaj še niso opazili resonanc pri sipanju antiprotona na protonu ipd.

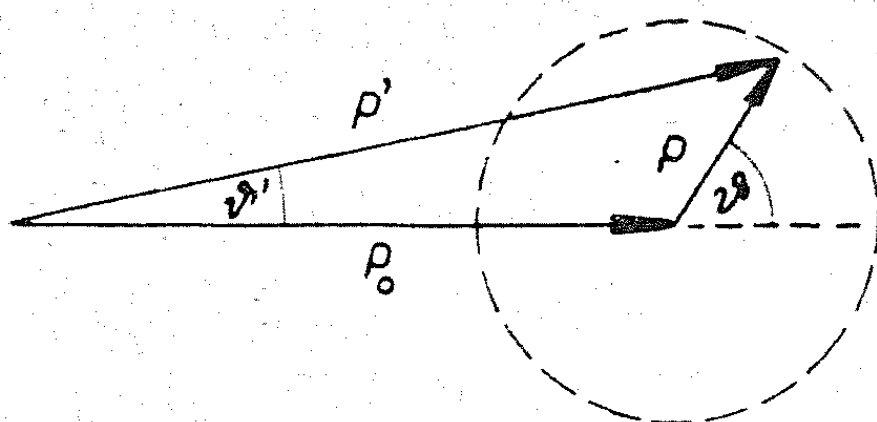
$+ \dots + B_4$; mirovna masa skupine več neodvisnih delcev ima namreč lahko precej poljubno vrednost.

Novost spektrometra CERN je v tem, da ni treba hkrati meriti smeri in velikosti gibalne količine barionov B_4 , temveč zadošča njihova kotna porazdelitev, kar zelo poenostavi meritev. Zaradi enostavnosti si oglejmo ta zanimivi princip nerelativistično! Relativistična izpeljava da podoben rezultat.



Slika 1

Najprej si oglejmo transformacijo pri prehodu iz težiščnega sistema v laboratorijski! Ta ima glavno »zaslugo« za enostavnost nove spektrometrške metode. Težiščni sistem je inercialni sistem, ki se giblje skupaj s težiščem obeh delcev, medtem ko v laboratorijskem sistemu miruje tarča (delce B_2). V težiščnem sistemu označimo gibalno količino opazovanega delca B_4 s p , kot med smerjo njegovega gibanja in smerjo projektila M_1 pa s ϑ ; v laboratorijskem sistemu označimo ti količini s p' in ϑ' . Potem velja zveza $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{p}_0$, kjer je $\mathbf{p}_0 = m_4 \mathbf{v}_{\text{težišča}} = m_4 \mathbf{p}_1 / (m_1 + m_2)$.



Slika 2

Gibalna količina p v težiščnem sistemu ima isto velikost v vseh smereh ϑ , medtem ko je v laboratorijskem sistemu p' odvisen od ϑ (oz. ϑ'). Če kot ϑ večamo od 0 do π , se vrh vektorja $\mathbf{p}$ giblje po krogu; kot ϑ' pri tem nekaj časa narašča do vrednosti $\sin \vartheta'_{\text{max}} = p/p_0$, nato pa spet pada proti 0.

V okolici ϑ'_{max} ustreza velikemu kotnemu intervalu $\Delta\vartheta$ zelo majhen interval $\Delta\vartheta'$ in se zato v laboratorijskem sistemu pri ϑ'_{max} število dogodkov zelo nakopiči; v kotni porazdelitvi dobimo oster vrh, čeprav je bila v težiščnem sistemu kotna porazdelitev gladka funkcija.

To lahko izpeljemo tudi eksplicitno. Iz slike 2 sledita naslednji zvezi:

$$p^2 = p_0^2 + p'^2 - 2 p_0 p' \cos \vartheta'$$

$$p'^2 = p_0^2 + p^2 + 2 p_0 p \cos \vartheta$$

Če enačbi odvajamo, dobimo:

$$0 = 2 p' dp' - 2 p_0 \cos \vartheta' dp' - 2 p_0 p' d \cos \vartheta'$$

$$2 p' dp' = 2 p_0 p d \cos \vartheta.$$

Eliminirajmo diferencial dp !

$$d \cos \vartheta / d \cos \vartheta' = (p'/p) / (1 - p_0 \cos \vartheta'/p').$$

Kotna porazdelitev v laboratorijskem sistemu je potem:

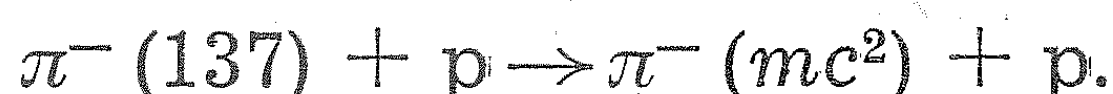
$$dn/d\cos\vartheta' = (dn/d\cos\vartheta)(d\cos\vartheta/d\cos\vartheta') = (dn/d\cos\vartheta)(p'/p)/(1 - p_0 \cos\vartheta'/p')$$

Kot se zlahka prepričamo, ima pri $\vartheta' = \vartheta'_{\max}$ imenovalec v zadnjem izrazu vrednost 0 in porazdelitev vrednost ∞ , to je oster vrh. Transformacijska funkcija iz težiščnega v laboratorijski sistem (Jacobijeva determinanta) ima torej pri $\vartheta'_{\max}$ konico.

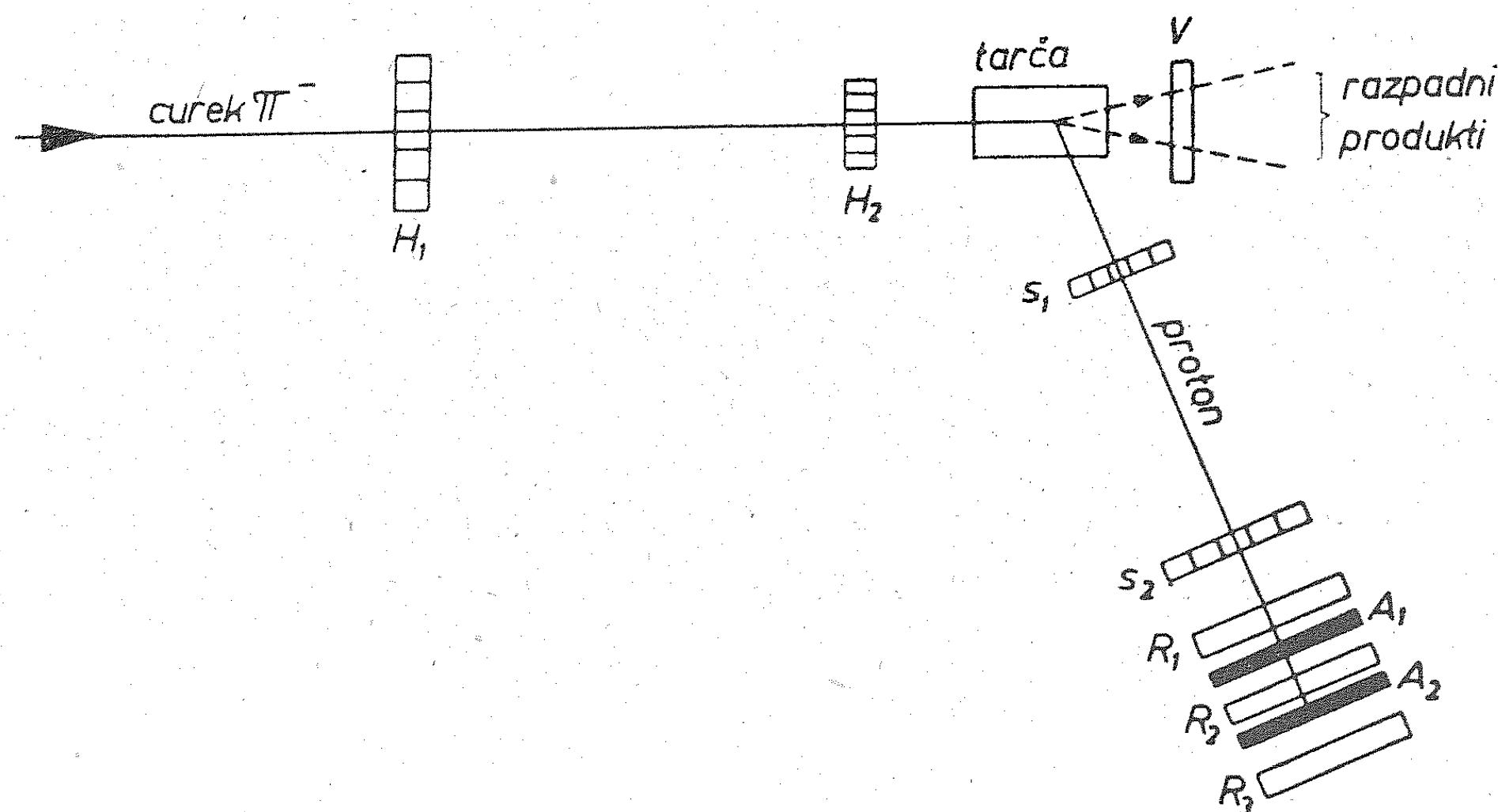
Vrednost kota $\vartheta'_{\max}$ je pri danem p enolično odvisna od mase mezona M_3^* , tako da dobimo za različne mezone M_3^* različne kote $\vartheta'_{\max}$ in s tem različne konice v kotni porazdelitvi. Konkurenčne reakcije (2) pa nimajo določene mase m_3 in zato prispevajo h kotni porazdelitvi le gladko ozadje brez konic.

Konice v kotni porazdelitvi barionov B_4 v laboratorijskem sistemu dajo torej direktno spekter vzbujenih mezonov M_3^* , samo preračunati moramo še skalo iz $\vartheta'_{\max}$ v m_3 . Zaradi nenatančnosti aparature konice seveda niso popolnoma ostre. Ločljivost aparature ($\Delta m_3 c^2$) je zaenkrat ± 15 MeV in še ni dosti boljša kot pri drugih metodah, nameravajo pa jo izboljšati na ± 5 MeV.

Opis meritve. Spektrometer je skonstruiran za negativne mezone s čudnostjo 0, ki nastanejo pri reakciji*



Spektrometer mora izvršiti naslednje naloge: 1. Skozi vhod mora spustiti samo pione z znano gibalno količino. To doseže z odklonom v magnetnem polju, pri čemer izbere 99,3 % čist curek pionov z gibalno količino določeno na 1 % natančno.



Sl. 3. Shematska slika spektrometra. H_1 , H_2 teleskopska števca za pione, S_1 , S_2 teleskopska števca za protone in obenem števca za merjenje časa preleta protona, R_1 , R_2 , R_3 števci za merjenje dosega protona, A_1 , A_2 absorberja, V števec za razpadne produkte vzbujenega mezona

2. Izmeriti mora kot ϑ' med vstopajočim pionom in izbitim protonom. Približno je ta kot določen s smerjo osi vstopnega in izstopnega teleskopa (sistema števcev). Za natančnejšo meritev pa je sistem (»matrika«) števcev na dveh mestih pionskega tira in na dveh mestih protonskega tira. Na vsakem mestu aktivira delec samo en števec in s tem označi koordinate, kjer je letel na tisti točki tira. Računski stroj potem izračuna smer piona in smer protona ter kot ϑ' .

3. Preveriti mora, če odleti skozi izhodni teleskop res proton. To napravi na dva načina. Proton aktivira na dveh mestih svojega tira po en števec in

* Za mezone je uporabljeno novo poimenovanje⁵; mc^2 je mirovna energija vzbujenega mezcna.

elektronska naprava izmeri čas preleta; računski stroj primerja izmerjeni čas preleta s pričakovanim. Poleg tega izmerijo tudi doseg protona: na koncu teleskopa so drug za drugim trije števci, med njimi pa absorberji. Debeline absorberjev so izbrane tako, da pride proton skozi prva dva, do tretjega pa ne pride več. Na ta način izločijo delce, ki bi aktivirali samo prvi števec ali pa vse tri.

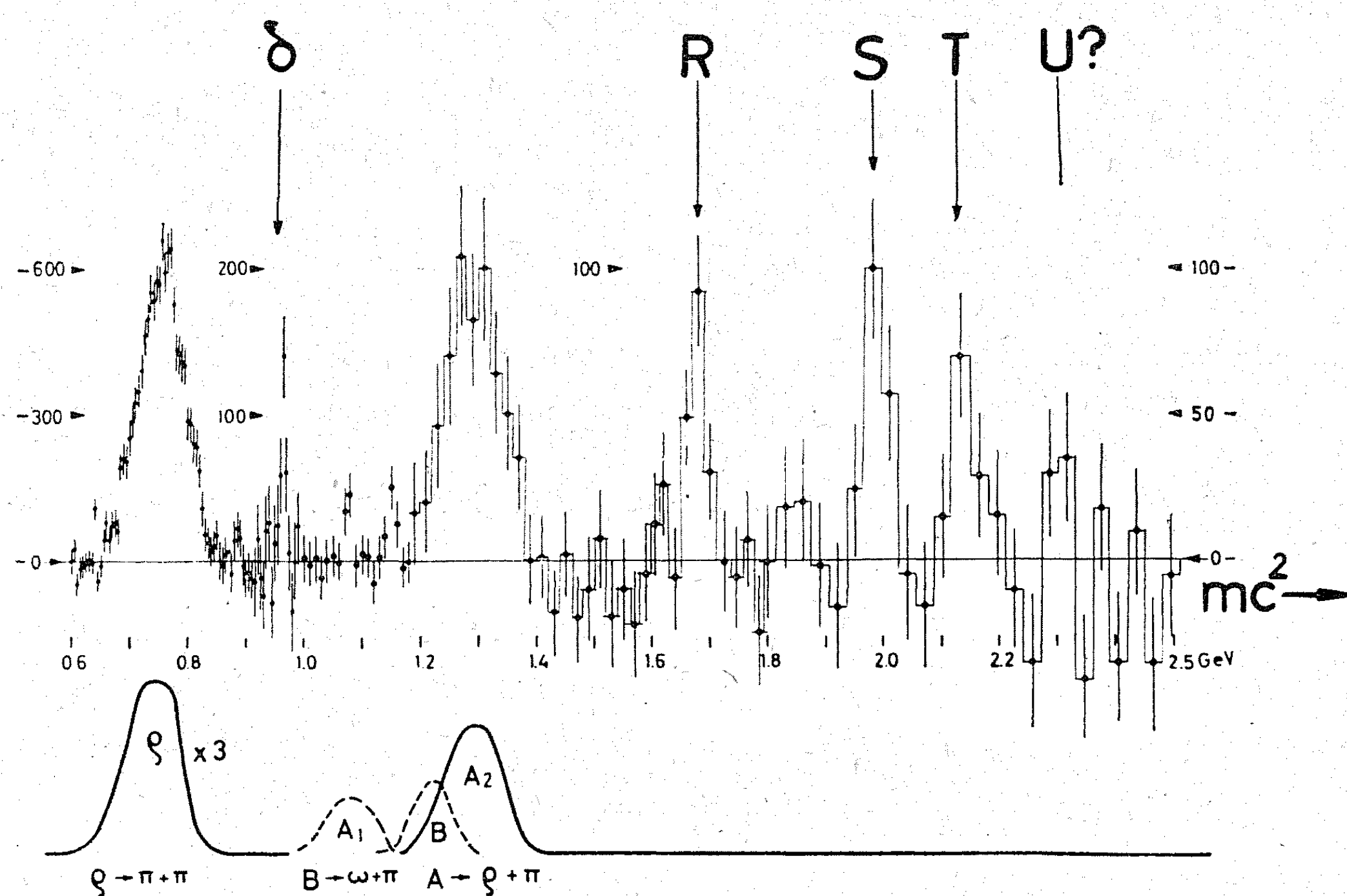
4. Izmeriti mora tudi gibalno količino protona. To sicer pri opisani metodi ni potreben podatek, vendar nam lahko služi za preskus, če opazujemo resnične ali lažne dogodke. Gibalno količino izmeri s časom preleta, omenjenim v prejšnjem odstavku.

5. Blizu tarče je sistem števecv, ki ugotovi, na koliko nabitih delcev je razpadel vzbujeni mezon. Ta meritev pove nekaj o razpadu mezona $\pi^- (mc^2)$, obenem pa služi za preskus.

6. Zelo važen preskus, ali so konice v izmerjenem spektru prave ali lažne, je naslednji: meritev ponovijo pri raznih energijah vstopajočih pionov. Če so vrhovi pravi, se v kotni porazdelitvi premaknejo za ustrezen kot (pri spremembi p za $1 \text{ GeV}/c$ se premakne $\vartheta'_{\max}$ za okrog 3°); lažni vrhovi pa pri novi meritvi bodisi izginejo bodisi ostanejo na mestu ali se premaknejo za neustrezen kot.

Vse podatke iz števecv računski stroj sproti preračuna. Rezultate poda kar v obliki histograma: število dogodkov kot funkcija mase vzbujenega mezona. Računski stroj sporoča eksperimentatorjem tudi vse nepričakovane dogodke (dogodke, ki sprožijo nepričakovano zaporedje sunkov v števcih). Če se kak nepričakovan dogodek večkrat ponavlja, so eksperimentatorji opozorjeni na morebitno napako ali okvaro.

Pri opisanem poskusu je bila hitrost štetja okrog 5000 dogodkov na uro. Računski stroj je uspel sprejeti in obdelati sproti le četrtno dogodkov, ostale so posneli na magnetni trak.



Sl. 4. Spekter mezona $\pi^- (mc^2)$ v območju mc^2 od 0,6 do 2,5 GeV. Na abscisno os je naneseana mirovna energija mezona mc^2 v GeV, na ordinatno os pa število izmerjenih dogodkov v intervalih 5 MeV (levi del diagrama), 10 MeV, 20 MeV (sredina) ali 30 MeV (desni del diagrama). Od diagrama je že odšteta gladka krivulja (»ozadje«) zaradi konkurenčnih reakcij. Spodnji del diagrama kaže vzbujena stanja mezona π^- , ki so jih poznali pred opisano meritvijo

Rezultati prvih meritev. Pri prvih meritvah so izmerili spekter mezona $\pi^- (mc^2)$ v območju do 1,4 GeV. V spektru so našli znane mezone $\pi^- (750)$ (mezon ρ), $\pi^- (1080)$ (mezon A_1) in $\pi^- (1290)$ (mezon A_2). Poleg tega so našli nov mezon $\pi^- (962)$, ki ima zelo majhno širino ($\Gamma < 5$ MeV) in so ga imenovali* mezon δ . Njegova mirovna energija je zelo blizu mirovni energiji znanega nevtralnega mezona $X^0 (957 \text{ MeV})$, ki so ga opazili leta 1964 kot resonanco delcev $\eta^0 \pi^+ \pi^-$ in za katerega so doslej menili, da ima izospin 0. Tudi mezon X^0 ima zelo ozko širino. Ta podobnost in bližina mirovnih energij vzbuja sum, da ima morda mezon X^0 izospin 1 in pripada istemu izospinskemu tripletu kot δ .

Zanimivi so tudi rezultati pri mezonu $\pi^- (1080)$ (mezon A_1). Doslej je veljal ta mezon za zelo »širokega« (širina resonance 60 do 150 MeV) in je povzročal težave, ker so se rezultati (mirovna masa, preseki itd.) različnih meritev zelo razlikovali med seboj. Novi spektrometer pa je dal pri 1080 MeV vrh z isto širino kot je ločljivost spektrometra, iz česar sklepajo, da je širina tega vzbujenega mezona manjša od 5 MeV. V bližini mezona $\pi^- (1080)$ so našli še en vzbujen mezon pri 1150 MeV, ki je pri starih meritvah s slabšo ločljivostjo verjetno sovpadal z mezonom $\pi^- (1080)$ in s tem morda povzročal omenjene težave.

Pri najnovejših meritvah⁶ so izmerili spekter mezona $\pi^- (mc^2)$ do 2,5 GeV. Na sl. 4 so zbrani rezultati vseh dosedanjih meritev. V dotlej neraziskanem območju nad 1,5 GeV so odkrili precej novih vzbujenih stanj in so jih krstili R, S, T in U.

Čeprav prve meritve še niso čisto zanesljive, dajejo rezultati vtis, da je spekter mezonov bogatejši, kot smo pričakovali. Zato si upravičeno prizadevajo, da bi čimbolj izboljšali ločljivost in statistično natančnost pri spektrometrih za osnovne delce.

B. Magliču se zahvaljujem, da mi je poslal rezultate najnovejših meritev in dovolil objavo še ne objavljenega diagrama (sl. 4).

Mitja Rosina

* Pri novo odkritih delcih, za katere še ne poznajo zanesljivo kvantnih števil, je včasih tvegano uporabljati novo poimenovanje in jih zato raje krstijo po svoje.

L i t e r a t u r a

¹ B. Maglič, G. Gosta: A Method for the Search for Unstable Particles using Jacobian Peaks in Angular Distribution, *Physics Letters* **18**, 185 (1965).

² B. Maglič: New Method for Search for Unstable Particles: Boson Missing-Mass Spectrometry. Spring School of Elementary Particle Physics, Yerevan, USSR, May 1965.

³ J. Strnad: Novi osnovni delci. *Obz. mat. fiz.* **10**, 22 (1963).

⁴ J. Strnad: Nekaj novic iz fizike visokih energij. *Obz. mat. fiz.* **11**, 134 (1964).

⁵ J. Strnad: Novo poimenovanje mezonov in barionov. *Obz. mat. fiz.* **11**, 80 (1964).

⁶ B. Maglič: Privatno sporočilo.

SPECIALNA TEORIJA RELATIVNOSTI

Študenti, ki jim je fizika glavni predmet, bi morali spoznati osnove specialne teorije relativnosti v prvem letu študija. Pri vpeljavi teh osnov lahko uberemo eno izmed poti, ki jih predlaga R. Weinstock.¹ Navežemo na obravnavanje, ki je v navadi pri osnovnem predavanju fizike.² Potem ko smo izračunali frekvenco pri kroženju nabitih delcev v prečnem homogenem magnetnem polju

$$\nu = \frac{1}{2} eB/m\pi, \quad (1)$$

kjer je B gostota magnetnega polja, e naboj in m (nespremenljiva) masa delca, omenimo poskuse z zelo hitrimi delci. Pri delcih s hitrostjo, ki ni majhna v primeri s hitrostjo svetlobe, je v nasprotju z (1) frekvenca odvisna od hitrosti. Merjenja dajo zanjo manjše vrednosti kot enačba (1). Zaradi tega nabitih delcev s ciklotronom ne morejo pospešiti do zelo velikih hitrosti. Če nočemo omajati zaupanja v enačbe elektrodinamike, moramo podvomiti v nespremenljivost mase in s tem v »klasično« mehaniko. Če se ravnamo po merskih rezultatih, mora masa delca naraščati z naraščajočo hitrostjo.

V nadaljevanju je treba poseči nekoliko vstran. $S(x, y, z)$ in $S'(x', y', z')$ naj bosta inercialna koordinatna sistema z vzporedno orientiranimi ustreznimi osmi. Izhodišči naj v trenutku $t = t' = 0$ sovpadata; izhodišče S' naj ima proti izhodišču S hitrost v v smeri osi x . Galilejevo transformacijo

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t \quad (2)$$

študenti že poznajo. Po dvakratnem odvajanju sledi iz (2), da je pospešek nekega telesa merjen v S in v S' enak: $a' = a$. Zato velja v obeh sistemih Newtonov zakon $F = ma = ma' = F'$. V skladu z zakonom o ohranitvi mase smo tu vzeli v obeh sistemih enako maso.

Prej pa smo ugotovili, da je treba pri zelo velikih hitrostih upoštevati odvisnost mase od hitrosti. To pomeni, da tedaj nikakor ne smemo izenačiti mas v obeh sistemih. Še drugi zapletljaj: dva dogodka v različnih točkah v sistemu S' nista sočasna, čeprav sta v sistemu S dogodka sočasna. Zato t' seveda ni več enak t . Še nadalje pa vztrajamo pri linearni transformaciji:

$$x' = a_{11}x + a_{14}t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = a_{41}x + a_{44}t. \quad (3)$$

To je Lorentzova transformacija. Obratna transformacija mora imeti enako obliko, zato je $a_{11} = a_{44}$ in determinanta koeficientov $a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41} = 1$. Izračunajmo povezave med hitrostma $(v_x, v_y, v_z) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ in $(v'_x, v'_y, v'_z) = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt')$:

$$v'_x = (dx'/dt)/(dt'/dt) = (a_{11}v_x + a_{14})/(a_{41}v_x + a_{44}); \quad v'_y = v_y/(a_{41}v_x + a_{44}), \dots$$

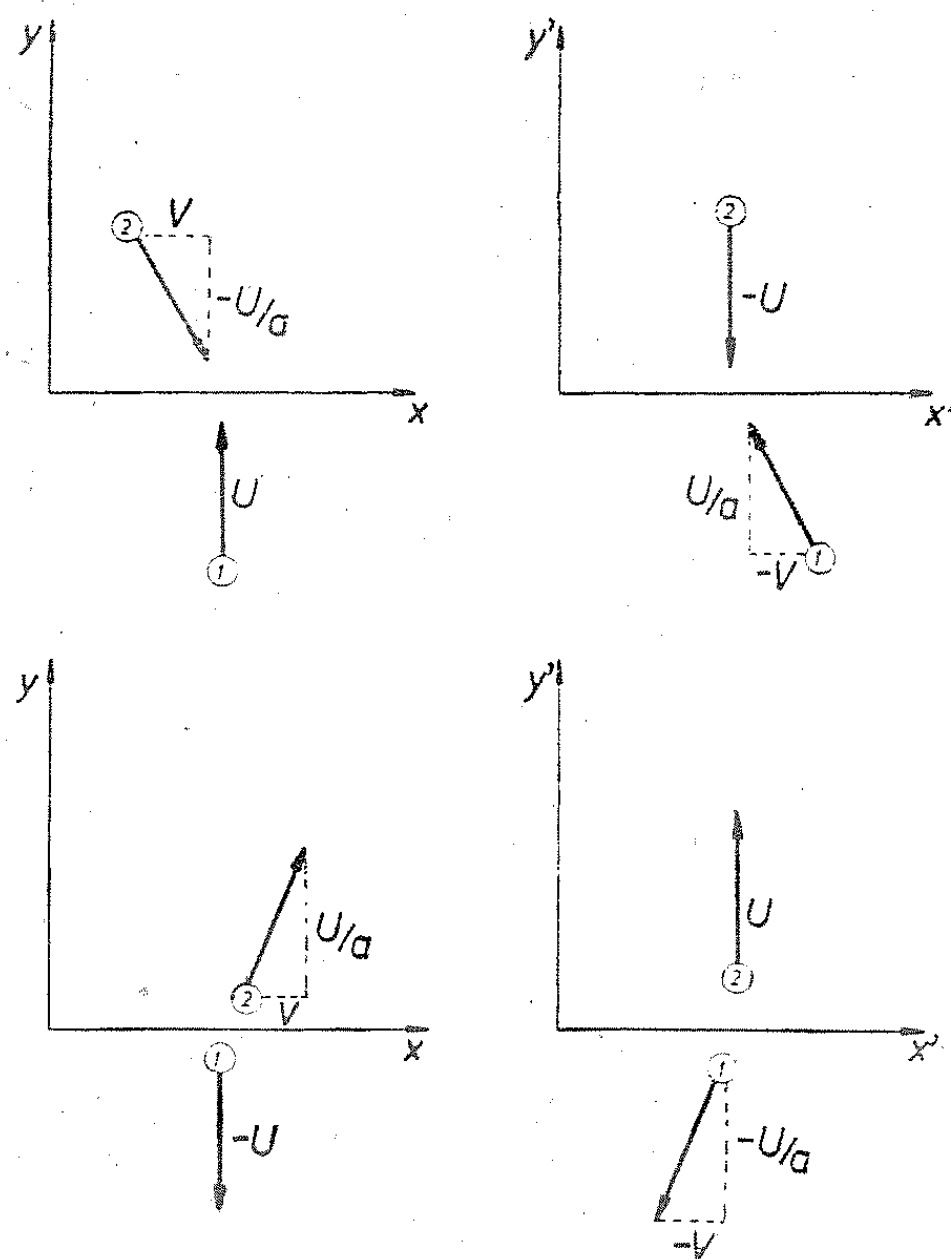
$$v_x = (a_{11}v'_x - a_{14})/(-a_{41}v'_x + a_{44}); \quad v_y = v'_y/(-a_{41}v'_x + a_{44}), \dots! \quad (4)$$

Izhodišče S' ima proti izhodišču S hitrost v v smeri osi x , zaradi česar mora za $v'_x = 0$ biti $v_x = a_{14}/a_{44} = v$. Zdaj lahko vse štiri koeficiente izrazimo z enim

$$a_{11} = a; \quad a_{44} = a; \quad a_{14} = -av; \quad a_{41} = (a^{-1} - a)/v. \quad (5)$$

Po tem uvodu smo pripravljeni za opis nekega posebnega prožnega trka dveh enakih delcev. Pred trkom naj ima delec 1 v sistemu S hitrost u v smeri osi y , delec 2 pa v sistemu S' hitrost $-u$ v smeri osi y' . Iz enačb (4) in (5)

izračunamo hitrost delca 1 v sistemu S' in hitrost delca 2 v sistemu S (sl. 1 a). Za gibalno količino in kinetično energijo naj veljata ohranitvena zakona kot v klasični mehaniki. Po tem je med necentralnimi trki možen tudi trk, pri katerem delca zamenjata samo komponenti hitrosti v smeri osi y ali y' (sl. 1 b).



Sl. 1. Posebni necentralni prožni trk dveh enakih delcev 1 in 2 v sistemih S in S' ; (a) pred trkom, (b) po trku.

Gibalno količino definiramo kot v klasični mehaniki, le da upoštevamo odvisnost mase od hitrosti:

$$\mathbf{G} = m(v) \mathbf{v}.$$

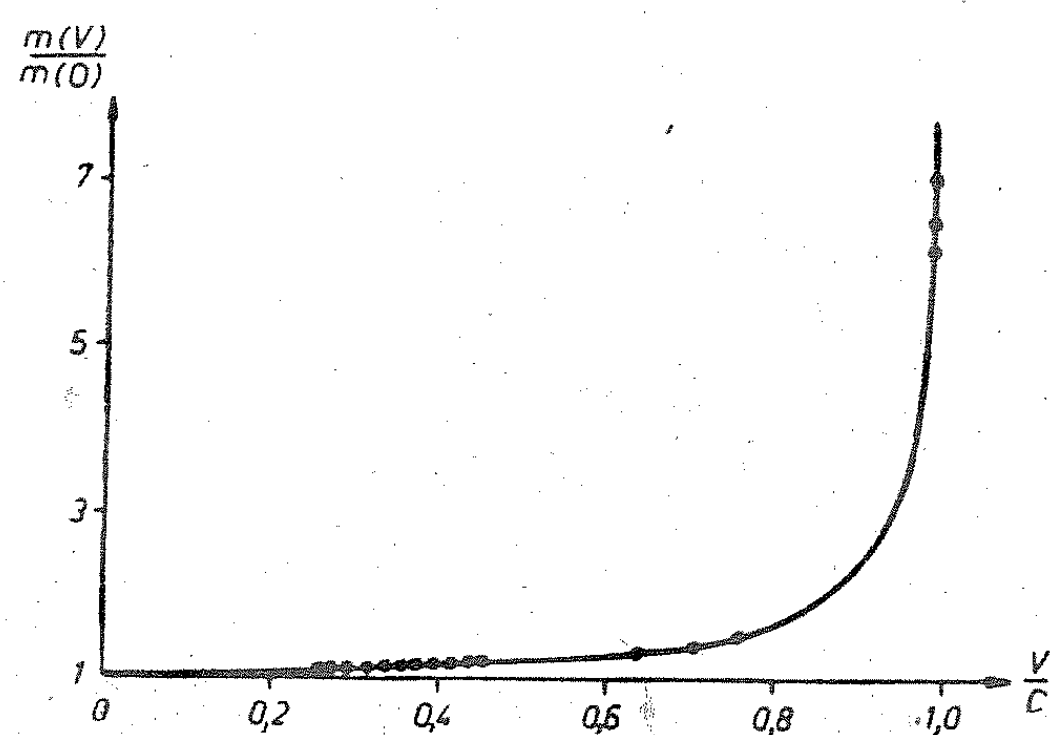
Zapišimo, da se ohrani komponenta gibalne količine v smeri osi y ali y'

$m((v^2 + u^2/a^2)^{1/2})(-u/a) + m(u)u = m(u)(-u) + m((v^2 + u^2/a^2)^{1/2})u/a$,
torej

$$m(v^2 + u^2/a^2)^{1/2} = am(u), \quad (6)$$

kjer je $a = a(v)$! To enačbo dvakrat odvajamo na u pri $v = \text{konst.}$:

$$m''((v^2 + u^2/a^2)^{1/2})u^2(v^2 + u^2/a^2)^{-1/a^2} + m'((v^2 + u^2/a^2)^{1/2})(v^2 + u^2/a^2)^{-1/2}/a^2 - \\ - m'((v^2 + u^2/a^2)^{1/2})u^2(v^2 + u^2/a^2)^{-3/2}/a^4 = am''(u),$$



Sl. 2. Krivulja $m(v) = m(0)(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ in merski rezultati. Podatke pri zelo nizkih energijah sta zbrala Farago in Janossy⁴. Pri energijah nekaj sto keV so merili s konverzijskimi elektroni Rogersova in sodelavci³ (srednje tri točke). Pri energijah med 2,6 MeV in 3,1 MeV so merili Meyer in sodelavci z elektroni, ki jih je pospešil van de Graaffov pospeševalnik⁵ (desne tri točke). Gibalno količino so določili po odklonu v magnetnem polju. Hitrost so merili ali neposredno ali pa so jo izračunali iz kinetične energije. Odnik od izračunane vrednosti pri nobeni od meritev ni presegel napake, s katero je bila obremenjena meritev.

pri čemer pomeni rtica odvajanje na argument. Ko postavimo v zadnjo enačbo $u = 0$, dobimo

$$m'(v) = va^3 m''(0) = vm^3(v) m''(0)/m^3(0). \quad (7)$$

Tu smo že upoštevali rezultat, ki ga da enačba (6) za $u = 0$, to je $a = m(v)/m(0)$. Na začetku smo predpostavili, da masa narašča z naraščajočo hitrostjo, da je torej $m'(v) > 0$. Iz enačbe (7) sledi tedaj $m''(0) > 0$, saj sta v in m pozitivni količini. Zato lahko postavimo $m''(0) = m(0)/c_1^2$, kjer je c_1 konstanta, ki ima dimenzijo hitrosti. Dobimo preprosto diferencialno enačbo $m^{-3} dm = v dv/c_1^2 m^2(0)$, ki jo integriramo v mejah od $m(0)$ do $m(v)$ oziroma 0 in v . Končno je

$$m(v) = m(0) (1 - v^2/c_1^2)^{-1/2}; \quad a = (1 - v^2/c_1^2)^{-1/2}. \quad (8)$$

Po izkušnji ne more nobeno telo, ki ima od nič različno mirovno maso $m(0)$, doseči ali preseči hitrost svetlobe v vakuumu c . Ker je $m(c_1) = \infty$ (8), sklepamo, da je $c_1 = c$. O tem nas prepričajo tudi rezultati poskusov, pri katerih so merili odvisnost mase elektrona od hitrosti (sl. 2).³⁻⁵

Dalje postopamo kot običajno. Za kinetično energijo je uporabna ena izmed starih definicij $W_k = \int (dG/dt) ds = \int v dG$. Dobimo $W_k = [m(v) - m(0)] c^2$ in pridemo s tem tudi do zveze med maso in energijo $\Delta W = c^2 \Delta m$.

J. Strnad

Literatura

- ¹ R. Weinstock: New Approach to Special Relativity. Am. J. Phys. **33**, 640 (1965).
- ² I. Kuščer, A. Moljk: Fizika. Ljubljana (DZS), 1963, s. 755, 758.
- ³ M. M. Rogers, A. W. McReynolds, F. T. Rogers: The Relativistic Mass of the Electron. Phys. Rev. **57**, 379 (1940).
- ⁴ P. S. Farago, L. Janossy: Review of the Experimental Evidence for the Law of Variation of the Electron Mass with Velocity. Nuovo cimento **5**, 1411 (1957).
- ⁵ V. Meyer, W. Reichert, H. H. Staub, H. Winkler, F. Zamboni, W. Zych, Experimentelle Untersuchung der Massen-Impulsrelation des Elektrons. Helv. Phys. Acta **36**, 981 (1963).

NOVE KNJIGE

Zvonimir Bohte: Numerično reševanje enačb.

Knjižica s 150 stranmi je izšla v zbirki »Sigma« maja 1964. Je prvo delo s področja numerične analize v slovenščini, in sicer obravnava numerično reševanje enačb. V njej je zbranih in opisanih nekaj najbolj znanih numeričnih metod za reševanje algebrائيčnih in transcendentnih enačb, takih, ki so dostopne bralcu z znanjem elementarne algebre.

Knjiga je razdeljena na šest poglavij, od katerih so prva štiri v glavnem priprava za razumevanje zadnjih dveh, ki tvorita pravzaprav jedro knjige. V prvih dveh poglavjih je razloženih nekaj najosnovnejših algebrائيčnih pojmov, ki so potrebni za razumevanje naslednjih poglavij, tako da lahko bere knjižico bralec s srednješolskim znanjem matematike. Tretje in četrto poglavje sta posvečeni osnovnim pravilom numeričnega računanja in oceni napak pri numeričnem računanju. V zadnjih dveh poglavjih, ki sta, kot že rečeno, osrednji del knjige, je opisanih nekaj metod za reševanje enačb, in sicer so v petem zbrane metode, uporabne zgolj za reševanje algebrائيčnih enačb, v šestem pa metode, ki so primerne tako za reševanje algebrائيčnih kot tudi transcendentnih enačb. Čeprav je za zadnje poglavje potrebno znanje osnovnih pojmov diferencialnega računa, ga lahko razume tudi matematično manj razgledan bralec, ker razloži avtor vsako metodo tudi geometrično in na več zgledih. Razen tega vsebuje knjiga tudi nekaj nalog z rezultati.

Marica Vencelj

Niko Prijatelj: Matematične strukture I.

Knjiga »Matematične strukture I«, ki je izšla v zbirki »Sigma« pred dvema letoma, je prvi zvezek obsežnejšega dela o osnovah matematike. S čedalje večjim uveljavljanjem modernih matematičnih pripomočkov in pojmov ne samo v matematiki, ampak tudi v drugih eksaktnih vedah, narašča tudi potreba in želja po samostojnem prikazu tistih osnovnih pojmov in idej, na katerih bazirajo druge matematične discipline. Dostikrat je bilo namreč potrebno pri razlagi drugih poglavij matematike posebej razlagati najpotrebnejše osnovne pojme. Prav je, da te pojme enkrat za vselej usvojimo in jih potem drugod le uporabljamo.

Omenjeno delo izpolnjuje veliko vrzel v slovenski matematični literaturi. Avtor nas z izredno pregledno in razumljivo razlago vpelje v abstraktni svet matematičnih struktur. Vsa snov je podana s strogo aksiomatično metodo.

Knjiga ima sedem poglavij: Logični znaki, Množice, Relacije, Funkcije, Strukturne urejenosti, Aksiom izbire in Ekvipolentne množice.

V prvem poglavju se seznanimo z uporabo osnovnih logičnih simbolov, ki jih avtor dosledno uporablja pri formulaciji definicij in izrekov. V drugem poglavju spoznamo osnove teorije množic na kar se da strog, a dostopen način. Naslednje poglavje o relacijah je nekoliko bolj abstraktno, zato pa toliko bolj potrebno za temeljito razumevanje nadaljnjih poglavij; pri površnem branju ga smemo preskočiti. O funkcijah govori četrto poglavje. Tu gre za posplošitev vsem znanega pojma funkcije na abstraktne funkcije, katerih definicijsko in vrednostno območje sta abstraktni množici. Nekoliko težje je peto poglavje o urejenosti množic. V predzadnjem poglavju zvemo za več

ekvivalentnih formulacij aksioma izbire, ki je izredno pomemben za najgloblje matematične trditve in dokaze. V zadnjem poglavju spoznamo še pojem moči množice in osnovne pojme o kardinalnih in ordinalnih številih.

Knjižica vsebuje torej na pičlih 216 straneh izredno bogat material. Zaradi svoje strogosti presega okvir poljudnega čtiva. Za razumevanje snovi ni potrebno nobenega posebnega predznanja.

Zv. Bohte

Rajko Jamnik: Elementi teorije informacije. Knjižnica SIGMA. Za Društvo matematikov in fizikov SRS izdala Mladinska knjiga. Ljubljana 1964. 171 str.

Po vsebini je knjiga razdeljena na tri poglavja s težiščem na drugem poglavju.

Prvo poglavje podaja osnovne pojme verjetnostnega računa, ki jih je avtor vključil v glavnem zaradi popolnejšega razumevanja drugega poglavja. V tem poglavju obdela avtor na zgoščen, toda pregleden način definicije matematične verjetnosti, računanje verjetnosti sestavljenih dogodkov, matematično upanje, zakon velikih števil in na koncu poglavja še homogene markovske verige.

Jedro celotnega dela tvori pravzaprav drugo poglavje, ki nosi naslov: Teorija informacije. Avtor začne svoja izvajanja s pojmom nedoločenosti poskusov in slučajnih spremenljivk. Kot mero za stopnjo nedoločenosti uvede posebno funkcijo, ki jo natančno določi v skladu z njenimi naravnimi karakteristikami. Izhajajoč od te funkcije definira in razloži entropijo dogodkov, entropijo slučajnih spremenljivk in entropijo markovskih verig. Po teh pripravih preide avtor na obravnavanje informacij oziroma na obravnavanje količine informacije; pri tem definira količino informacije kot stopnjo nedoločenosti poskusa. Ta izvajanja lepo obogati z dvema primeroma iz poznane problematike, kako naj se določi med dobrimi zlatniki enega, ki je ponarejen. Posebno privlačni in aktualni pa so nadaljnji oddelki tega poglavja, v katerih razpravlja avtor o telekomunikacijskih sistemih, o strukturi jezikov in o optimalnem kodiranju sporočil.

V dodatku, ki ga lahko štejemo kot posebno poglavje, podaja avtor nekaj matematičnih problemov in zlasti dokazov, s katerimi ni hotel obremenjevati teksta drugega poglavja. Podrobneje obdela avtor konveksne funkcije, lastnosti funkcije, ki služi za mero nedoločenosti, in izrek o kodiranju.

Kljub temu, da je snov, ki se je lotil avtor, z matematičnega vidika precej zahtevna, mu jo je uspelo tako srečno redigirati, da jo lahko z užitkom bere tudi tisti, ki se s to matematično disciplino še ni ukvarjal. Prav zaradi take redakcije, pa tudi zaradi dejstva, da postaja teorija informacije vedno bolj pomembna matematična disciplina, smo lahko zadovoljni in ponosni, da je tako delo izšlo tudi v našem jeziku.

Ker imamo za verjetnostni račun že nekaj literature v slovenščini, bi bilo morda bolje, če bi avtor obdelal osnove verjetnostnega računa še bolj na kratko, da bi s tem pridobil čas in prostor za pri nas še neobdelane tematike verjetnostnega računa; zlasti bi želeli nekaj več o markovskih verigah, na katere se v drugem poglavju avtor večkrat vrača.

Jezikovno je delo lepo izpiljeno. Glede privzete terminologije pa bi bilo morda koristno sprožiti nekaj opazk, ki pa nikakor ne nižajo mnenja o kvaliteti dela samega.

Poznani dve definiciji matematične verjetnosti imenuje avtor statistično in klasično definicijo; nekateri avtorji jih imenujejo aposteriorno in apriorno definicijo. Morda je drugo boljše. Zlasti se mi ne zdi upravičen naziv klasična definicija. Tudi ne vidim, zakaj bi bila klasična definicija ugodnejša od statistične, kakor to navaja avtor na 25. strani.

Na 73. strani definira avtor nedoločenost slučajne spremenljivke kot število. Ker je nedoločenost neka lastnost, bi bilo morda bolje imenovati to število stopnjo nedoločenosti. Funkcija H izraža torej stopnjo nedoločenosti ne pa nedločenost samo.

Na 91. strani uporablja avtor za razliko (diferenco) besedo razloček. Ker gre v tem primeru dejansko za razliko dveh funkcijskih vrednosti, torej za razliko dveh števil, bi bilo bolje uporabiti besedo razlika in opustiti besedo razloček.

Morda bi kazalo malo spremeniti tudi naslov te nove matematične discipline. Namesto »teorija informacije« bi jo bilo morda bolje imenovati »teorija informacij«, podobno kakor rečemo »teorija iger« in ne »teorija igre«.

A. Vadnal

Ivan Vidav: Števila in matematične teorije. Za društvo matematikov in fizikov SRS izdaja Mladinska knjiga. Ljubljana 1965. 145 str.

Knjižica daje pravzaprav mnogo več kot bi bralec smel pričakovati po razmeroma skromnem oziroma skoraj šolskem naslovu. V knjižici najde bralec med specifično matematično snovjo nešteta razmišljanja o bistvu in zgradbi matematike, o smiselnosti matematike, o vlogi matematike ob današnjem bliskovitem razvoju vseh znanosti, o raznih težkih matematičnih problemih, ki se jih lahko obravnava z zelo različnih aspektov itd. Vsa ta razmišljanja, ki meje na filozofijo o matematiki, ustvarjajo bralcu večji čar kot pa konkretna obravnavana matematična tematika. Prav zaradi tega mora dati vsak samo formalni prikaz vsebine le zelo pomanjkljivo sliko o pomembnosti knjižice.

Knjižica obsega poleg kratkega uvoda, ki pa že zadeva v bistvo stvari, dve poglavji.

Prvo poglavje obravnava, izhajajoč od Peanovih aksiomov, uvajanje raznih tipov števil in njihovo geometrijsko ponazoritev. V ilustracijo problematike, ki nastaja pri iracionalnih številih, uporabi avtor zelo spretno Golbachovo domnevo in Fermatov problem.

Drugo poglavje obravnava predmete matematičnega raziskovanja, začnši z znano Russellovo »definicijo« matematike: »Matematika je znanost, v kateri nikoli ne vemo, o čem govorimo in tudi ne, ali je tisto, o čemer govorimo, res ali ne.« Nekako v takem tonu razvije avtor po aksiomatični metodi teorijo grup, evklidsko geometrijo in neevklidsko geometrijo.

A. Vadnal

Alojzij Vadnal: Funkcije. Knjiga Funkcije je izšla letos z letnico 1965 pri Mladinski knjigi v zbirki »Sigma«. Obsega 240 strani in je razdeljena na deset poglavij.

To delo je svojevrsten priročnik, v katerem je lepo in pregledno prikazano sto različnih funkcij z vsemi njihovimi bistvenimi lastnostmi, kot so definiranost funkcije, ekstremi funkcije, prevoji itd. Slike funkcij s posebnimi vrednostmi parametrov, ki so priložene tekstu vsake funkcije, je res lično

izdelal Rado Otrin, študent fakultete za strojništvo. Za nekatere funkcije je prikazana tudi konstrukcija (funkcije druge in tretje stopnje, ulomljene racionalne funkcije, potenčne funkcije, stožernice in trigonometrične funkcije).

Obdelane so prav vse funkcije, od najbolj elementarnih, kot so linearne, kvadratične in kubične funkcije, prek celih racionalnih funkcij višje stopnje, ulomljenih racionalnih funkcij in potenčnih funkcij. Tudi stožernice, iracionalne funkcije, eksponentne in logaritemske funkcije ter trigonometrične funkcije ne predstavljajo prav nobenih težav bralcu, če le pozna pojem odvoda in večkratnega odvoda, ki si ga je prav pri našem filmu funkcij prav lahko predstavljati.

Obdelane in narisane so tudi nekatere eno, dvo in večparametrične funkcije kot družina funkcij. Zanimive so funkcije, ki imajo posebna imena (omfaloida, kisoida, konkoida, verižnica in Gaussova normalna krivulja).

Knjiga je lep priročnik dijakom in samoukom, ki se želijo oziroma morajo prvič spoznati s funkcijami ter vsem tistim, ki si želijo v naglici poklicati v spomin potek določenih funkcij.

Ciril Velkoverh

Rajko Jamnik: Teorija iger. Teorija iger je razmeroma mlada matematična disciplina. Razvila se je v zadnjih 40 letih. Zanimanje zanjo je posebno zraslo, ko se je pokazalo, da je zelo uporabna v ekonomski in v vojnih vedah.

Delo Teorija iger, ki bo v kratkem izšlo v zbirki Sigma, ima namen seznaniti bralca s temeljnimi dosežki te discipline. Razdeljeno je na 4 poglavja. V prvem poglavju obravnava avtor osnovne pojme teorije matričnih iger, to se pravi iger, v katerih igrata 2 igralca z antagonističnimi interesi in imata vsak po eno potezo, v njej pa končno mnogo izbir in nobene informacije o položaju v igri. Poglavitni del poglavja je namenjen izreku o minimaksu in njegovem dokazu.

V drugem poglavju pisec opisuje reševanje matričnih iger. Poleg splošne metode pokaže, kako se preprosteje rešujejo nekateri posebni tipi iger (simetrične igre in igre z dominacijo). Razloži tudi, kako je mogoče grafično rešiti igro, v kateri ima eden od igralcev samo 2 izbiri, pa kako se da reševanje matrične igre prevesti na linearno programiranje. Na kratko omeni še približno reševanje, ki je najbolj primerno, če hočemo dobiti rešitev z računskim strojem.

Tretje poglavje je namenjeno opisu nekaterih nematričnih iger med dvema igralcema. Avtor pokaže, kako se da pozicijska igra (antagonistična igra, v kateri ima vsaj eden od igralcev več kot eno potezo) prevesti v matrično igro, pa naj gre za igro z informacijo ali brez nje ali za tako, v kateri so tudi slučajne poteze. Na kratko oriše še vprašanja v zvezi z neantagonističnimi igrami.

V četrtem poglavju je beseda o antagonističnih igrah med več igralci. Pisec obravnava le situacije, v katerih so dovoljene poljubne koalicije med igralci. Zanje razloži pojem karakteristične funkcije in strateške ekvivalence ter očrta von Neumannovo definicijo rešitve.

Delo obravnava samo končne igre in tudi pri teh je material odbran tako, da bo mogel brati knjigo vsak, ki so mu znani osnovni pojmi iz analitične geometrije. Na koncu knjige je zbirka nalog, ob katerih bralec lahko utrdi prebrano gradivo.

A. Vadnal

OBZORNİK

ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1965

LJUBLJANA

LETNIK XII

Uredniški odbor

Robert Blinc, Zvonimir Bohte, Peter Gosar, France Križanič, Ivan Kuščer,
Anton Moljk, Niko Prijatelj, Janez Strnad, Stane Uršič, Ivan Vidav, Franc
Kvaternik (tehnični in odgovorni urednik)

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Socialistične republike
Slovenije

Natisnila tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani

VSEBINA

Članki

O pojmu odvoda v algebri (J. Grasselli)	1
Metoda Danilevskega za določevanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrik (E. Zakrajšek)	8
Delno urejene algebraične strukture (J. Vrabec)	15
Simetrija in ohranitveni zakoni (E. P. Wigner — prev. J. Strnad)	32
Programiranje v simboličnem jeziku ALGOL 60 (T. Skubic)	49
Neinvariantnost proti obratu časa (J. Strnad)	64
Nekaj stavkov iz teorije najboljših aproksimacij (J. Garbajs)	97
Lok kot topološki prostor (M. Vencelj)	103
Intermetalni polprevodniki (G. Lahajnar)	111
Spremembe specifične upornosti kovin in polprevodnikov v magnetnem polju (M. Mali)	117
O teoriji množične strežbe (R. Jamnik)	145
Elastičnost funkcije (A. Vadnal)	162
Jedrska snov (R. F. Peierls — prev. J. Strnad)	166

Novice

Nov uspeh v fiziki delcev? (J. Strnad)	40
O formuli za n -to praštevilo (A. Suhadolc)	71
Magnetni pretok skozi supraprevodni ovoj je kvantiziran (A. Čadež)	72
Kvarki (J. Strnad)	76
Dva nova načina za merjenje težnega pospeška (J. Strnad)	122
Antidevteroni (J. Strnad)	123
Preprost model jedra (J. Strnad)	173
Nov sprektrometer za vzbujena stanja mezonov (M. Rosina)	180

Šola

Pripomoček za poskuse iz optike (S. Uršič)	47
Vprašanje (J. Strnad)	48
Kinetična teorija za plin v kroglasti posodi (R. Kladnik)	87

Vodikov atom (J. Strnad)	88
Uvajanje novincev v matematiko na ekonomski fakulteti v Ljubljani (A. Vadnal)	126
Koliko fizike znajo študenti v prvem letniku matematično-fizikalnega oddelka? (M. Gros, M. Hribar, J. Strnad)	130
Specialna teorija relativnosti (J. Strnad)	180

Domače vesti

Društvo matematikov, fizikov in astronomov na občnem zboru in po njem (C. Velkovrh)	132
IV. kongres matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije v Sarajevu od 4. do 9. oktobra 1965 (F. Dominko)	134

Za mlade matematike in fizike	138
--	-----

Nove knjige	48, 94, 142, 189
------------------------------	------------------

SKRB SKLADA BORISA KIDRIČA ZA NAPREDEK MATEMATIKE

Delo, ki ga tako uspešno razvija naše društvo zlasti pri vzgoji mladine, žanje v naši javnosti vse priznanje in tudi največjo mogočo moralno in materialno podporo.

Pred časom je Sklad Borisa Kidriča na svojo pobudo povabil naše društvo, da bi proučilo možnosti, kako bi Sklad ob svojih pravilih lahko podprl naša prizadevanja za napredek matematike pri nas.

Po večkratnih posvetovanjih odbornikov društva s sekretarjem sklada tov. ing. Božidarjem Guštinom je društvo predložilo upravnemu odboru sklada ustrezne predloge, ki so bili pozneje tudi sprejeti.

Upravni odbor Sklada Borisa Kidriča je sprejel naslednje sklepe:

1. Vsako leto bo sklad podelil eno ali dve štipendiji že v 1. letniku študija matematike tistemu kandidatu, ki bi ga izbralo društvo iz vrst tekmovalcev na republiških tekmovanjih matematikov.

2. Sklad bo podeljeval pomoč knjižni zbirki »Sigma« in reviji »Obzornik za matematiko in fiziko«, in sicer v obliki financiranja nekaterih tem oziroma razprav, ki izidejo v zbirki ali reviji, seveda le tistih, ki po strokovni ravni lahko spadajo v okvir financiranja sklada.

3. Sklad bo podeljeval štipendije posebno prizadevnim učiteljem matematike in fizike na srednjih, višjih in visokih šolah, ki prirejajo matematične in fizikalne krožke različnih tipov. Možnost takega štipendiranja bodo imeli kandidati, če bi se želeli udeležiti kakih podiplomskih tečajev za nadaljnje izpopolnjevanje; prav tako bodo imeli kandidati možnost dobiti krajše štipendije (1 do 2 meseca) za obisk matematičnih in fizikalnih središč v inozemstvu. Predvidevata se 2 taki štipendiji na leto.

Za vsakega od navedenih predlogov bo upravni odbor sklada posebej sklepal, kot je to dosedanja praksa. Pri tem pa bo predvsem upošteval predlog našega društva. Dosedanje delo društva namreč kaže, da skuša društvo uveljavljati take kriterije, ki v vsem zagotavljajo največjo možno objektivnost.

Sprejete sklepe Sklada Borisa Kidriča štejemo prav gotovo lahko za velik uspeh našega društva in za ugledno priznanje našemu dosedanjemu vzgojnemu delu.

A. Vadnal

Vabimo vse naše člane, ki imajo želje in potrebe v smislu 3. točke, da se prijavijo upravnemu odboru DMFA SRS.

OBVESTILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS ima v zalogi večje število kompletnih letnikov oz. posameznih številk revije »Obzornik za matematiko in fiziko«. Le-te lahko dobite do vključno osmega letnika po znižani ceni v Matematični knjižnici v Ljubljani, Trg revolucije 11. V zalogi imamo še naslednje letnike in številke:

I	1951,	2, 3, 4,	
II	1952,	2,	
III	1953-54,	1, 2-3, 4, 5-6, C (celoten)	
IV	1955-56,	1, 2, 3, 4,	C
V	1956-57,	4,	
VI	1957-58,	2, 3, 4,	
VII	1960,	1, 2, 3, 4,	C
VIII	1961,	1, 2, 3, 4,	C
IX	1962,	2, 3, 4,	
X	1963,	1, 2, 3, 4,	C
XI	1964,	1, 2, 3, 4,	C
XII	1965,	1, 2, 3, 4,	C

Do vključno 8. letnika stane letnik 1,20 N. din, posamezna številka 0,30 N. din; 9. in 10. letnik stane 4 N. din, številka 1,20 N. din; 11. in 12. letnik pa stane 5 N. din, posamezna številka 1,50 N. din.

Obzornik za matematiko in fiziko izhaja vsak tretji mesec. Izdaja ga Društvo matematikov in fizikov SRS. Urejujejo ga: R. Blinc, Z. Bohte, P. Gosar, F. Križanič, I. Kuščer, A. Moljk, N. Prijatelj, J. Strnad, S. Uršič, I. Vidav. Odgovorni in tehnični urednik: F. Kvaternik. Upravo vodi F. Kvaternik. — Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani. — Naročnina je: za študente 4 N. din, za zasebnike 5 N. din, za šole 10 N. din, za ustanove in podjetja 20 N. din. Čekovni račun Obzornika je 503-608-314.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: