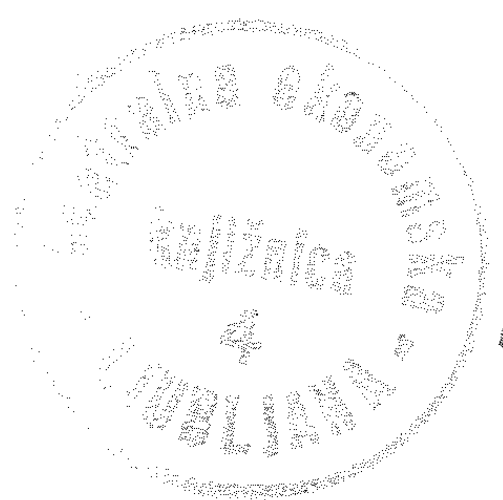




R-177 / 77-3

ODPISANO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

1977

Letnik 24

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1977

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, gimnazija Moste, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Marjan Turk.

Naročnina: za posameznike 140.— din (za člane društva je že vračunana članarina 20.— din), za dijake in študente 60.— din, za ustanove in podjetja 180.— din, za tujino 12 \$ = 216.— din, posamezna številka 25.— din, dvojna številka 50.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk DMFA SRS, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 227, tel. št. 65-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 50100-620-107-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA

Članki	Stran
Regularni kolobarji — 2. del (Niko Prijatelj)	65
Hitra Fourierova transformacija (Gabrijel Tomšič)	69
Magnetni mehurčki (Marko Zgonik)	77
Transverzalni laserski nihajni način (Boris Vedlin)	83
Novice	
Dolgoživih supertežkih jeder ni? (Janez Strnad)	87
Šola	
Na razpotju (France Križanič)	89
Dopisi	
Thermodynamics of linear transport processes (poročilo prev. Janez Strnad)	93
Domače vesti	
Obvestilo (Martina Koman)	82
Raziskovalne naloge matematičnega oddelka IMFM v letu 1976 (Anton Suhadolc)	94
Seznam novih članov DMFA SRS v letu 1976 (Ciril Velkovrh)	III
Plemljeva spominska soba — vabilo (Sergej Pahor)	III
Nove knjige (Peter Legiša, Alojz Kodre)	IV
Utrinka (Dušan Repovš, Ivan Kuščer)	76, 92

CONTENTS

Articles	Page
On regular rings — 2 p. (Niko Prijatelj)	65
Fast Fourier transform (Gabrijel Tomšič)	69
Magnetic bubbles (Marko Zgonik)	77
Transverse laser modes (Boris Vedlin)	83
News	87
School	89
Letters	93
Home news	94
New books	IV

REGULARI KOLOBARJI

NIKO PRIJATELJ

AMS Subj. Class. (1977) 16 A 30

2. del

Za dva idempotentna e, f poljubnega asociativnega kolobarja K pravimo, da sta ekvivalentna, in pišemo

$$e \sim f \quad (37)$$

če obstajata taka elementa $x, y \in K$, da je

$$e = xy \quad \text{in} \quad f = yx \quad (38)$$

Iz (38) dobimo, da je

$$u = xyx = ex = xf = exf \quad \text{in} \quad v = yxy = fy = ye = fye$$

pa tudi

$$uv = (xyx)(yxy) = (xy)(xy)(xy) = e^3 = e \quad \text{in} \quad vu = (yxy)(xyx) = (yx)(yx)(yx) = f^3 = f$$

Potemtakem lahko rečemo:

(I₁₉) Idempotentna $e, f \in K$ sta ekvivalentna natanko tedaj, kadar eksistirata elementa $u \in eKf$ in $v \in fKe$, da je

$$e = uv \quad \text{in} \quad f = vu$$

Že ime relacije obeta, da imamo opraviti z ekvivalenčno relacijo v množici vseh idempotentov danega kolobarja K . Res je za vsak idempotent e

$$e \sim e \quad (39)$$

saj je $e = e \cdot e$. Nadalje je iz definicije relacije neposredno razvidno, da je za poljubna idempotentna e, f veljaven sklep

$$e \sim f \Rightarrow f \sim e \quad (40)$$

Ugotovimo še, da velja za poljubne idempotente e, f, g tudi sklep

$$e \sim f \quad \text{in} \quad f \sim g \Rightarrow e \sim g \quad (41)$$

Po hipotezi obstajajo taki elementi $x, y, u, v \in K$, da je

$$e = xy, f = yx = uv, g = vu$$

Potem pa je tudi

$$(xu)(vy) = x(uv)y = x(yx)y = (xy)^2 = e \quad \text{in} \quad (vy)(xu) = v(yx)u = v(uv)u = (vu)^2 = g$$

torej res $e \sim g$.

V dveh primerih moremo iz ekvivalence idempotentov brž sklepati na njuno enakost. Prvi je tale:

$$e \sim 0 \Rightarrow e = 0 \quad (42)$$

* Prvi del tega članka je bil objavljen v Obzornik mat. fiz. 24 (1977) 2, str. 33—41.

Po hipotezi sta namreč taka $x, y \in K$, da je $e = xy$ in $0 = yx$. Zato je tudi $e = (xy)^2 = x(yx)y = 0$.

Drugi pa zadeva centralne idempotente:

(I₂₀) Če sta centralna idempotenta e, f ekvivalentna, sta enaka.

Zaradi $e \sim f$ obstajata po (I₁₉) taka $x \in eKf$ in $y \in fKe$, da je $e = xy$ in $f = yx$. Ker pa sta e, f centralna idempotenta, je tudi

$$e = xy = (xf)y = f(xy) = (yx)e = (ye)x = yx = f$$

Brž ko ima torej kak kolobar le centralne idempotente, se v njem relacija ekvivalence med idempotenti reducira na relacijo enakosti. Tak primer je že kolobar z enoto, v katerem je 0 edini nilpotentni element. To je neposredna posledica naslednjega izreka:

(I₂₁) Vsak idempotent e asociativnega kolobarja K z enoto 1, ki komutira z vsemi nilpotentnimi elementi, je centralen.

Za vsak idempotent e sta očitno $ex(1 - e)$ in prav tako $(1 - e)xe$ nilpotentna elementa za vsak $x \in K$, saj je $(ex(1 - e))^2 = ((1 - e)xe)^2 = 0$. Če torej e komutira z nilpotentnimi elementi, je

$$e(ex(1 - e)) = (ex(1 - e))e \Rightarrow ex(1 - e) = 0 \Rightarrow ex = exe$$

in

$$((1 - e)xe)e = e((1 - e)xe) \Rightarrow (1 - e)xe = 0 \Rightarrow xe = exe$$

torej res $ex = xe$ za vsak $x \in K$.

Naj bo K asociativni kolobar z enoto 1 pa pogledajmo, pod kakšnimi pogoji je v njem dovoljen sklep:

$$e \sim 1 \Rightarrow e = 1 \quad (43)$$

za vsak idempotent e .

Če sta $x, y \in K$ taka, da je $e = xy$ in $1 = yx$, je sklep (43) očitno veljaven le, če je tudi $xy = 1$. Vzemimo še obratno poljubna $x, y \in K$, za katera je $yx = 1$. Potem je $e = xy$ idempotent, saj je $e^2 = (xy)(xy) = x(yx)y = xy = e$, in zato je $e \sim 1$. Če naj torej sklep (43) velja, mora biti tudi $xy = 1$.

Tako smo ugotovili:

(I₂₂) V asociativnem kolobarju K z enoto 1 je veljaven sklep (43) natanko tedaj, kadar je za poljubna elementa $x, y \in K$ dovoljeno sklepati

$$yx = 1 \Rightarrow xy = 1 \quad (44)$$

Asociativen kolobar z enoto, v katerem velja sklep (44), se imenuje končen kolobar. Potemtakem je (43) karakteristična lastnost končnih kolobarjev. Označba »končen kolobar« torej v tej zvezi nikakor ne pomeni, da ima kolobar končno mnogo elementov, marveč le, da v njem velja sklep (44).

Vrnimo se k regularnim kolobarjem in najprej pokažimo:

(I₂₃) V regularnem kolobarju K sta idempotenta e, f ekvivalentna natanko tedaj, kadar je za kak $a \in K$ hkrati res

$$a = axa, e = ax, f = xa \quad (45)$$

Pogoj je očitno zadosten, saj iz (45) takoj razberemo, da sta e, f idempotenta in da je $e \sim f$. In če je $e \sim f$, obstajata po (I₁₉) taka $a \in eKf$ in $x \in fKe$, da je $e = ax$ in $f = xa$. Potem pa je tudi $a = af = axa$.

Pri regularnih kolobarjih nas nadalje zanima, pod kakšnimi pogoji je dovoljen sklep

$$e \sim f \Rightarrow (1 - e) \sim (1 - f) \quad (46)$$

za poljubna idempotenta e, f . Odgovor na to je dal Vidav [4] in se glasi:

(I₂₄) Sklep (46) velja v natanko tistih regularnih kolobarjih, v katerih obstaja za vsak element a inverzibilen element x , da je $a = axa$.

Vzemimo poljuben element a regularnega kolobarja K , v katerem velja (46), in naj bo $a = axa, e = ax$ in $f = xa$. Potem je $e \sim f$ in zato po (46) tudi $(1 - e) \sim (1 - f)$. Če pišemo

$$e = e^3 = (axa)(xax) \quad \text{in} \quad f = f^3 = (xax)(axa) \quad (47)$$

je očitno

$$axa = (axa)xa = eaf \quad \text{in} \quad xax = x(axa)x = fxe \quad (48)$$

Po (I₁₉) pa sta tudi taka

$$u \in (1 - e)K(1 - f) \quad \text{in} \quad v \in (1 - f)K(1 - e) \quad (49)$$

da je

$$1 - e = uv \quad \text{in} \quad 1 - f = vu \quad (50)$$

Zdaj pa brž vidimo, da je element $x_1 = xax + v$ inverzibilen, pri čemer je $x_1^{-1} = axa + u$. Če upoštevamo (47)–(50), nam da res kratek račun

$$(xax + v)(axa + u) = f + (1 - f) = 1 \quad \text{in} \quad (axa + u)(xax + v) = e + (1 - e) = 1$$

Toda za inverzibilni element x_1 pa je tudi res, da je

$$ax_1a = a(xax + v)a = (axa)xa + ava = axa + a(xav)a = a + a(fv)a = a$$

Vzemimo še obratno, da obstaja k vsakemu $a \in K$ inverzibilen element $x_1 \in K$, da je $a = ax_1a$. Če sta idempotenta $e, f \in K$ ekvivalentna, torej

$$e \sim f$$

potem obstaja po (I₂₃) tak $a \in K$, da je

$$a = axa, \quad e = ax \quad \text{in} \quad f = xa \quad (51)$$

Pa naj bo x_1 inverzibilen element, za katerega je tudi

$$a = ax_1a, \quad e_1 = ax_1 \quad \text{in} \quad f_1 = x_1a \quad (52)$$

Potem sta kajpak idempotenta e_1, f_1 ekvivalentna in iz

$$(1 - e_1)x_1^{-1} \cdot x_1(1 - e_1) = 1 - e_1$$

$$\text{in} \quad x_1(1 - e_1) \cdot (1 - e_1)x_1^{-1} = x_1(1 - e_1)x_1^{-1} = 1 - x_1a = 1 - f_1$$

vidimo, da je tudi

$$(1 - e_1) \sim (1 - f_1) \quad (53)$$

Iz (51) in (52) pa razberemo, da je

$$ee_1 = (axa)x_1 = ax_1 = e_1, \quad e_1e = (ax_1a)x = ax = e, \quad ff_1 = x(ax_1a) = xa = f, \\ f_1f = x_1(axa) = f_1$$

In če to upoštevamo, dobimo takoj, da je

$$1 - e = (1 - e)(1 - e_1), \quad 1 - e_1 = (1 - e_1)(1 - e), \quad 1 - f = (1 - f_1)(1 - f), \\ 1 - f_1 = (1 - f)(1 - f_1)$$

Odtod pa sledi, da je

$$(1 - e) \sim (1 - e_1) \quad \text{in} \quad (1 - f) \sim (1 - f_1) \quad (54)$$

Skupaj s (53) nam da to iskani rezultat, da je namreč tudi

$$(1 - e) \sim (1 - f)$$

Znano je, da imenujemo inverzibilne elemente danega kolobarja tudi enote kolobarja. Zato je take regularne kolobarje, v katerih obstaja za vsak element a inverzibilen element x , da je $a = axa$, Ehrlichova [5] poimenovala enotsko regularne kolobarje. Vidavov izrek nam torej pove, da je (46) karakteristična lastnost enotsko regularnih kolobarjev.

Brž tudi spoznamo (Vidav [4]):

(I₂₅) *Vsak enotsko regularen kolobar je končen.*

Naj bosta x, y taka elementa enotsko regularnega kolobarja K , da je $yx = 1$, in naj bo $z \in K$ inverzibilen element, za katerega je $y = yzy$. Potem je tudi $1 = (yzy)x = (yz)(yx) = yz$, torej tudi $y = z^{-1}$ inverzibilen element. Zato lahko sklepamo

$$yx = 1 \Rightarrow x = y^{-1} \Rightarrow xy = 1$$

in trditev je dokazana.

Omenimo nazadnje še en poseben primer regularnih kolobarjev:

Asociativnemu kolobarju K z enoto pravimo, da je strogo regularen, če eksistira k vsakemu $a \in K$ tak $x \in K$, da je

$$a = a^2x \quad (55)$$

Za komutativne kolobarje je ta definicija očitno enakovredna definiciji regularnosti. V splošnem primeru pa je zahteva (55) ostrejša. Najprej namreč vidimo:

(I₂₆) *V strogo regularnem kolobarju K je 0 edini nilpotentni element.*

Za vsak $a \in K$ je zaradi (55) tudi $a^n = a^{n+1}x$ za vsako naravno število $n \geq 1$. Če je torej $a^n \neq 0$, je tudi $a^{n+1} \neq 0$. Potemtakem je za vsak $a \neq 0$ tudi $a^n \neq 0$.

Če je $a = a^2x$, nam kratek izračun brž pokaže, da je

$$(a - axa)^2 = 0$$

Po (I₂₆) je torej $a - axa = 0$, se pravi, da je tudi

$$a = axa$$

Vsak strogo regularen kolobar je zato tudi regularen.

Iz (I₂₁) in (I₂₆) pa neposredno sledi, da so v strogo regularnem kolobarju vsi idempotenti centralni. Če torej upoštevamo (I₂₀), vidimo, da je za poljubna idempotenta e, f strogo regularnega kolobarja veljaven sklep

$$e \sim f \Rightarrow e = f \Rightarrow (1 - e) = (1 - f) \Rightarrow (1 - e) \sim (1 - f)$$

To pa nam na osnovi izreka (I₂₄) spet pove:

(I₂₇) *Vsak strogo regularen kolobar je enotsko regularen.*

LITERATURA

- [4] I. Vidav, *Modules over regular Rings*, Mathematica Balkanica **1**, (1971), 287—292.
- [5] G. Ehrlich, *Unit-regular Rings*, Portugaliae Mathematica **27**, (1968) Fasc. 4, 209—212.
- [6] I. Kaplansky, *Rings of Operators*, W. A. Benjamin, New York 1968.
- [7] P. Ribenboim, *Rings and Modules*, Interscience Publishers, New York 1969.
- [8] N. H. McCoy, *The Theory of Rings*, Macmillan Company, New York 1964.

HITRA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

GABRIJEL TOMŠIČ

AMS Subj. Class. (1970) 42A68, 65T05

Hitra Fourierova transformacija je algoritem za računanje končne Fourierove transformacije. V članku je opisana osnovna ideja delovanja tega algoritma.

FAST FOURIER TRANSFORM

Fast Fourier transform is an algorithm for computing the finite Fourier transform. In the article the basic idea of this algorithm is described.

1. Uvod

S transformacijami hočemo običajno doseči poenostavitev pri reševanju danega problema. Ena od znanih transformacij je Fourierova transformacija (FT); s pomočjo le-te se dajo poenostaviti mnogi problemi na različnih področjih. Tako je FT že dolgo pomembno analitično sredstvo pri obravnavi linearnih sistemov, v optiki, v verjetnostnem računu, kvantni fiziki, pri študiju anten, v signalni analizi itd. Mnogokrat funkcija, katere FT iščemo, ni podana analitično, ampak so podane le nekatere njene vrednosti, funkcijo poznamo v diskretnih točkah. V takih primerih (kot npr. signalna analiza) se uporablja tako imenovana diskretna Fourierova transformacija (DFT). S pojavom računalnikov je diskretna analiza postala še bolj uporabna, prav tako tudi DFT. Kljub hitrim računalnikom pa se je izkazalo, da DFT porabi preveč računalniškega časa. Z odkritjem posebnega algoritma, ki učinkovito računa DFT, imenujemo ga hitra Fourierova transformacija (HFT), se je računalniški čas občutno zmanjšal.

HFT ima razmeroma dolgo zgodovino, saj so si mnogi prizadevali dobiti sprejemljiv algoritem, ki bi bil primeren za računalnik. Temeljno delo pri razvoju HFT je vsekakor članek Cooleya in Tukeya ([4]), ki je izšel 1965. leta. Za tem so se na področju uporabe razvijale inačice tega algoritma (npr. [1], [2], [5], [6], [9]). V zadnjem času pa je HFT obdelana že v učbenikih numerične analize in monografijah ([7], [3]).

V inženirski (elektrotehnični) literaturi običajno pomeni FT predstavitev funkcij iz časovnega področja (t) na frekvenčno področje (f). Fourierova transformiranka vsebuje isto informacijo kot originalna funkcija in tako FT omogoča raziskavo funkcij na drugem področju (npr. frekvenčnem), to pa velikokrat pomaga pri reševanju danih nalog.

O zvezni FT ne bi kaj več govorili (glej [10], pogl. 3), zapišimo le Fourierov integral

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (1)$$

Če integral obstoji za vsako vrednost parametra f , potem je $H(f)$ Fourierova transformiranka funkcije $h(t)$. Inverzna FT je definirana z izrazom

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi i f t} df \quad (2)$$

Funkciji $h(t)$ in $H(f)$, ki izpolnjujeta gornji relaciji (1) in (2), imenujemo Fourierov par.

Da bi opisali HFT, moramo seveda spregovoriti nekaj o DFT, ki je njeno izhodišče.

2. Diskretna Fourierova transformacija

Diskretna Fourierova transformacija je numerična realizacija zvezne Fourierove transformacije. Uberimo tako pot opisovanja DFT ([5]): vzemimo zvezno funkcijo $h(t)$, $-\infty < t < \infty$, ki naj ima Fourierovo transformiranko (1). Recimo, da se integral (1) ne da analitično izračunati. Zato tabelirajmo funkcijo $h(t)$, in sicer poiščimo njene vrednosti v točkah z ekvidistantnimi razmaki dolžine Δt to je, tabeliramo funkcijo $h(t)$ v točkah $j \Delta t$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Inverzno transformacijo, izraz (2), za $t = j \Delta t$ zapišemo takole

$$h(j \Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kF}^{(k+1)F} H(f) e^{2\pi i j f / F} df \quad (3)$$

kjer je $F = 1/\Delta t$. Eksponentna funkcija $e^{2\pi i j f / F}$ je glede na f periodična funkcija s periodo F . Z uvedbo nove spremenljivke $f + kF$ dobi izraz (3) tole obliko

$$h(j \Delta t) = \int_0^F H_p(f) e^{2\pi i j f / F} df \quad (4)$$

kjer je

$$H_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(f + kF) \quad (5)$$

$H_p(f)$ je periodična funkcija, ki smo jo dobili s superpozicijo neperiodične funkcije $H(f)$, ko jo pomaknemo za vsak večkratnik osnovne periode. Za funkcijo $H_p(f)$ pravimo, da je ponovljena verzija funkcije $H(f)$. Predpostavimo, da je $H(f) \approx 0$ za $|f| > \frac{1}{2} F$. Če periodično funkcijo $H_p(f)$ opazujemo na intervalu $[-\frac{1}{2} F, \frac{1}{2} F]$, iz (5) sledi

$$H(f) \approx H_p(f) \quad \text{za} \quad |f| < \frac{1}{2} F$$

Na intervalu $[0, F]$ pa velja

$$\begin{aligned} H(f) &\approx H_p(f), & 0 \leq f \leq \frac{1}{2} F \\ H(f - F) &= H_p(f), & \frac{1}{2} F \leq f \leq F \end{aligned}$$

Odtod vidimo, da $H_p(f)$ ne aproksimira dobro funkcije $H(f)$ za $f \in [0, F]$, ampak le za $|f| \leq \frac{1}{2} F$.

$H_p(f)$ kot periodično funkcijo spremenljivke f lahko razvijemo v Fourierovo vrsto. Koeficienti te vrste so, kot vidimo iz (4), enaki

$$\frac{1}{F} h(j \Delta t), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Tako je

$$H_p(f) = \frac{1}{F} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j \Delta t) e^{-2\pi i j f / F} \quad (6)$$

in ta izraz (6) predstavlja diskretno Fourierovo transformiranko. Sedaj poiščimo vrednosti funkcije $H_p(f)$ v N ekvidistantnih točkah na intervalu $[0, F]$, torej tabelirajmo funkcijo

$H_p(f)$ v krajiščih intervalov dolžine $\Delta f = \frac{F}{N} = \frac{1}{N \Delta t}$ in dobimo

$$H_p(n \Delta f) = \frac{1}{F} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j \Delta t) e^{-2\pi i j n / N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Upoštevajmo, da je $e^{-2\pi i j n / N}$ glede na j periodična funkcija s periodo N in imamo

$$H_p(n \triangle f) = \frac{1}{F} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(j \triangle t + kN \triangle t) \right] e^{-2\pi i j n / N} \quad (7)$$

Enako kot smo v izrazu (5) predstavili $H_p(f)$, zapišimo

$$h_p(j \triangle t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h((j + kN) \triangle t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(j \triangle t + kT),$$

kjer je $T = N \triangle t = \frac{1}{\triangle f}$ in (7) se glasi

$$H_p(n \triangle f) = \frac{1}{F} \sum_{j=0}^{N-1} h_p(j \triangle t) e^{-2\pi i j n / N} \quad (8)$$

S tem nam je uspelo modificirati originalen Fourierov par v diskreten Fourierov par h_p, H_p in smo dobili tale rezultat: Če sta $h(t)$, $-\infty < t < \infty$ in $H(f)$, $-\infty < f < \infty$ Fourierov par, potem sta $Th_p(j \triangle t)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ in $H_p(n \triangle f)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ diskreten končen Fourierov par, kjer je $\triangle f = \frac{1}{N \triangle t} = \frac{1}{T}$.

Zaustavimo se malo pri tem rezultatu in pogledjmo, kako izračunamo $H(f)$ pri dani zvezni funkciji $h(t)$. Problem določiti frekvenčno funkcijo $H(f)$ smo nadomestili z nalogo določiti periodično funkcijo $H_p(f)$, in sicer z vrednostmi $h(j \triangle t)$ (izraza (7) in (8)). Periodično funkcijo $H_p(f)$ smo predstavili kot vsoto sumandov $H(f + kF)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Napaka pri aproksimaciji $H(f)$ s funkcijo $H_p(f)$ na frekvenčnem področju $-\frac{1}{2}F < f < \frac{1}{2}F$ je vsota sumandov $H(f + kF)$ za $k \neq 0$. Če izberemo dovolj majhen $\triangle t$, bo $F = \frac{1}{\triangle t}$ zadosti velik in napaka na danem frekvenčnem področju res zanemarljiva. Če nas zanima celotno frekvenčno področje, je treba izbrati $\triangle t$ tako, da so prispevki $H(f)$ za vse $|f| \geq \frac{1}{2}F$ zanemarljivo majhni. Opozorimo še, da je izraz (8) pravzaprav formula, ki jo dobimo, če integral (1) računamo po rapeznem pravilu in je torej napaka integracije prav diferenca med $H(f)$ in $H_p(f)$. Ker smo omenili ekvivalenco med trapezno integracijsko formulo in izrazom (7) oz. (8), ki podaja diskretno Fourierovo transformiranko, zapišimo še Euler-MacLaurinovo integracijsko formulo za integracijo poljubne funkcije $f(t)$, ([8]),

$$\int_{t_0}^{t_N} f(t) dt = \triangle t \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N \right) - \frac{(\triangle t)^2}{12} (f_N' - f_0') + \frac{(\triangle t)^4}{720} (f_N''' - f_0''') - \dots$$

Kaj lahko opazimo tole: če so integrand in lihi odvodi v končnih točkah t_0 in t_N enaki, potem je diskretna Fourierova transformiranka (7), ki se konča pri indeksih, ki ustrezajo točkama t_0 in t_N , prav Euler-MacLaurinova integracijska formula za integrand $f(t) = h_p(t) e^{-2\pi i t f}$ z integracijskim intervalom $\triangle t$.

Zaradi enostavnosti zapisa postavimo v (8) še $\frac{T}{N} h_p(j \triangle t) = h(j)$ in $H_p(n \triangle f) = H(n)$

in diskretna Fourierova transformiranka za funkcijo $h(t)$ se končno glasi

$$H(n) = \sum_{j=0}^{N-1} h(j) e^{-2\pi i j n / N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9)$$

Ob koncu omenimo le še, da so lastnosti DFT podobne lastnostim zvezne FT.

3. Hitra Fourierova transformacija

DFT bi seveda radi računali s čimmanj operacijami, kajti skrajšati bi hoteli računalniški čas. Prav to se posreči s posebnim algoritmom, ki ga imenujemo HFT.

Če imamo na primer za kako funkcijo N vzorcev, to je tabeliranih vrednosti, bi potrebovali za določitev njene transformiranke, kot vidimo iz izraza (8), približno N^2 množenj in N^2 seštevanj. S HFT se to število računskih operacij zmanjša na približno $N \log N$. Pri velikih N , kar se v praksi pogosto pojavlja, je to že občutno zmanjšanje operacij.

Opišimo najprej osnovno idejo HFT! Ta transformacija temelji na metodi razcepa transformacije v produkt dveh transformacij; tu je produkt mišljen kot kompozitum, tako da eni transformaciji sledi druga. Recimo, da imamo danih N točk-vzorcev in da se da število N razstaviti v produkt $N = N_1 N_2$. Namesto N^2 množenj in seštevanj dobimo približno po $N(N_1 + N_2)$ množenj in seštevanj. Če je na primer $N = N_1 N_2 \dots N_k$, potem imamo približno $N(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$ operacij. Najugodnejše je, da je N potenca števila 2, torej $N = 2^k$. Tedaj dobimo $N(2k)$ operacij, kjer je $k = \log_2 N$, tako imamo res $2N \log_2 N$ ali $\frac{2}{\log 2} N \log N$ operacij namesto N^2 .

Začnimo opis HFT s preprostim primerom, bodi $N = 2^2$. Uporabimo oznake, kot so v [4], in zapišimo diskretno Fourierovo transformiranko

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} A_0(k) e^{-2\pi i n k / N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Zaznamujmo še $e^{-2\pi i n k / N} = w^{nk}$, potem se zgornji izraz glasi

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} A_0(k) w^{nk}$$

Za $N = 4$ zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(0) \\ A_0(1) \\ A_0(2) \\ A_0(3) \end{bmatrix}$$

Ali splošno

$$X = W A_0$$

kjer sta A_0 in X vektorja, W matrika.

V splošnem so elementi matrik W in A_0 lahko kompleksni. Za produkt matrike z vektorjem potrebujemo N^2 kompleksnih množenj in $N(N-1)$ kompleksnih seštevanj.

Zgornjo matrično enačbo prepišimo, a upoštevajmo tole relacijo

$$w^{nk} = w^{nk \pmod{N}} \quad \text{in} \quad w^N = 1$$

ki sledi iz periodičnosti eksponentne funkcije. Tako dobimo

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^0 & w^2 \\ 1 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(0) \\ A_0(1) \\ A_0(2) \\ A_0(3) \end{bmatrix}$$

in sicer pišemo ponekod w^0 namesto 1 samo zato, da bi razvili splošnejši rezultat.

V naslednjem koraku razcepimo kvadratno matriko W v produkt dveh kvadratnih matrik, in sicer takole

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^1 \\ 0 & 0 & 1 & w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(0) \\ A_0(1) \\ A_0(2) \\ A_0(3) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Opazimo, da je pri tem razcepu prišlo do zamenjave vrstic in novi vektor z zamenjanimi komponentami zaznamujemo $\bar{X}(n)$. Poštejmo sedaj število računskih operacij! V ta namen zmnožimo desni del relacije (10)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(0) \\ A_0(1) \\ A_0(2) \\ A_0(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(0) \\ A_1(1) \\ A_1(2) \\ A_1(3) \end{bmatrix}$$

Za prvo komponento $A_1(0)$ potrebujemo eno množenje in eno seštevanje, kajti

$$A_1(0) = A_0(0) + w^0 A_0(2)$$

Za $A_1(1)$ potrebujemo le eno množenje in seštevanje. Za $A_1(2)$ pa celo le eno seštevanje, saj je

$$A_1(2) = A_0(0) + w^2 A_0(2) = A_0(0) - w^0 A_0(2)$$

ker je $w^0 = -w^2$; produkt $w^0 A_0(2)$ poznamo že od komponente $A_1(0)$. Podobno se vidi, da za $A_1(3)$ potrebujemo le eno seštevanje. Vmesni vektor $A_1(k)$ je tako dobljen s štirimi seštevaji in dvema množenjema.

Nadaljujmo računanje izraza (10) in dobimo

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(0) \\ A_2(1) \\ A_2(2) \\ A_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^1 \\ 0 & 0 & 1 & w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(0) \\ A_1(1) \\ A_1(2) \\ A_1(3) \end{bmatrix}$$

Od tu spet vidimo, da je $A_2(0)$ določen z enim seštevanjem in enim množenjem, element $A_1(1)$ izračunamo z enim seštevanjem, kajti $w^0 = -w^2$. Podobno ugotovimo, da za $A_2(2)$ potrebujemo eno množenje in seštevanje in za $A_2(3)$ le eno seštevanje.

Za določitev $\bar{X}(n)$ potrebujemo torej štiri kompleksna množenja in osem kompleksnih seštevajev. Če bi $X(n)$ določali direktno, bi potrebovali 16 množenj in 12 seštevajev. Na tem primeru se že vidi uspešnost HFT.

V splošnem, ko je $N = 2^m$, gre pri tem algoritmu za razcep v m matrik. Po analogiji s prejšnjim zgledom lahko sklepamo, da HFT potrebuje $Nm/2$ množenj in Nm seštevajev, po direktni metodi pa bi potrebovali N^2 množenj in $N(N-1)$ seštevajev. Da se tako prihrani mnogo računalniškega časa, seveda ni treba posebej poudarjati. Edina neprijetnost pri tem algoritmu je zamenjava vrstic v $X(n)$.

Delovanje HFT smo pokazali na zgledu in tako predstavili algoritem popolnoma intuitivno. Skušajmo si ogledati algoritem še malo bolj splošno, vseeno pa ostanimo, že zaradi enostavnosti zapisa, pri $N = 2^2$.

Spet zapišimo diskretno Fourierovo transformiranko

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} A_0(k) w^{nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (11)$$

Cela števila n in k podajmo v binarnem sistemu. V tem primeru je $n, k = 0, 1, 2, 3$ in $k = 2k_1 + k_0, n = 2n_1 + n_0$, kjer so k_1, k_0, n_1, n_0 ali 0 ali 1. Relacija (11) se sedaj glasi

$$X(n) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 A_0(k_1, k_0) w^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}$$

Kot smo videli, je temelj vsega algoritma razcep matrike W . Ker velja $w^{a+b} = w^a w^b$, je

$$w^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} = w^{2n_0k_1} w^{(2n_1+n_0)k_0}$$

tu smo še upoštevali, da je

$$w^{4n_1k_1} = \exp\left(-\frac{2\pi i 4}{4} n_1k_1\right) = 1$$

Relacijo (11) lahko zapišemo kot

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 A_0(k_1, k_0) w^{2n_0k_1} \right] w^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (12)$$

Oglejmo si vsako od teh sumacij posebej, najprej izraz v oklepaju, ki ga zaznamujmo

$$A_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 A_0(k_1, k_0) w^{2n_0k_1} \quad (13)$$

in ga izpišimo

$$\begin{aligned} A_1(0, 0) &= A_0(0, 0) + A_0(1, 0) w^0 \\ A_1(0, 1) &= A_0(0, 1) + A_0(1, 1) w^0 \\ A_1(1, 0) &= A_0(0, 0) + A_0(1, 0) w^2 \\ A_1(1, 1) &= A_0(0, 1) + A_0(1, 1) w^2 \end{aligned}$$

ali v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} A_1(0, 0) \\ A_1(0, 1) \\ A_1(1, 0) \\ A_1(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(0, 0) \\ A_0(0, 1) \\ A_0(1, 0) \\ A_0(1, 1) \end{bmatrix}$$

Tak izraz smo že imeli v prejšnjem zgledu. Izpišimo še zunanjo vsoto iz (12)

$$A_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 A_1(n_0, k_0) w^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (14)$$

oziroma v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} A_2(0, 0) \\ A_2(0, 1) \\ A_2(1, 0) \\ A_2(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^1 \\ 0 & 0 & 1 & w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(0, 0) \\ A_1(0, 1) \\ A_1(1, 0) \\ A_1(1, 1) \end{bmatrix}$$

Očitno zunanja sumacija določa drugo razcepno matriko iz relacije (10). Iz (12) in (14) dobimo

$$X(n_1, n_0) = A_2(n_0, n_1) \quad (15)$$

Tu se pojavi zamenjava vrstic. Zapišimo še enkrat relacije (13), (14) in (15) skupaj

$$\begin{aligned} A_1(n_0, k_0) &= \sum_{k_1=0}^1 A_0(k_1, k_0) w^{2n_0 k_1} \\ A_2(n_0, n_1) &= \sum_{k_0=0}^1 A_1(n_0, k_0) w^{(2n_1+n_0)k_0} \\ X(n_1, n_0) &= A_2(n_0, n_1) \end{aligned}$$

in imamo originalno Cooley-Tukeyevo formulacijo algoritma HFT za primer $N = 4$.

Po enaki poti razvijemo algoritem za $N = 2^m$, m celo število. Spet n in k zapišimo v binarnem sistemu

$$\begin{aligned} n &= 2^{m-1} n_{m-1} + 2^{m-2} n_{m-2} + \dots + n_0 \\ k &= 2^{m-1} k_{m-1} + 2^{m-2} k_{m-2} + \dots + k_0 \end{aligned}$$

Sedaj se DFT glasi

$$X(n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{m-1}=0}^1 A(k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_0) w^{nk} \quad (16)$$

Oglejmo si izraz

$$w^{nk} = w^{(2^{m-1}n_{m-1}+2^{m-2}n_{m-2}+\dots+n_0)(2^{m-1}k_{m-1})} w^{(2^{m-1}n_{m-1}+\dots+n_0)2^{m-2}k_{m-2}} \dots w^{(2^{m-1}n_{m-1}+\dots+n_0)k_0}$$

Spet upoštevajmo, da je $w^{2^m} = w^N = 1$, pa se prvi člen zgornjega izraza glasi

$$w^{2^{m-1}n_0k_{m-1}}$$

drugi člen pa

$$w^{(2n_1+n_0)2^{m-2}k_{m-2}}$$

Po enaki poti dobimo še vse naslednje člene. Torej je izraz (16) tele oblike

$$\begin{aligned} X(n_{m-1}, \dots, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \dots \sum_{k_{m-1}=0}^1 A_0(k_{m-1}, \dots, k_0) w^{2^{m-1}(n_0k_{m-1})} w^{(2n_1+n_0)2^{m-2}k_{m-2}} \dots \\ &\dots w^{(2^{m-1}n_{m-1}+\dots+n_0)k_0} \end{aligned}$$

Tako po enaki poti kot za $N = 2^2$ dobimo

$$\begin{aligned} A_1(n_0, k_{m-2}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{m-1}=0}^1 A_0(k_{m-1}, \dots, k_0) w^{2^{m-1}(n_0k_{m-1})} \\ A_2(n_0, n_1, k_{m-3}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{m-2}=0}^1 A_1(n_0, k_{m-2}, \dots, k_0) w^{(2n_1+n_0)2^{m-2}k_{m-2}} \\ &\dots \\ A_m(n_0, n_1, \dots, n_{m-1}) &= \sum_{k_0=0}^1 A_{m-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) w^{(2^{m-1}n_{m-1}+\dots+n_0)k_0} \\ X(n_{m-1}, \dots, n_0) &= A_m(n_0, n_1, \dots, n_{m-1}) \end{aligned}$$

in to je originalna Cooley-Tukeyeva formulacija HFT za $N = 2^m$. V tem primeru imamo m sumacijskih enačb in vsaka vsebuje N enačb; vsaka enačba ima dve množenji, prvo množenje v vsaki enačbi je množenje z enoto, tako je torej treba opraviti le Nm množenj. Ker je $w^p = -w^{p+N/2}$, se število množenj zmanjša za pol, torej $Nm/2$. Podobno ugotovimo, da je seštevanj Nm .

Algoritem HFT se da po enaki poti izpeljati za poljuben N , $N = r_1 r_2 \dots r_m$, kjer so $r_1, \dots, r_m$ cela števila. Omenimo še, da je opisani algoritem HFT tudi zelo prikladen za programiranje.

LITERATURA

- [1] Bergland G. D., *A guided tour of the fast Fourier transform*, IEEE Spectrum 6 (1969), 41—52.
- [2] Brigham E. O., Morrow R. E., *The fast Fourier Transform*, IEEE Spectrum 4 (1967), 63—70.
- [3] Brigham E. O., *The fast Fourier transform*, Prentice Hall, 1974.
- [4] Cooley J. W., Tukey J. W., *An algorithm for machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp. 19 (1965), 297—301.
- [5] Cooley J. W., Lewis P. W., Welch P. D., *Application of the Fourier transform to computation of Fourier integrals, Fourier series, and convolution integrals*, IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, AN 15 (1967), 79—84.
- [6] Cooley J. W., Lewis P. W., Welch P. D., *The fast Fourier transform algorithm programming consideration in the calculation of sine, cosine and Laplace transform*, J. Sound Vib. 12 (1970), 315—337.
- [7] Hamming R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw Hill, 1973.
- [8] Hartree D. R., *Numerical Analysis*, Claredon Press 1958.
- [9] Singleton C. R., *A method for computing FFT with auxiliary memory and limited high-speed storage*, IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, AU 15 (1967), 91—97.
- [10] Vidav I., *Višja matematika III*, DZS, Ljubljana 1976.

UTRINEK

GALILEO GALILEI IN DVE KROGLI

V zbranih delih G. Galilea [1] zasledimo dokaz, da vsa telesa na Zemlji padajo enako hitro, neodvisno od njihove mase:

Denimo, da to ne drži, da torej padajo težja telesa hitreje od lažjih. Vzemimo dve različno težki krogli in ju povežimo z vrvico. Spustimo sedaj to sestavljeno telo, da prosto pada. Večja (težja) krogla bi padala hitreje, če je ne bi vrv vezala na manjšo kroglo, ki jo zato, ker je lažja in pada počasneje, zadržuje in ji zmanjšuje hitrost. Torej je hitrost sestavljenega telesa manjša kot hitrost, s katero bi padala velika krogla. Toda masa sestavljenega telesa je večja od mase velike krogla in bi zato moralo sestavljeno telo padati hitreje kot pada velika krogla. Protislovje.

Dušan Repovš

LITERATURA

- [1] Galileo Galilei: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno due nuove scienze attenenti alla meccanica*, Il primo giorno, Leiden, 1638, str. 109.

MAGNETNI MEHURČKI

MARKO ZGONIK

UDK: 538.22

Članek obravnava magnetne mehurčke. To so valjaste magnetne domene v tankih ploščicah nekaterih feritov. Opisan je nastanek magnetnih mehurčkov in pogoji za njihovo ravnovesje. Izračunana je ravnovesna velikost za mehurček, ki je pravilen valj. Nazadnje so omenjene možnosti za uporabo.

MAGNETIC BUBBLES

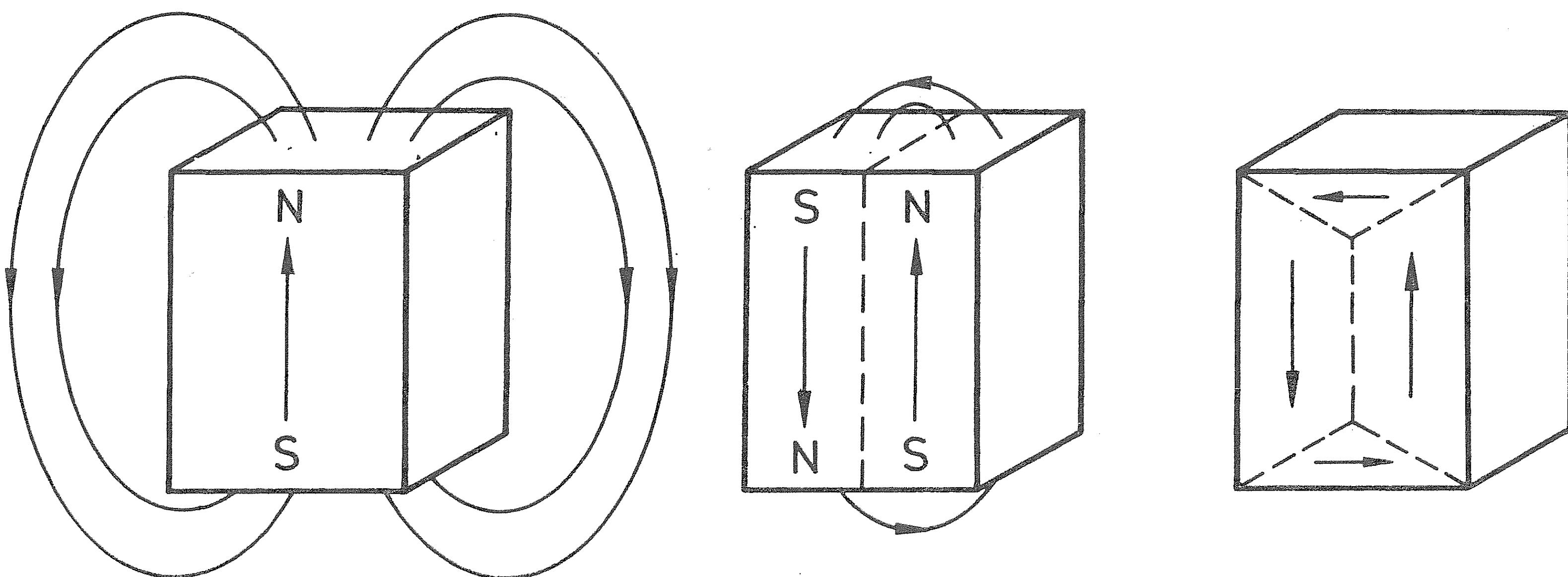
The article deals with magnetic bubbles, i.e. cylindrical magnetic domains in thin layers of certain ferrite magnetic materials. The phenomenon of magnetic bubbles and the conditions for their stability are discussed. Equilibrium radius is evaluated for the domain, having the form of a perfect cylinder. Finally possibilities of application are considered.

Domene v feromagnetni snovi

Feromagnetna snov je magnetizirana tudi tedaj, ko ni v zunanjem magnetnem polju. Magnetizacija je posledica urejenih magnetnih momentov ionov v kristalu feromagnetne snovi. Med temi magnetnimi momenti deluje tako imenovana *izmenjalna interakcija*, ki je kvantne narave. V feromagnetni snovi ureja izmenjalna interakcija magnetne momente tako, da kažejo v isto smer.

Vendar so le redko vsi magnetni momenti v kristalu vzporedni, ker se tedaj pojavi zunaj kristala magnetno polje, ki vsebuje energijo. Energija polja se zmanjša tako, da v nekaterih delih kristala magnetizacija spremeni smer. V kristalu nastanejo področja — *domene*, ki imajo različne smeri magnetizacije. Energija magnetnega polja je najmanjša, če imajo domene tako obliko, da se magnetni pretok sklene znotraj kristala (sl. 1). V feromagnetu, ki še ni bil namagneten, je magnetni pretok sklenjen znotraj kristala. Če damo tak kristal v magnetno polje, se poveča velikost tistih domen, v katerih kaže magnetizacija približno v smer zunanjega polja.

Feromagnetni kristali so na splošno anizotropni, to pomeni, da obstajajo odlikovane smeri, v katerih je kristale lažje magnetizirati kot v drugih. Zaradi manjše energije so domene v teh kristalih magnetizirane v odlikovanih smereh.



Sl. 1. Sklenjeni magnetni pretok znotraj feromagnetnega kristala

Meja dveh domen ni ostra. Med domenama je vmesna plast, v kateri se počasi spremeni smer magnetnih momentov. Če so magnetni momenti zasukani okoli osi, ki je pravokotna na mejo, pravimo tej plasti *Blochova stena*. Ta se običajno razteza čez več sto mrežnih ravnin. Debelina stene je določena z minimumom *izmenjalne energije* in *energije anizotropije*. Izmenjalna energija je tem manjša, čim bolj so magnetni momenti vzporedni; zaradi nje je energijsko ugodnejša debela stena. Energija anizotropije pa narašča s številom magnetnih momentov, ki ne kažejo v odlikovane smeri. Vsota obeh prispevkov je najmanjša pri določeni debelini stene. Za izbrano vrsto kristala je debelina stene konstantna, tako da je energija stene odvisna le od površine, ki jo stena pokriva. Zato pravimo tej energiji *površinska energija*. Nazorno si predstavljamo, da povzroča stena površinsko napetost na robu domene.

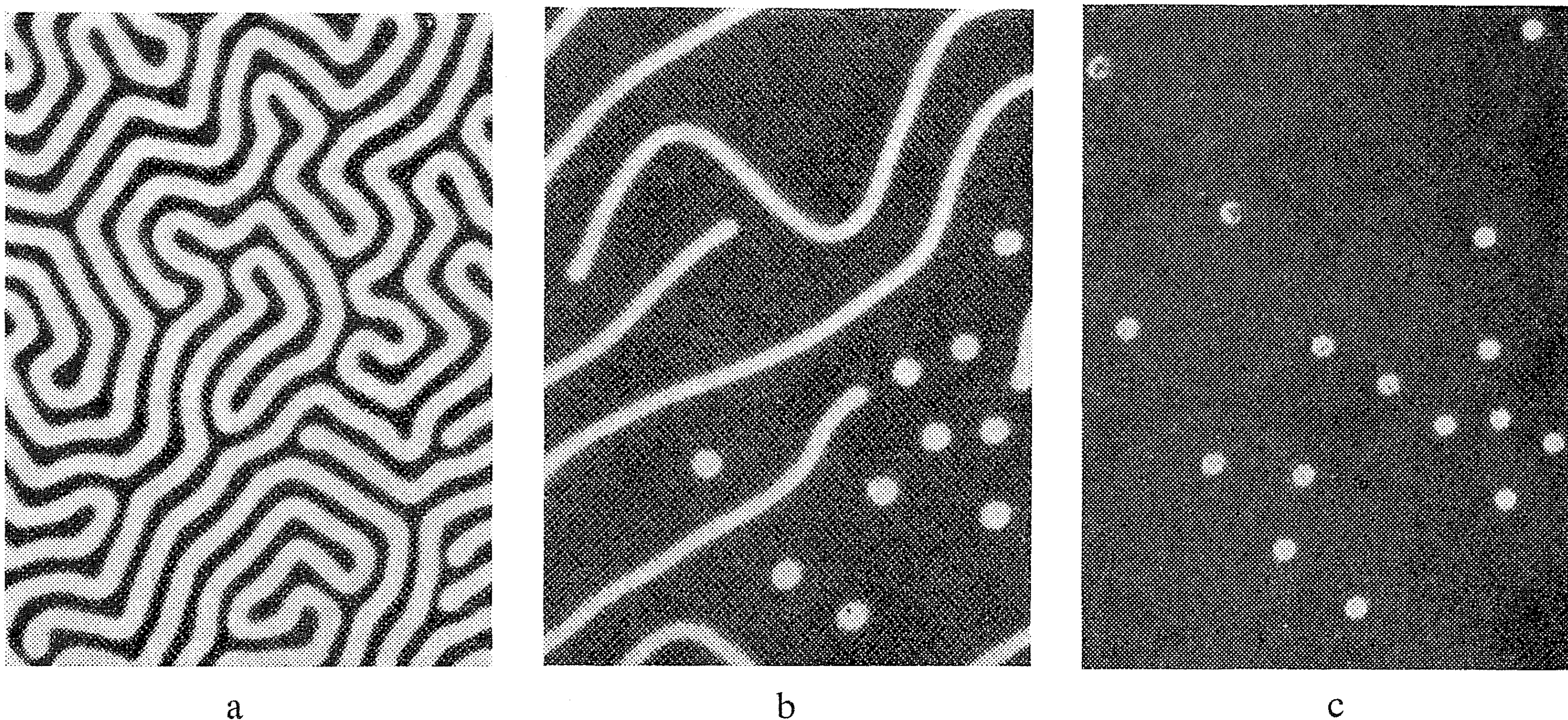
Domene imajo enostavno geometrijsko obliko le v monokristalih z malo napakami. S posebno tehnologijo je mogoče danes iz nekaterih feritov pridobivati feromagnetne kristale v obliki prozornih ploščic, ki so debele nekaj deset mikronov. Ti monokristali so močno anizotropni in sicer je odlikovana smer pravokotna na površino. Ker je Curiejeva temperatura teh feritov precej nad sobno, je magnetizacija v ploščici vedno nasičena.

Za opazovanje domen v taki ploščici lahko izkoristimo Faradayev pojav, to je vrtenje polarizacijske ravnine prepuščene svetlobe v odvisnosti od magnetizacije snovi. Za ta namen opremimo mikroskop s polarizatorjem in analizatorjem. Ravnina polarizirane svetlobe se pri prehodu skozi ploščico zasuka. V domenah, v katerih kaže magnetizacija v smeri prehoda svetlobe (navzgor), se zasuka v eno smer, v domenah z nasprotno magnetizacijo (navzdol) pa je kot zasuka nasproten. Če analizator nastavimo tako, da svetlobe z eno polarizacijo ne prepušča, vidimo domene v ploščici, na primer z magnetizacijo navzgor, kot temne in svetle lise.

Nastanek magnetnih mehurčkov

V ploščici, ki ni v zunanjem magnetnem polju, imajo domene obliko enakomerno širokih valovitih prog. Domene z magnetizacijo navzgor in domene z magnetizacijo navzdol zavzemajo enako površino.

Ko vključimo magnetno polje pravokotno na površino kristala in ga počasi večamo, se domene, v katerih se smer magnetizacije ujema s smerjo zunanjega magnetnega polja,



Sl. 2. Nastanek magnetnih mehurčkov v ploščici magnetnega materiala: ni zunanjega magnetnega polja (a), v šibkem polju (b) in v gostejšem polju (c). Slike so izseki z večjih fotografij, ki so jih napravili v Bell Telephone Laboratories [1]

širijo. Druge domene se ožijo, dokler ob določeni jakosti polja ne začnejo izginjati na robu, ali se krčiti v krožce. Tem krožcem pravimo *magnetni mehurčki*, čeprav so to v resnici valji, ki jih gledamo z vrha (sl. 2). Ob nadaljnjem večanju jakosti magnetnega polja proge izginejo, ostanejo samo mehurčki. Ti se manjšajo, potem pa vsi hkrati izginejo. Pri manjšanju polja se pojavi obrnejo, vendar s histerezo. Ko polje naposled izključimo, vidimo pod mikroskopom spet valoviti progasti vzorec.

Ravnovesni pogoji

Oglejmo si, kakšni so pogoji za ravnovesje osamljenega mehurčka. Za izhodišče si izberemo stanje, v katerem je vsa ploščica magnetizirana v smeri zunanega magnetnega polja, ki je pravokotno na njeno površino. Takemu stanju pripišemo energijo nič.

V tej ploščici naj nastane magnetni mehurček. Energijo novega stanja razdelimo na tri dele.

Prvi prispevek je površinska energija, to je energija, ki jo vsebuje mejna plast

$$W_p = \gamma S \quad (1)$$

γ je gostota površinske energije, S pa površina stene mehurčka.

Na magnetni mehurček deluje zunanje magnetno polje z jakostjo H_z . Ustrezni del magnetostatične energije mehurčka meri

$$W_H = 2\mu_0 H_z M V \quad (2)$$

Pri tem je V prostornina mehurčka, M pa velikost magnetizacije. Dvojko dobimo, ker štejemo energijo od stanja enakomerne magnetizacije v smeri jakosti polja H_z .

Tretji prispevek je magnetostatična energija zaradi polja z jakostjo H_M , ki ga na mestu mehurčka ustvarjajo vsi magnetni momenti v ploščici

$$W_M = -2\mu_0 M \int_V H_M dV$$

Ta del energije dobimo tudi drugače. V magnetostatiki namreč lahko formalno vpeljemo magnetne naboje

$$\rho_M = \operatorname{div} \mathbf{M}$$

s katerimi računamo enako kot z električnimi. Če je ploščica enakomerno namagnetena, je magnetizacija znotraj ploščice konstantna, skokoma pa se spremeni na obeh površinah. To opišemo s površinskim magnetnim nabojem, ki je na eni strani pozitiven (severni), na drugi pa negativen (južni). V delu, v katerem je smer magnetizacije nasprotna, so tudi predznaki površinskih nabojev nasprotni. Površinska gostota naboja σ_M je po velikosti enaka magnetizaciji ploščice. Za energijo sledi iz tega

$$W_M = -2 (\mu_0/4\pi) \int_S \int_{S'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \sigma_M \sigma_{M'} dS dS' \quad (3)$$

Količine brez črtice označujejo magnetni mehurček, s črtico pa preostali del površine ploščice. Tako izračunamo potencialno energijo magnetnih nabojev na površini mehurčka v polju ostalih nabojev. Pomnožiti smo jo morali z dve, ker štejemo energijo od stanja enakomerne magnetizacije.

Da je magnetni mehurček v ravnovesju, mora biti vsota vseh teh energij minimalna. Ker je formulacija pogoja za splošno obliko mehurčka računsko zapletena, se omejimo na valjasto obliko mehurčka. Proučimo odvisnost energije mehurčka od radija r_0 . S spreminja-

njem radija dobimo pravilen rezultat za celotno območje stabilnosti in za prehod, pri katerem magnetni mehurček izgine. Z našo omejitvijo pa ne opišemo prehoda, pri katerem se pri majhnih poljih mehurček razpotevne v progo.

Celotna energija je vsota treh prispevkov

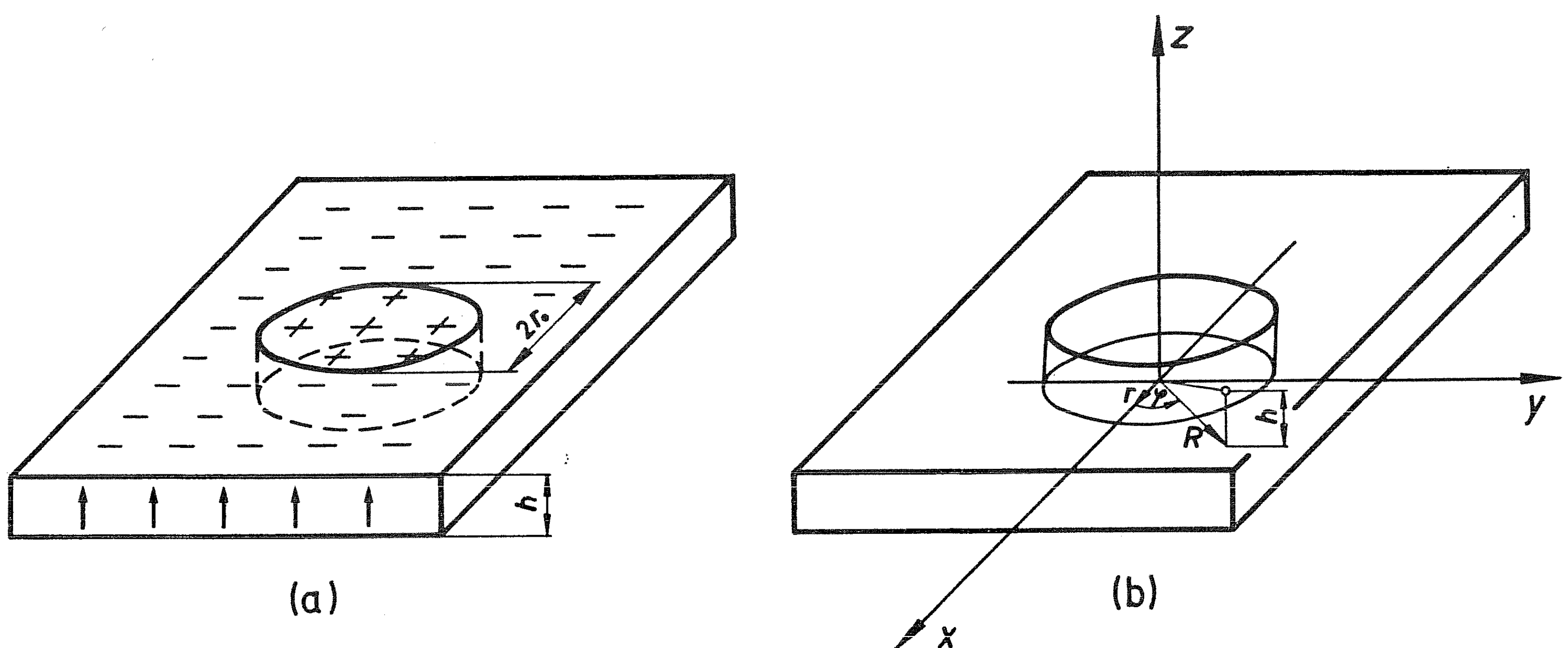
$$W = W_p + W_H + W_M$$

Prva dva prispevka skušata zmanjšati mehurček, zadnji pa zvečati, tako da je ravnovesje mogoče. V ravnovesju je

$$dW/dr_0 = 0$$

Prispevka W_p in W_H sta preprosta izraza (1) in (2). Z njunim odvajanjem ni težav, s prispevkom W_M pa je več dela. Ko vpeljemo polarne koordinate, se (3) takole izrazi:

$$W_M = -2 \cdot 2 (\mu_0/4\pi) M^2 \int_0^{r_0} 2\pi r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{\infty} [(R^2 - 2Rr \cos \varphi + r^2)^{-\frac{1}{2}} - (R^2 - 2Rr \cos \varphi + r^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}}] R dR$$



Sl. 3. Magnetni naboji na površini ploščice (a) in polarne koordinate, ki jih uporabljamo pri računanju magnetostatične energije mehurčka v lastnem polju ploščice (b)

Pomen oznak razberemo s sl. 3. Prvo dvojko dobimo zaradi spremembe znaka magnetizacije pri nastanku mehurčka, drugo pa zaradi integriranja po zgornji in spodnji površini ploščice. Z odvajanjem po r_0 in z integriranjem po R in r pridemo do rezultata v obliki

$$dW_M/dr_0 = -8\mu_0 M^2 [r_0 h (1 + d^2)^{\frac{1}{2}} E(k) - 2r_0^2]$$

če je

$$d = 2r_0/h \quad \text{in} \quad k = d^2/(1 + d^2)$$

$E(k)$ je popolni eliptični integral druge vrste.

Za ravnovesno velikost mehurčka dobimo nazadnje tale pogoj

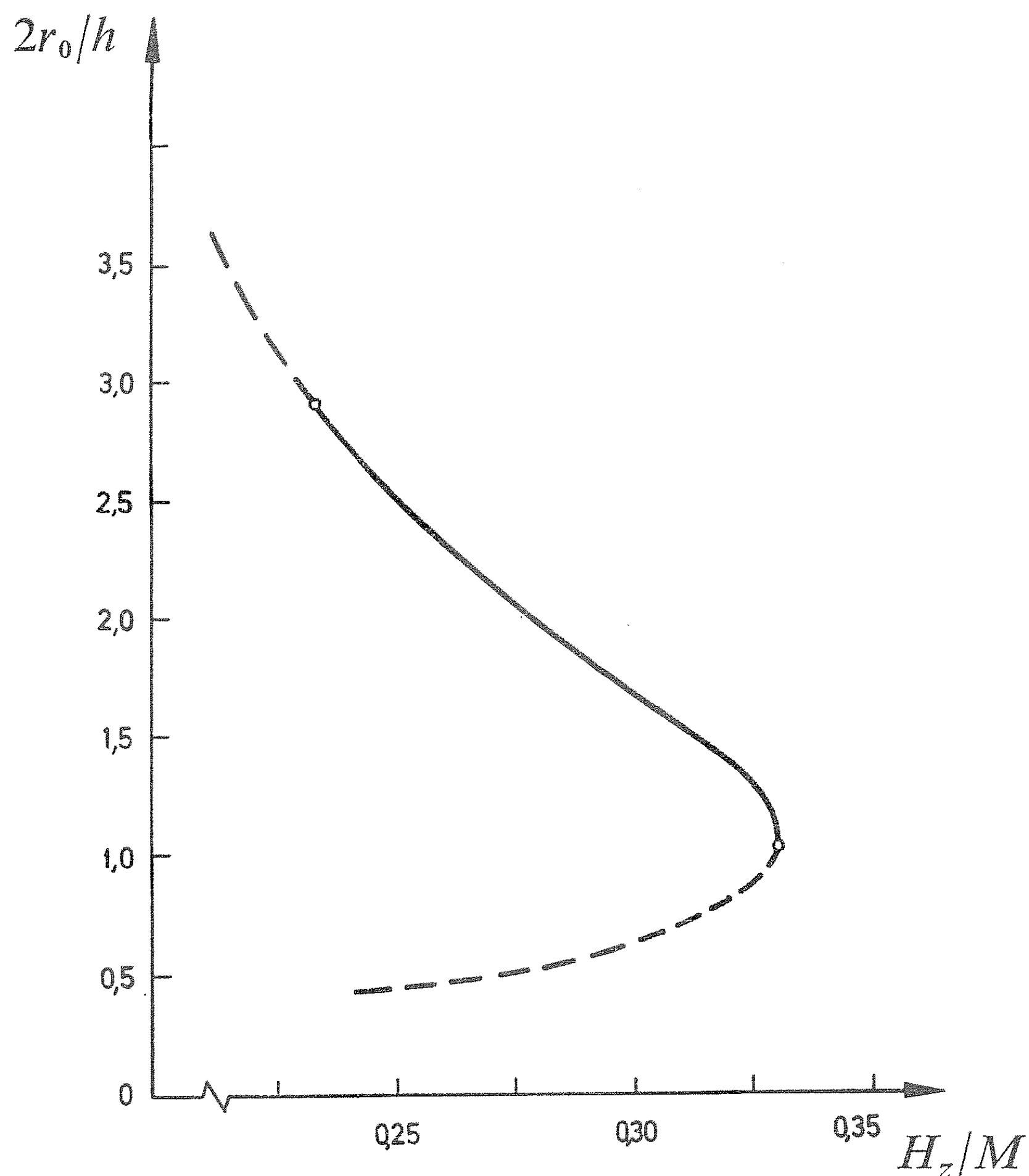
$$0 = 2\pi\gamma/h\mu_0 M^2 + 2\pi H_z d/M - 4d(1 + d^2)^{\frac{1}{2}} E(k) + 4d^2$$

Izberemo si ploščico, za katero velja

$$0,25 = \gamma/\mu_0 M^2 h$$

Za ta primer kaže slika 4, kako je ravnovesni radij odvisen od zunanjega magnetnega polja.

Pri določeni jakosti magnetnega polja dobimo dve rešitvi, vendar opisuje rešitev z manjšim radijem mehurčke v labilnem ravnovesju. Če tak mehurček motnja malo zmanjša, se mehurček skrči in izgine. Majhno povečanje pa povzroči, da se mehurček razširi do velikosti, ki jo predpisuje zgornja krivulja. Mehurčki, za katere velja $2r_0/h > 2,9$, so prav tako v labilnem ravnovesju. Vsaka motnja povzroči, da se razpotegnejo v proge.



Sl. 4. Odvisnost ravnovesnega radija magnetnega mehurčka od jakosti zunanjega magnetnega polja. Rešitve za majhen radij ($2r_0/h < 1$) in za velik radij ($2r_0/h > 2,9$) ustrezajo mehurčkom v labilnem ravnovesju

Uporaba magnetnih mehurčkov

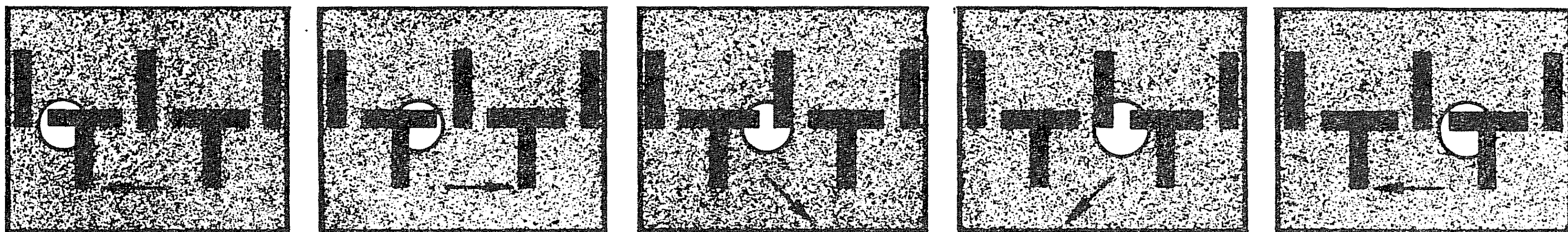
Magnetni mehurčki so zanimivi predvsem zato, ker jih že uporabljajo v novi vrsti računalniškega spomina. Stabilni so v območju sprememb zunanjega magnetnega polja za 20%; pri tem se jim premer spremeni v razmerju 1 : 3. Zaradi obstojnosti so mehurčki pripravi za shranjevanje podatkov. Za hitro obdelavo podatkov je primerna tudi njihova gibljivost. Že z majhnimi gradienti magnetnega polja jih je mogoče hitro premikati v ploščici. Za pot, ki je velika kot premer mehurčka, potrebujejo okrog 100 ns.

Prav v zvezi s premikanjem mehurčkov se je pojavilo več zanimivih fizikalnih problemov. Poleg običajnih, te so imenovali mehki, so opazili še tako imenovane trde magnetne mehurčke. Ti so se premikali nekajkrat počasneje, pri njihovem gibanju pa so opazili nekakšno vztrajnost. Trdi mehurčki niso več problem, saj se jih lahko znebijo s tem, da v površine ploščice vgradijo ione.

Osnovna misel, kako bi z mehurčki naredili računalniški spomin, je: mehurček naj pomeni binarno 1, prazen prostor pa 0. Tako je zaporedje mehurčkov in praznih prostorov binarno zapisana informacija, ki je shranjena v ploščici magnetnega materiala.

Prvi pogoj za delovanje takega spomina je kontrolirano premikanje mehurčkov v ploščici. Izmed različnih metod — še vedno jih preizkušajo — se je najbolj uveljavila metoda s krožnim magnetnim poljem. Pri tej metodi potrebujemo poleg zunanjega polja, ki je pravokotno

na površino ploščice, še dodatno magnetno polje, ki kroži v ravnini ploščice. Na nekatere dele površine ploščice je nanesen mehak magnetni material, ki ga krožeče polje magnetizira, tako da postane polje v ploščici nehomogeno. To spreminjajoče se polje potem premika mehurčke (sl. 5). Običajna frekvenca krožečega polja je 10^6 s^{-1} , kar vodi do hitrosti obdelave 10^6 bitov na sekundo.



Sl. 5. Premikanje magnetnega mehurčka s krožečim magnetnim poljem. Dodatno magnetno polje kroži v smeri kazalca na uri v ravnini ploščice, kot kažejo puščice. Ko polje kroži, se različni deli T-jev in I-jev, ti so narejeni iz mehkega magnetnega materiala, zaporedoma magnetizirajo. Če je vrh mehurčka njegov severni pol, ga zaporedoma privlačujejo južni poli T-jev in I-jev in mehurček se premika proti desni. En obrat magnetnega polja premakne mehurček za eno stopnjo naprej

Problem detekcije mehurčkov so uspešno rešili, prav tako problem generiranja mehurčkov ter njihovega uničevanja. Tako je danes mogoče kupiti 16 in 64 kilobitne spominske elemente. Njihova glavna prednost pred magnetnimi diski je trajnost in zanesljivost. Nimajo namreč nobenih gibljivih mehanskih delov in so desetkrat hitrejši. Zato napovedujejo, da bodo magnetni mehurčki v nekaj letih nadomestili magnetne trakove in diske na mnogih področjih njihove sedanje uporabe.

LITERATURA

- [1] A. H. Bobeck, H. E. D. Scovil, *Magnetic Bubbles*; Scientific American, 224 (1971) (6) 78.
- [2] S. Chikazumi, *Physics of Magnetism*; John Wiley, New York 1964.
- [3] A. H. Bobeck, *Properties and Device Applications of Magnetic Domains in Orthoferrites*; Bell System Tech. J. 46 (1967) 1901.
- [4] A. A. Thiele, *The Theory of Cylindrical Magnetic Domains*; Bell System Tech. J. 48 (1969) 3287.

DOMAČE VESTI

OBVESTILO

Po pravilih o podeljevanju priznanja učiteljem matematike, fizike in astronomije za delo z mladimi, Obzornik mat. fiz. 21 (1974), vabimo podružnice DMFA ter aktivne matematikov in fizikov na šolah, da do 1. oktobra 1977 predlagajo kandidate za priznanja za delo z mladimi.

Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov: DMFA SRS, Komisija za pedagoško dejavnost, 61001 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 227.

Sekretarka komisije:
Martina Koman

TRANSVERZALNI LASERSKI NIHAJNI NAČINI

BORIS VEDLIN

UDK 535.416.2

Članek obravnava osnovne lastnosti laserske svetlobe, na katere v pretežni meri vpliva laserski resonator.

TRANSVERSE LASER MODES

The paper deals with those basic properties of laser oscillations that are mainly affected by laser resonator.

Uvod

Mnoge lastnosti laserske svetlobe je mogoče zadovoljivo pojasniti z razmeroma preprostim, klasičnim prijemom. Dobljeni rezultati ne dajo samo kvalitativne slike o naravi razširjanja laserskega curka ali pulza, o interakciji z različnimi optičnimi elementi ter izvoru različnih laserskih *nihajnih načinov (modov)*, ampak so tudi odločilnega pomena pri načrtovanju laserskih resonatorjev.

Vsa teorija, ki temelji na upravičeni predpostavki, da je prečna dimenzija laserskega curka mnogo večja od valovne dolžine λ , se da razdeliti na tri dele. Prvi del sodi v geometrijsko optiko in obravnava prehod obosnih žarkov skozi različne optične sisteme. Drugi del je analiza laserskega resonatorja s stališča valovne optike. Tretji del, ki je razširitev drugega, vključuje uklon na optičnih elementih s končno velikostjo.

Teorija laserskih resonatorjev je pomemben vodič za konstruktorje laserjev. Od začetka šestdesetih let, ko so v rubinu kot prvi laserski snovi vzbudili vsiljeno sevanje, do danes, ko je skoraj nemogoče naštetih vse snovi, ki kažejo laserske lastnosti, je bil laserski resonator kot bistveni del vsakega laserja predmet številnih študij [1], [2].

Ta prispevek poskuša pojasniti temeljne lastnosti laserske svetlobe, na katere odločilno vpliva laserski resonator.

Valovna enačba

Laserski curek približno opišemo z ravnim valovanjem. Pri tem moramo upoštevati, da so v resnici valovne fronte nekoliko ukrivljene in se gostota energijskega toka zmanjšuje proti robovom curka. Komponenti gostote energijskega toka v smeri prečnih osi x in y sta mnogo manjši od komponente v smeri osi z , v smeri katere potuje valovanje. Pri izpeljavi enačb se tako brez izgube splošnosti lahko omejimo na eno razsežnost. Komponenta jakosti električnega polja E v laserskem curku zadošča valovni enačbi

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad (1)$$

k je velikost valovnega vektorja v snovi, v kateri potuje curek. Zaradi preprostosti predpostavimo, da je snov homogena.

Jakost električnega polja nastavimo kot produkt

$$E(x, y, z) = \psi(x, y, z) \exp(-ikz) \quad (2)$$

$\exp(-ikz)$ ustreza trenutni sliki ravnega valovanja v smeri osi z . $\psi(x, y, z)$ pa je funkcija, ki podaja razliko med ravnim valovanjem in laserskim curkom. V sebi skriva neenakomer-

nost jakosti električnega polja v prečni smeri, divergenco curka in njeno spreminjanje z razdaljo od aktivne snovi, ukrivljenost valovnih front in drugo. Vstavimo (2) v valovno enačbo (1):

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 - 2ik \partial \psi / \partial z = 0 \quad (3)$$

Drugi odvod $\partial^2 \psi / \partial z^2$ smo zanemarili, ker se ψ počasi spreminja v odvisnosti od z . Rešitev enačbe (3) je

$$\psi = \exp [-i (P + kr^2/2q)] \quad (4)$$

če je $r^2 = x^2 + y^2$. Rešitev vsebuje kompleksna parametra P in q . Parameter $P(z)$ je *fazna razlika*, ki je povezana z razširjanjem laserskega curka, $q(z)$ pa opisuje spreminjanje jakosti električnega polja z razdaljo r od osi in ukrivljenost valovnih front. Parametra P in q določimo posredno. Najprej vstavimo (4) v (3) ter primerjamo člene z enakimi potencami razdalje r . Rezultat je preprost sistem dveh novih diferencialnih enačb

$$\partial q / \partial z = 1 \quad (5) \quad \partial P / \partial z = -i/q \quad (6)$$

Integracija enačbe (5) pripelje do izraza za parameter q

$$q(z) = z + q_0 \quad (7)$$

v katerem je $q_0 = q(0)$.

Osnovni laserski nihajni način

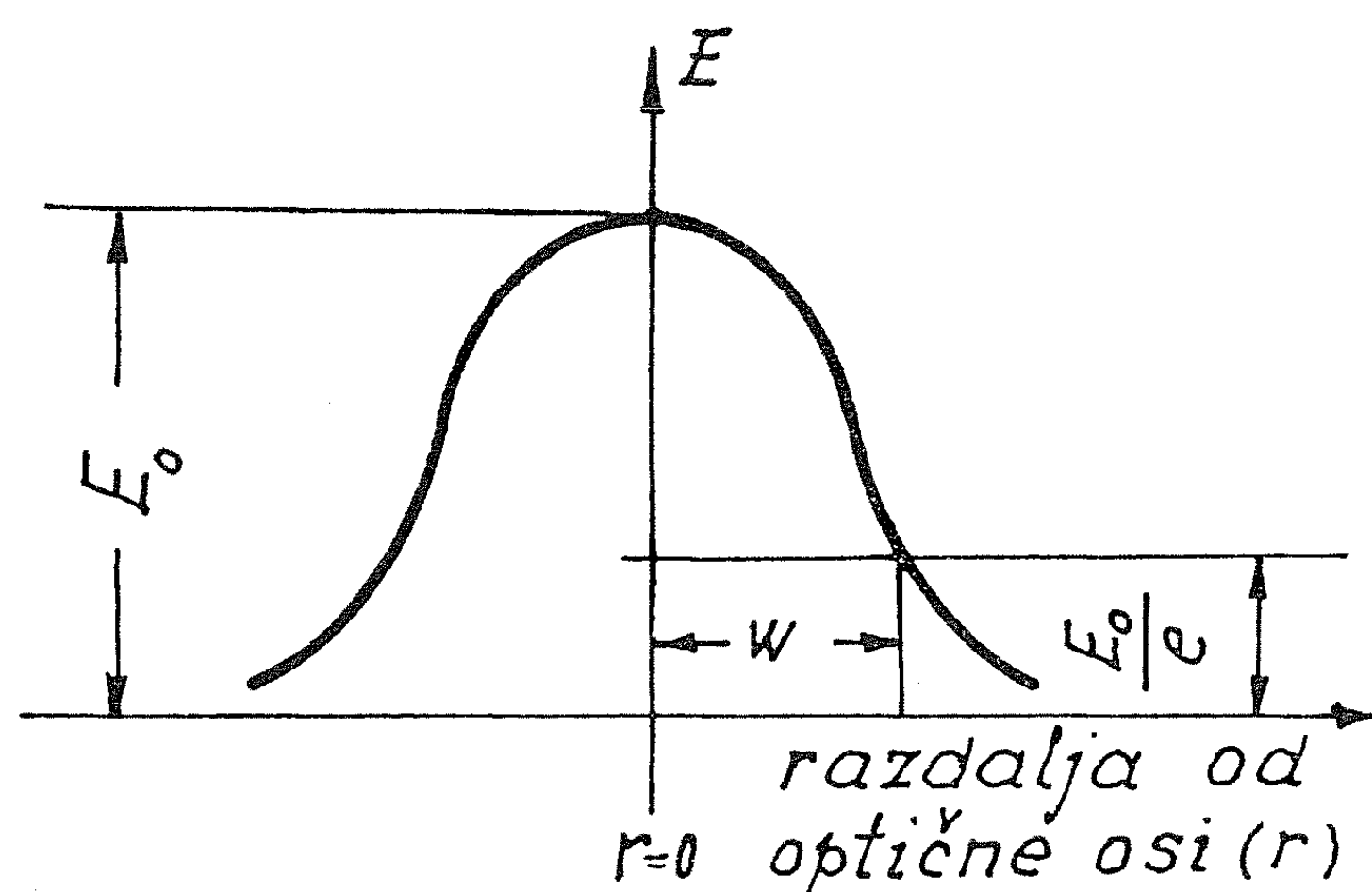
Koherentni svetlobni curek z Gaussovimi profilom (4), ki se imenuje *osnovni* ali *fundamentalni laserski nihajni način*, ni edina rešitev enačbe (3), je pa zanesljivo najpomembnejša. Zelo malo je namreč laserskih sistemov, pri katerih je zaželeno vzbujanje višjih nihajnih načinov.

Fizikalni pomen parametra q postane jasnejši, ko ga izrazimo kot

$$1/q = 1/R - i\lambda/\pi w^2 \quad (8)$$

Vstavimo (8) v (4) pa ugotovimo, da je $R(z)$ krivinski radij valovne fronte, ki preseka optično os pri z , $w(z)$ pa meri zmanjšanje amplitude električne poljske jakosti z razdaljo od optične osi. Očitno je gostota svetlobnega toka osnovnega nihajnega načina največja na optični osi, z razdaljo od osi pa pada kot Gaussova funkcija (sl. 1). Pri razdalji w se amplituda jakosti električnega polja zmanjša na E_0/e , če je E_0 vrednost na optični osi. Parameter w je mera za prečno razsežnost laserskega curka, $2w$ je *premer curka*.

Nekje, običajno v notranjosti resonatorja ali pri enem od ogledal, ima Gaussov laserski curek *grlo* (angl. waist). Tam je premer curka najmanjši. V grlu postane krivinski radij



Sl. 1. Jakost električnega polja, $r = 0$ ustreza optični osi

valovne fronte neskončen in valovna fronta ravna. Naj bo grlo izhodišče koordinatnega sistema ($z = 0$), najmanjši premer curka pa $2w_0$. Kompleksni parameter q postane pri $z = 0$ čisto imaginaren:

$$q_0 = i\pi w_0^2/\lambda \quad (9)$$

Upoštevajoč (7) in (9) dobimo

$$q(z) = z + i\pi w_0^2/\lambda \quad (10)$$

Primerjajmo enačbi (8) in (10) in izenačimo realne in imaginarne člene:

$$w^2(z) = w_0^2 [1 + (\lambda z/\pi w_0^2)^2] \quad (11)$$

in

$$R(z) = z [1 + (\pi w_0^2/\lambda z)^2] \quad (12)$$

Manjka še fazna razlika med Gaussovim curkom in idealnim ravnim valom kot funkcija razdalje od izhodišča koordinatnega sistema. Upoštevamo (6) in (10):

$$\partial P/\partial z = -i/q = -i/[z + i(\pi w_0^2/\lambda)] \quad (13)$$

Integracija te enačbe privede z upoštevanjem zveze $\ln(a + ib) = \ln \sqrt{a^2 + b^2} + i \arctg(b/a)$ do

$$iP(z) = \ln \sqrt{1 + (\lambda z/\pi w_0^2)^2} - i \arctg(\lambda z/\pi w_0^2) \quad (14)$$

Realni del parametra P je iskana fazna razlika Φ , imaginarni del pa vključuje pričakovano zmanjšanje gostote svetlobnega toka na optični osi za faktor w_0/w zaradi divergence curka. Z dobljenimi rezultati za osnovni laserski nihajni način postane (2)

$$E(x, y, z) = [w_0/w(z)] \exp \{ -i[kz - \Phi(z)] - r^2[1/w^2(z) + ik/2 R(z)] \} \quad (15)$$

če je

$$\Phi(z) = \arctg(\lambda z/\pi w_0^2) \quad (16)$$

Izraz (15) se dobro ujema z izmerjenimi karakteristikami osnovnega nihajnega načina številnih laserjev.

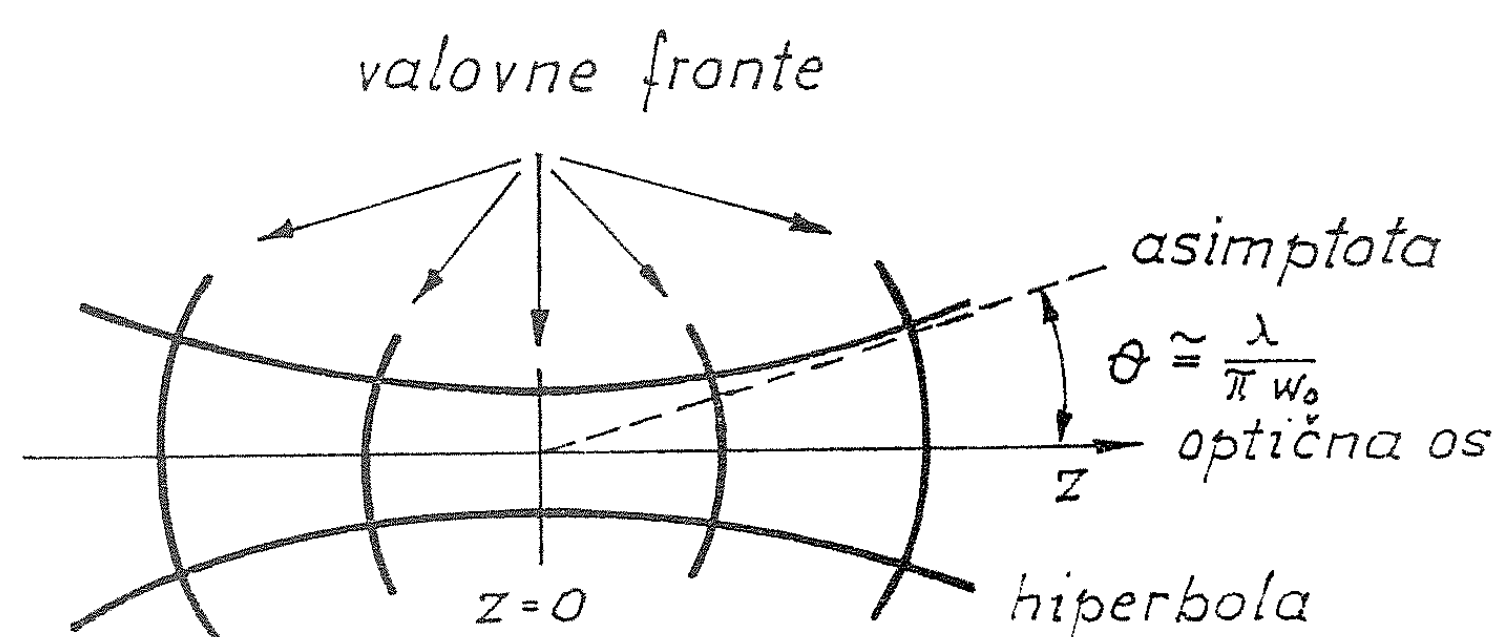
Divergenca

Zgradbo osnovnega nihajnega načina določata položaj grla in najmanjši premer curka $2w_0$. Premer $2w$ in krivinski radij R v poljubni razdalji dasta enačbi (11) in (12) (sl. 2).

Ni težko spoznati, da je funkcija, ki povezuje premer curka $2w$ in razdaljo z , hiperbola. Pri večjih razdaljah z se hiperbola vse bolj približuje asimptoti, ki je glede na optično os nagnjena za kot ϑ (sl. 2)

$$\vartheta = \arctg(\lambda/\pi w_0) = \lambda/\pi w_0 \quad (17)$$

Kot ϑ , ki pove, kako se razširi laserski curek z najmanjšim premerom $2w_0$ v resonatorju pri $z = 0$, je očitno posledica uklona. Laserski curek, ki potuje na primer skozi ozračje, se še dodatno razširi zaradi sipanja v zraku.



Sl. 2. Divergenca laserskega curka

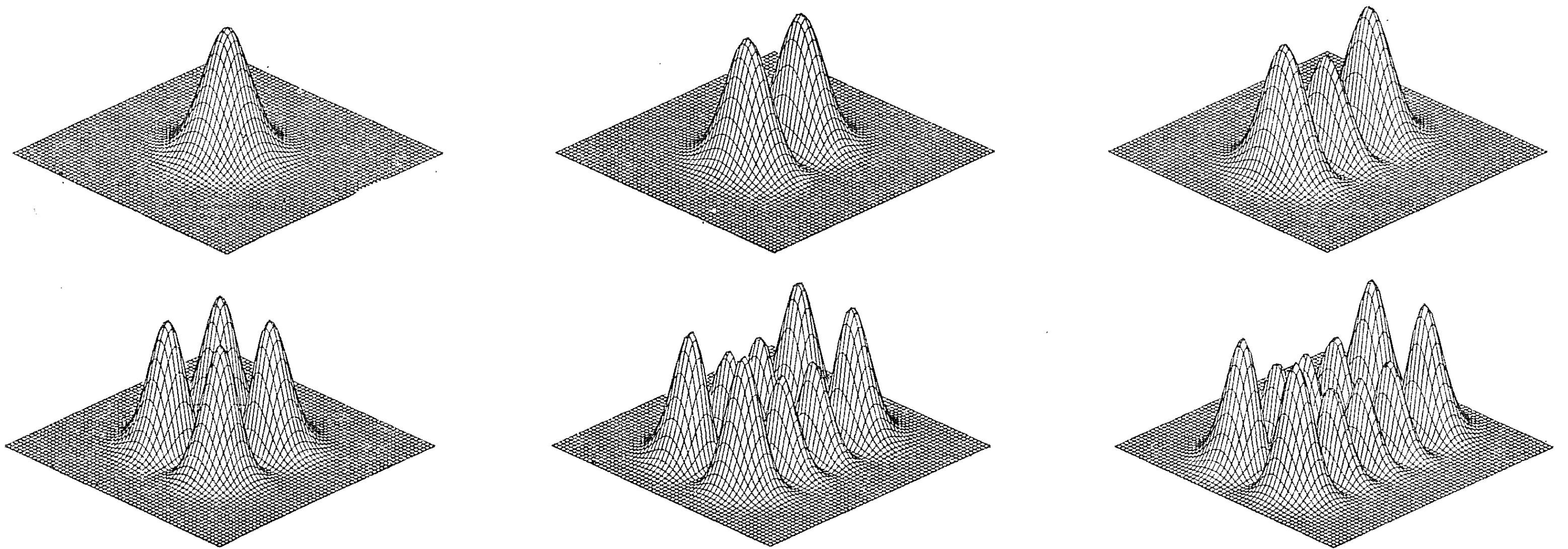
Pri osnovnem laserskem nihajnem načinu nastopa le odvisnost od razdalje z in radija r . Druge, bolj zapletene rešitve so odvisne še od azimuta φ (v cilindričnih koordinatah r, φ, z). Vse rešitve enačbe (1) sestavljajo poln ortogonalen niz funkcij, katerega členi TM_{mn} so *transverzalni laserski nihajni načini reda m krat n* . (Transverzalne nihajne načine moramo razlikovati od longitudinalnih, katerih izvor je popolnoma drugačne narave.) Pomen indeksov m in n je razviden iz splošne rešitve enačbe (1)

$$E = (w_0/w) H_m(\sqrt{2} x/w) H_n(\sqrt{2} y/w) \exp \{ -i [kz - (m + n + 1) \Phi] - r^2(1/w^2 + ik/2R) \}$$

(18)

H_m in H_n sta Hermitova polinoma reda m in n .

Jakost električnega polja v laserskem curku torej izrazimo kot produkt Gaussove funkcije in Hermitovih polinomov. Reda Hermitovih polinomov m in n določita, kolikokrat funkcija E zamenja predznak ali gostota toka $\frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2$ pade na nič. Področja načina nihanja z negativno vrednostjo E imajo nasprotno fazo kot področja s pozitivno; to pokažejo različni interferenčni poskusi.



Sl. 3. Laserski nihajni načini različnih redov

V zgornji vrsti so nihajni načini TM_{00} , TM_{10} , TM_{20} , v spodnji pa TM_{11} , TM_{31} , TM_{41}

Gostote svetlobnega toka v laserskih curkih, ki ustrezajo različnim načinom nihanja, ni težko meriti. Aksonometrično narisano jo kaže sl. 3. Gostota svetlobnega toka v izbranih točkah, ki so enakomerno porazdeljene po prečnem preseku laserskega curka, je izračunana z (18). Vodoravna ravnina (x, y) ustreza prečnemu preseku laserskega curka.

Zaključek

Študij in analiza nihajnih načinov laserskega valovanja sta pomembna zaradi teoretičnega razumevanja in uporabne vrednosti. Zgradba laserskega nihajnega načina vpliva na energijski tok v curku, njegovo enobarvnost in kotno divergenco. Velik energijski tok, ozka spektralna črta in majhna divergenca laserskega curka so zahteve, ki jim na splošno težko hkrati zadostimo. Optimalna izbira laserskega sistema je odvisna od konkretnega namena.

Transverzalne nihajne načine lahko razmeroma enostavno demonstriramo. Helijsko-neonski laser jasno pokaže vse nihajne načine od $m = n = 0$ (osnovni nihajni način) do približno $m = n = 10$. Različne nihajne načine vzbudimo z majhnim spreminjanjem nagiba enega od ogledal laserskega resonatorja.

LITERATURA

- [1] H. Kogelnik, T. Li, *Laser Beams and Resonators*, Proc. IEEE **54** (1966) 1312.
- [2] A. Yariv, *Quantum Electronics*, New York, John Wiley & Sons, 1975.

DOLGOŽIVIH SUPERTEŽKIH JEDER NI?

Pred slabim letom so prvič poročali o *supertežkih atomskih jedrih* v naravi [1]. Od tistega časa je začetno navdušenje ob presenetljivem odkritju prešlo v zadržanost in pozneje v resen dvom. Po novih merjenjih supertežka jedra — če sploh obstajajo — niso tako dolgoživa, da bi v znatni koncentraciji nastopala v naravi.

Na misel o obstoju dolgoživih supertežkih jeder so prišli ob proučevanju vključkov monacita v sljudi z Madagaskarja. Izbrali so vključke, ki so jih obdajali veliki kolobarji razbarvane sljude. Snov iz vključkov so obstreljevali s curkom protonov s kinetično energijo več megaelektronvoltov. Hitri protoni so izbijali elektrone iz elektronskih ovojnic atomov. Merili so spekter rentgenske svetlobe, ki so jo sevali atomi, ko so elektroni z višjih nivojev prehajali na najnižje izpraznjene nivoje. Posebno skrbno so preiskali spekter med zadnjo črto L urana pri energiji 21,5 keV in prvo črto K redkih zemelj pri energiji 33 keV. V spektru z najboljšo dosegljivo ločljivostjo so na tem območju opazili več šibkih črt, ki so jih pripisali supertežkim elementom [1].

Ker pozneje nihče ni mogel potrditi teh ugotovitev, je nastal resen dvom o obstoju dolgoživih supertežkih elementov. Na državnem laboratoriju v Oak Ridgu so se namenili končati to negotovost. Pri tem je sodeloval tudi R. V. Gentry, ki je sprožil prva merjenja [2]. Obstreljevanje s protoni ni najpripravnejši merilni način. Protoni lahko namreč povzročijo jedrske reakcije, pri katerih nastanejo fotoni γ ali jedra v vzbujenem stanju, ki sevajo fotone γ pri prehodu v osnovno stanje, na primer $^{140}\text{Ce} (p, n) ^{140}\text{Pr}$. Motijo tudi črte K elementov pete periode, ki imajo valovne dolžine na območju črt L supertežkih elementov.

Namesto curka protonov so uporabili curek enobarvnih fotonov. Z njim so obsevali snov iz vključkov z velikimi kolobarji in opazovali fluorescenčno rentgensko svetlobo. Energijo fotonov so izbrali tako, da so čim manj motile fluorescenčne črte K elementov pete periode. Tem črtam se sicer niso popolnoma izognili, vendar jih je bilo mogoče zanesljivo identificirati. Brž ko pade energija vpadnih fotonov pod energijo roba K za izbrani element, v spektru namreč ni več črt K tega elementa.

Izkoristili so nadvse zanimiv izvir fotonov. Elektroni, ki krožijo v prečnem magnetnem polju v cevi nakopičevalnika SPEAR pri stanfordskem linearnem pospeševalniku, v ravnini kroženja izdatno sevajo sinhrotronsko sevanje z zveznim spektrom. Iz njega so izločili curek enobarvnih fotonov s kristalnim monokromatorjem iz piroliznega grafitu [3]. Ta je bil upognjen v lok z radijem 10 cm, tako da ni samo izločil fotonov z želeno energijo, ampak je tudi zbral njihov curek. Monokromator so postavili v ravnino nakopičevalne cevi v razdalji 17 m od cevi in ga usmerili tako, da je bil curek fotonov z energijo 37,4 keV pravokoten na to ravnino. V curku je bilo $4 \cdot 10^{10}$ fotonov na sekundo, ko je bila kinetična energija elektronov 3,4 GeV in njihov tok v nakopičevalni cevi 20 mA. Spekter rentgenske svetlobe so premerili s polprevodniškim števcem iz silicija s primesjo litija. Med snov iz vključka, ki je bila nalepljena na politenski trak, in števec so dali še bakren filter, da števca ni zadelo več kot desettisoč fotonov na sekundo.

Po vrsti so preiskali snov iz enajstih vključkov z velikimi kolobarji iz kosa sljude, iz katerega so dobili snov tudi za prva merjenja s protoni. Najizrazitejše so bile fluorescenčne črte L torija in urana. Črte L supertežkih atomov z vrstnim številom med 105 in 129 bi morale ležati na območju med 22 keV in 31 keV. To območje so skrbno preiskali z najboljšo dosegljivo ločljivostjo. Na njem so zasledili nekaj zelo šibkih črt, ki so jih zanesljivo identificirali

s črtami K_α in K_β kadmija in kositra. Pri energiji, pri kateri bi morala ležati črta L super-težkega elementa z vrstnim številom 126, ni bilo niti sledu kake črte [2]. Po tem so sklepali, da v monacitnih vključkih z velikimi kolobarji ni supertežkih elementov ali pa je njihova koncentracija zelo majhna, vsaj desetkrat manjša, kot so mislili po prvih merjenjih s protoni. Ta sklep in podobni sklepi drugih skupin so dokončno ovrgli »odkritje« supertežkih elementov. To »odkritje«, ki bo zdaj verjetno utonilo v pozabo*, pa je vzpodbudilo mnogo novih merjenj in močno povečalo zanimanje za supertežke elemente.

Kaže, da so med tem našli tudi boljšo razlago za nastanek velikih kolobarjev [6]. Sljuda izvira iz geološkega razdobja, v katerem je bila temperatura sorazmerno nizka. Tako je čisto mogoče, da so nekateri vključki vsebovali vodo. Vključki z velikimi kolobarji naj bi se tedaj razločevali od vključkov z navadnimi kolobarji po primesi vode. Delci α , ki so jih oddajala radioaktivna jedra v vključkih, so izbijali protone iz molekul vode. Doseg teh protonov v sljudi pa je precej večji kot doseg delcev α . Medtem ko doseg delcev α iz znanih naravnih sevalcev α ne more preseči kakih $60\ \mu\text{m}$, imajo odri-njeni protoni po trku z delci α lahko do petkrat večji doseg. Model, v katerem so upo-števali razpad jeder torija in urana, je dal za radij velikega kolobarja okoli $80\ \mu\text{m}$. To je glede na nepopolne podatke kar zadovoljiv rezultat. Gostota sevalnih poškodb v kri-stalni mreži sljude okoli vključka namreč zelo hitro pojema z naraščajočo razdaljo od vključka in so razmere ob robu kolobarja prezapletene, da bi mogli zanesljivo napove-dati njegov radij. Med drugim je radij odvisen tudi od tega, kaj se je s sljudo dogajalo v poznejših geoloških razdobjih.

* Ker traja tiskanje znanstvenih revij precej časa, bodo še nekaj časa izhajali odmevi na »od-kritje«. V tej zvezi omenimo dva najnovejša članka. V prvem je eden izmed sodelavcev pri prvih merjenjih ponovno skrbno obdelal ta merjenja [4]. Ugotovil je, da tedaj niso pravilno določili ozadja. Še vedno pa je vztrajal pri tem — le z manjšo zanesljivostjo, — da obstajajo dolgoživa supertežka jedra. Drugi članek [5] podrobno obravnava kemijske lastnosti supertežkih elementov z vrstnima številoma 114 (ekasvinca) in 116 (ekapolonija).

Janez Strnad

LITERATURA

- [1] Strnad J., *Supertežka jedra?* Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 48.
- [2] Sparks C. J., Raman S., Yakel H. L., Gentry R. V., Krause M. O., *Search with Synchrotron Radiation for Superheavy Elements in Giant-Halo Inclusions*, Phys. Rev. Letters **38** (1977) 205.
- [3] Lavrenčič B., *Pirolizni grafit — najbolj anizotropna snov*, Obzornik mat. fiz. **11** (1964) 28.
- [4] Fletcher, N. R., *Reevaluation of Background in Superheavy Element Data*, Phys. Rev. Let-ters **4** **38** (1977) 479.
- [5] Grant I. P., Pyper N. C., *Theoretical Chemistry of Superheavy elements E116 and E114*, Nature **265** (1977) 715.
- [6] Von Wimmersperg U., Sellschop J. P. F., *Proton-Induced Giant Halos in Mica from Inclusions Containing Water*, Phys. Rev. Letters **38** (1977) 886.

NA RAZPOTJU*

Ah, kako mi dobro de,
ko že mladež rosnohlača
 x , y , skupaj z z
v bistrih glavicah obrača.

Jevgenij Sazonov

Tovariši in tovarišice!

Prav gotovo ste radovedni, o čem bom govoril. Priznati moram, da sem to radovednost z vami vred čutil tudi jaz vse do zadnjih dni. Posvetovanje je tako široko zastavljeno, da si vseh vprašanj, ki sodijo sem, niti naštetih ne upam, kaj šele, da bi jim odgovore iskal. Vse, kar bom nadrobil, so čisto osebna razmišljanja, referata o pogledih in stališčih društva v mojih besedah ne smete iskati.

Preden spregovorimo o pouku matematike, posvetimo nekaj pozornosti šoli, ki mu določa pogoje in okvire.

Šola, kjerkoli na svetu že je, je razpeta med pisana protislovja. Nekatera tiče že kar v definiciji šole, druga v njenih zvezah z družbo, ki ji služi. Prvo in za nas najzanimivejše je nasprotje med institucijo in osebnostjo. Na eni strani je šola kot organizacija, ki bi bila rada popolnoma urejena, v kateri bi bilo vse do potankosti za leta in leta vnaprej predpisano. Na drugi strani stoji učitelj kot samostojna osebnost, ki suvereno obvlada živo znanje in ga, prav zato, ker je živo, obvlada vsak dan drugače in ne trpi vnaprejšnjih shem.

Šola ima več družbenih funkcij, ki si niso čisto navzkriž, lahko pa ena drugo kaze. Prva, najbolj značilna naloga je pač posredovanje znanja, vzgoja mladih osebnosti, povezovanje novega rodu z zakladi, ki jih je ustvarilo človeštvo do današnjega dne, s cilji, ki si jih je družba zastavila za jutrišnji dan.

To je prva, ni pa edina naloga šole. Zahodna sociologija na primer priznava tole preprosto socialno nalogo: šola zadržuje mladino v svojih stenah, dokler ne dozori za tržišče delovne sile, če je treba, pa tudi zmanjšuje njen pritisk na tržišče delovne sile. Prav ob matematiki pa smo videli, da je šola sama lahko tržišče in lovišče. Na vse te naloge ne smemo gledati črno-belo. Še ena naloga je, to pa vidim v čisto črni luči: šola izdaja spričevala in podeljuje naslove.

Našteli smo le nekaj najbolj znanih vzvodov, ki krmarijo današnjo šolo. Ker je vzvodov mnogo, je včasih težko razbrati, kateri tiči za posameznim vzgibom. Vzemimo za primer obvezno splošno izobrazbo. Prav gotovo je široko razgledana osebnost eden od idealov socialistične družbe. Zato bo družba ta delež v izobrazbi povečevala, kolikor ji bodo dovoljevale gmotne možnosti. Podaljševanje šolanja, bodisi da gre za obvezno bodisi za prostovoljno nadaljevanje do najvišjih stopenj, pa ima lahko tudi druge vzroke in vzpodbude. Večji pritok na višje šole lahko upravlja družba po svojih potrebah, lahko pa ga povzroča tudi naraščajoči osebni standard. Ta povečani pretok pa marsikje že spreminja naravo univerze, prava univerza, pravijo, naj bi se začela šele na tretji stopnji, sedanja univerza pa naj bi se spremenila v srednjo šolo.

Ne morem se premagati, omeniti moram še dve ekstremistični gibanji, ki izhajata iz prvega protislovja. Prvo je programirano učenje, kakršno se je izleglo iz behaviorizma in je videlo svoj cilj v natančno predpisanem poteku pouka. Pri nas ga poznamo le od daleč, iz tihe želje po učbenikih, ki bi delali z učitelji, ker učitelji, kali ne znajo delati z učbeniki. Drugo skrajnost, ki povsem zanika šolo kot ustanovo, pa oznanja jezuit-razšolnik Ilich. Pri nas tudi sem

* Ta sestavek je avtor prebral na občnem zboru društva leta 1976 v Bernardinu.

ter tja slišimo, da je šola nasilje nad mladino. Če za hipec na to gledanje pristanemo, moramo reči, da je nasilje pri matematiki še največje. Učenec se ne more prostovoljno odločiti, kaj naj ga šola uči, saj bo snov, o kateri mora odločati, poznal šele potem, ko ga bodo že naučili. V resnici pa je matematika pač znanost, ki je namenjena romantikom. Romantikom, ki so pripravljeni oditi na daljno iskanje v neznano, ki se ne ustrašijo naporov, ki vidijo svoje cilje in poti v ciljih in poteh človeštva. Šola pa je zato, da jim pomaga čez že uhojene poti.

Splošni uvod nas je že zapeljal v matematiko, k težnjam, ki smo jih izbrali za današnje kramljanje. Prepričani smo, da je znanost živ organizem, ki se neprestano gradi in prezidava, vsak dan spreminja svoj obseg in obnavlja svojo podobo. Šola, ki naj spremlja življenje znanosti, mladini posreduje njeno današnjo podobo in jo usposablja za jutrišnje ustvarjanje, se mora tudi sama spreminjati. O potrebi šolske reforme, še več, o nujnosti njenega neprestanega spreminjanja, nihče ne dvomi. Vprašanja zakaj, kam in kako pa že lahko rode spore. Tudi tam, kjer soglasno vemo kam, sta lahko zakaj in kako sporna, še več, vodita lahko čisto drugam.

Kako je torej s sodobnimi težnjami pri pouku matematike? Brez pretiravanja lahko rečemo, da je teh teženj danes toliko kot še nikoli. Toda malce podrobnejši pregled pokaže, da gre za dve, nasprotujoči si skupini teženj, za boj med matematiko in novomatematiko. In še to vidimo, da v goščavi teženj prevladuje novamatematika, matematiko predstavlja eno samo drevo.

Novamatematika je dedič starega, okostenelega pouka matematike. Nastala je ob spoznanju, da je šola imenitno tržišče, njena zgodovina je boj za tržišče med neštevilnimi konkurenčnimi projekti, njena vsebina je uboga: iz matematike si je izposodila nekaj definicij, na primer unijo in presek množic, in iz njih napravila celo znanost, ki se da poučevati štiri leta in še več. Metodično je razpeta med staro togo računstvo s tisoči vaj in izmišljenih primerov iz življenja in matematiko kot igro, ki je brez zveze z življenjem.

Kritiko nove matematike dobro poznamo, saj je Obzornik za matematiko in fiziko objavljal vse pomembnejše pomisleke zoper njo. Pogledom na pouk matematike je posvečena prva številka »Nastave matematike«, pa tudi v druge časopise je zašel kak utrinek.

Kritika nove matematike seveda ni kritika teorije množic. Vsi dobro vemo, kako uporabna je pri pouku matematike. V osnovni in v srednji šoli ji moramo posvetiti toliko pozornosti, kolikor je zasluži zaradi svoje uporabe. Ker uporabljajo množice v vsakdanjem življenju le metodiki, lahko primere te vrste zožimo na minimum.

Vodilo pri spreminjanju pouka je v očitni resnici: nihče ne more poučevati matematike drugače, kakor jo sam razume. Spremembe pri pouku odražajo spremembe v našem razumevanju. Pouk bomo lahko posodobili tem bolj, čim bolj bomo poglobljali svoje razumevanje. Stalno izobraževanje je geslo, ki velja predvsem za učitelja samega. Naloge, ki si jih bo naložilo društvo v prihodnjem preoblikovanju našega šolstva, bodo prav v tem poglobljanju. Morda cilji bodoče šole še niso popolnoma jasno načrtani, morda so poti, ki naj bi vodile k zastavljenim ciljem, speljane drugam, morda lahko podvomimo o gmotnih pogojih, toda svojo, matematično nalogo lahko vidimo že zdaj, ko vsa vprašanja še niso pojasnjena. Matematiki in fiziki odpirajo posebno lepe možnosti vzporedni tečaji, društvo bo lahko skrbelo za vedno novo vsebino teh tečajev, za literaturo, za stalno rast kadrov. Seveda se zavedam, da je tudi ta naloga šole in društva odvisna od bogastva in radodarnosti družbe, tak model šole zahteva manjšo učno obveznost, zato pa takoj več učiteljev. Ker je naloga tudi kadrovska, je težja od uvedbe kalkičev, ki jih bomo lahko predpisali in uporabljali tisti hip, ko bo denar zanje.

Opisovanje vsega, kar dobro poznamo, bi bilo odveč. Zato naj le ob živem primeru pokažem, kako se spreminjajo pogledi, kako jim sledi pouk. Poskusil bom povedati, kako sem se moral trikrat doslej naučiti, kaj je to odvod.

V začetku je bila klasična definicija odvoda. Funkcija ene spremenljivke, diferenčni kvocient, limita, odvod, tangenta, pa funkcije več spremenljivk, parcialni odvodi, Jacobijeva determinanta in morda še kaj.

Diferencial, na primer. Ob diferencialu sem se drugič srečal z odvodom in z odvedljivostjo ali z diferenciability funkcij. Spominjam se, da je bilo to kdo ve kdaj na predavanju profesorja Đ. Kurepe. Vzel je odvedljivo funkcijo ene spremenljivke $f(x)$, zapisal njen diferencial $f'(x)dx$ in pojasnil, da je to funkcija dveh neodvisnih spremenljivk, prva je x , druga dx . In še ne smemo prezreti, da je diferencial funkcije od dx odvisen linearno. Odtod naprej pa je kar zaropotalo — namesto dx pišimo h —: funkcija $f(x)$ je diferenciable v točki x , če se tam dotika linearne funkcije

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + o(h) \quad (1)$$

($o(h)$ pomeni funkcijo, ki gre proti 0 hitreje kot h). Ta definicija je globlja od prejšnje. Z istimi besedami lahko definiramo odvedljive funkcije med poljubnimi normiranimi linearnimi prostori $f: X \rightarrow Y$. Tedaj moramo z x in h razumeti vektorja iz X , vsi členi na obeh straneh (1) pa leže v Y . Odvod $f'(x)$ je sedaj linearni operator, ki vektor h iz X preslika v vektor $f'(x)h$ v Y . Naj bosta na primer X in Y končno razsežna prostora. Tedaj v izbranih bazah zapišemo $f'(x)$ z matriko, ki ji pravimo Jacobijeva matrika. Njeni elementi so funkcije, ki jim pravimo parcialni odvodi koordinat vektorja f po koordinatah vektorja x . Definicija je še vedno uporabna, če je ta ali oni prostor neskončno razsežen. Naj bo na primer X prostor zveznih funkcij nad kakšnim intervalom, Y pa prostor realnih števil. Preslikavi $X \rightarrow \mathbb{R}$ pravimo funkcional. Odvedljivi funkcional definiramo z istimi besedami kot prej, z njim pa smo, kot se še spominjamo, stopili v variacijski račun. Novo definicijo odvoda, in z njo klasično analizo, smo vgradili v funkcionalno analizo, v teorijo linearnih prostorov, linearnih funkcionalov in linearnih operatorjev. To je, mimogrede povedano, tisti del matematike, ki je tesno povezan s kvantno mehaniko.

S tretjo definicijo odvoda sem se moral spoprijeti šele nedavno. Druga definicija odvoda nas je popeljala v linearno analizo, tretja pa vodi v nelinearno ali globalno analizo, dobro se usede šele, ko jo podpremo s topologijo. Za današnje kramljanje bo najbrž dovoljena nekoliko površna beseda. Sedaj bodi f gladka preslikava (morfizem) med mnogoterostma X in Y . Mnogoterost, kot morda še vemo, je topološki prostor, ki je skrpan iz evklidskih zaplat: vsaka točka ima okolico, ki je homeomorfna odprti množici evklidskega prostora. Če je mnogoterost povezana, gre to le, če so vse zaplate iste dimenzije. To razsežnost pripišemo mnogoterosti. V vsaki točki x pripnemo na mnogoterost X tangentni prostor $T_x X$. Vse tangentne prostore povežemo v disjunktno unijo, ki ji pravimo tangentni snop. Tangentni snop nad n -razsežno mnogoterostjo je $2n$ -razsežna mnogoterost TX . Morfizem $f: X \rightarrow Y$ spremlja tangentni morfizem med tangentnima svežnjema $Tf: TX \rightarrow TY$. Takole deluje: točki x iz X priredi točko $f(x)$ v Y , tangentni prostor $T_x X$ v točki x preslika v tangentni prostor $T_{f(x)} Y$ v točki $f(x)$, zožitev $T_x f: T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ pa je linearna transformacija, ki jo opisuje Jacobijeva matrika.

Vsaki mnogoterosti smo priredili tangentni snop, vsakemu morfizmu tangentni morfizem. Sestavili smo tangentni funktor T med kategorijo gladih mnogoterosti in kategorijo vektorskih snopov. Odvod iz linearne teorije nastopa sedaj kot del tangentne preslikave.

To, kar sem doživel ob odvodu, doživlja tudi pouk na univerzi od osvoboditve sem. V začetku je prevladovala klasična analiza, v zadnjih desetletjih je bila osnova našega pouka funkcionalna analiza ali — bolj natanko — linearna funkcionalna analiza, v novih programih za teorijsko smer, pa tudi v strženu vseh smeri se že oglašča globalna analiza, povečana sta delež in vpliv topologije.

V srednji šoli smo zadovoljni z jasno klasično analizo, ki temelji na dobro razumljenem urejenem obsegu realnih števil in na obravnavi preprostih realnih funkcij. Tu in tam se seveda definicije že spogledujejo z novjšimi poglavji. Če se bojite, da bo tretja podoba univerzitetnega pouka prekrenila tudi pouk na srednji šoli, naj vas potolažim: sedanji program srednje šole je po meri tudi novemu univerznemu programu.

Pouk matematike smo najprej spremenili na univerzi, potem pa smo reformo počasi nadaljevali v gimnaziji. Usoda osnovne šole je tekla drugo pot. Spet lahko rečemo, da si matematika in novamatematika stojita nasproti. Matematika se spreminja od univerze navzdol, novamatematika koraka iz prvega razreda osnovne šole. Danes sta si še vsaksebi, še nekaj let, pa se bosta srečali iz oči v oči. Upamo, da bo novi program za predmetno stopnjo omogočil rahel stik.

Ponovimo: Pouk matematike bomo spreminjali še naprej, iz leta v leto, ker se bomo trudili, da bomo matematiko vsako leto bolje razumeli. In upajmo, da bodo prihajajoče spremembe v šolstvu vzpodbujale naše težnje, odpirale nove oblike dela, da bo matematika nam in dijakom v še večje veselje, družbi v še večjo korist.

France Križanič

UTRINEK

BIOFIZIKA?

V lanskem Obzorniku smo brali (S. Svetina, OMF **23**, 1976, 117), kako nepripravljeni prihajajo gimnazijci na medicinsko fakulteto in kako je potem po enem letu pri izpitih iz »biofizike« vse lepo in prav. Ista »biofizika« se sedaj pojavlja tudi na oglasnih deskah, kjer zanjo iščejo študente fizike kot demonstratorje.

Javna tajnost je seveda, da je ta »biofizika« čisto navaden uvodni kurz fizike, kakršnega imajo še mnoge druge fakultete. Slovenci smo pač zaljubljeni v naslove. Saj imamo celo »nuklearno medicino«, pri kateri človek ne ve, ali gre za nekakšno jedro zdravstva ali za zdravje jeder.

Medicina z okrasnimi pridevniki ni ne prva ne edina. Na FNT imamo »tehniško« fiziko, za katero vsi vedo, da je ravno toliko tehniška, kot je »biofizika« biološka. Pa ima vendarle ta »vaba« zaslugo, da imamo danes toliko fizikov.

Nemara bodo sledile še druge fakultete, tako da bomo poleg »fizike kar tako« imeli še celo vrsto inačic: »mašinofiziko«, »konstruktofiziko« in seveda neizogibno »elektrofiziko«. »Elektrooptika« se baje že obeta, čeprav se tudi zanjo ne ve, kaj to je. Šele pod temi naslovi se bo pouk fizike lahko dodobra prilagodil željam posameznih fakultet ali celo TOZD; prilagodili se bodo tudi izpiti. Naloga o trku se bo takole diferencirala:

fizika kar tako:	Če trči telo z maso 4 kg v drugo telo ...
mašinofizika:	Če trči vagon z maso 4 ton v drug vagon ...
konstruktofizika:	Če trešči kamion z maso 4 ton v barako ...
elektrofizika:	Če trči elektron ...
biofizika:	Če trčiš z glavo, ki ima maso 4 kg, v zid ...

Ivan Kuščer

Dr. Marjan Ribarič je poslal Obzorniku poročilo o svoji knjigi *Thermodynamics of Linear Transport Processes* iz revije Nuclear Technology 32 (1977) 107 z željo, da ga v celoti objavi. Uredniški odbor je upošteval to željo, saj se je na omenjeno knjigo nanašal utrinek I. Kuščerja (Obzornik mat. fiz. 23 (1976) 89). Avtor P. Nelson in uredništvo Nuclear Technology sta ljubeznivo dovolila, da objavimo prevod. Prevod je oskrbel odgovorni urednik.

Marjan Ribarič, *Thermodynamics of Linear Transport Processes*, Ljubljana, Slovenska akademija znanosti in umetnosti in Institut J. Stefan 1975, 158 strani.

Monografija je po pojmovni zasnovi podobna knjigi v dveh delih istega avtorja *Functional-Analytic Concepts and Structures of Neutron Transport Theory* in znatno gradi na njej. Zato bi bilo treba to poročilo prebrati skupaj z Larsenovim poročilom o prejšnji monografiji [1]. Osnovni jezik monografije je moderna funkcionalna analiza v Banachovih prostorih, osnovni prijem pa linearna analiza vhod-izhod (angl. input-output analysis) za telesa s končno razsežnostjo (»črne škatle«) v nasprotju s prijemom teorije polja, ki izhaja od infinitezimalnih teles in ima mnogo več pristašev. Avtor si prizadeva izoblikovati vhodno-izhodne predpostavke, ki bi ustrezno reproducirale kvalitativne vidike termodinamike. Če parafraziramo izjavo iz prejšnjega avtorjevega dela, mu je več do analize ugotovitev termodinamikov kot do analize dejanskega vedenja termodinamičnih sistemov.

Zaradi poudarka na kvalitativnih rezultatih in prijema s črnimi škatlami (black-box approach) sega monografija najbrž daleč čez okvir zanimanja velike večine bralcev Nuclear Technology. Za preostalo manjšino naj sledi kratek opis vsebine. Uvodno poglavje a (strani 1—16) obravnava osnovne predpostavke, terminologijo in oznake. Da bi se ohranila zveza s prejšnjo monografijo, je govor o »nevtronih«, ki tečejo med telesi, čeprav se zdi v termodinamični zvezi »energija« pripravnější. Poglavje b (strani 17—34) predvsem uvede količino z imenom *nevtronska vsebnost*. Veliko vlogo pri določitvi lastnosti te količine v ravnovesju ima posplošitev načela o detajlnem ravnovesju. Poglavje c (strani 35—51) vsebuje ustrezni inačici ničtega in prvega zakona termodinamike in vpelje prostornino kot nevtronsko vsebnost v ravnovesju z danim standardnim telesom. Poglavje d (strani 52—99) obravnava entropijo in drugi zakon termodinamike. Poglavje e (strani 100—131) je posvečeno izpeljavi posplošene difuzijske enačbe. Pomembnejši matematični dokazi so zbrani v dodatku (strani 132—149).

Ribaričevi deli sta plod pomembnega prizadevanja, da bi se odprlo območje znanosti, ki je bilo prej v bistvu neraziskano. Kot taki bi ju morali presoјati bolj po tem, ali bosta vzbudili nadaljnja sorodna prizadevanja, kot po ozkih tradicionalnih merilih natančnosti, uporabnosti in trenutne zanimivosti. Poročevalec zato odklanja sodbo, saj ta za to delo bolj kot za večino drugih pritiče zanamcem. Naj zadostuje ugotovitev, da zaradi resnične tehnične zapletenosti dela ni verjetno, da bi kmalu dosegli kak dokončen uspeh. To potrjuje tudi težava, na katero je očitno naletel avtor, ko si je prizadeval dobiti ustrezno poročilo o knjigi pred izidom. Na drugi strani pa se zdi, da obstaja tu morebiti bogat izvir problemov za raziskovalca, ki je pripravljen in sposoben predreti bistvene in stilistične težave pri branju in razumevanju monografije. Zamisel, da bi zgradili most med prijemom teorije polja in prijemom vhod-izhod in našli ustrezna nadomestila za tiste od Ribaričevih predpostavk, ki jih ne bi vseboval tak most (na primer za predpostavko o kompaktnosti, o kateri govori Larsen [1]), se zdi poročevalcu prav vablјiva.

Paul Nelson

[1] Larsen E., Review of *Functional-Analytic Concepts and Structures of Neutron Transport Theory*, Nucl. Sci. Eng. 58 (1975) 103.

Paul Nelson je od 1972 profesor za matematiko na teksaški tehnični univerzi. Od 1965 do 1972 je bil na oddelku za matematiko državnega laboratorija v Oak Ridgu programer, raziskovalec in koordinator matematičnih raziskav. Dela na področju transportne teorije nevtronov in numeričnega reševanja robnih problemov, posebno s tehniko invariantnega vlaganja. Sam ali skupaj s sodelavci je napisal 35 znanstvenih člankov in raziskovalnih poročil.

RAZISKOVALNE NALOGE MATEMATIČNEGA ODDELKA IMFM V LETU 1976

V preteklem letu so sodelavci inštituta izdelali kar precej raziskovalnih nalog. Vse je financirala Raziskovalna skupnost Slovenije.

35. Vložitev mnogoterosti v evklidske prostore

Avtorja naloge sta bila Jože Vrabec in Marko Kranjc.

Glavni rezultat tega dela je izrek: izotopski razredi vložitev poljubne k -povezane sklenjene PL m -mnogoterosti ($0 \leq k \leq m - 3$) v $(2m - k)$ -razsežni evklidski prostor so v bijektivni korespondenci z elementi neke grupe, ki se enostavno izraža s $(k + 1)$ -vo homološko grupo mnogoterosti M .

Iz obdelane snovi sta avtorja sestavila dva članka. Eden bo izšel v ameriški reviji Trans. Amer. Math. Soc., drugi v zagrebškem Glasniku.

36. Analitične funkcije z vrednostmi v l^p prostorih

Nosilec naloge je bil Josip Globevnik, sodelavca pa Milan Hladnik in Matjaž Omladič.

Raziskavo je sprožil članek R. Arona in J. Cime A theorem on holomorphic mappings into Banach spaces with basis, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972) 289—292, v katerem sta avtorja dokazala, da je za funkcijo z vrednostmi v prostoru l^∞ analitičnost koordinatnih funkcij zadosten pogoj za analitičnost funkcije, in postavila vprašanje, ali je lokalna enakomerna omejenost analitičnih koordinatnih funkcij zadosten pogoj za analitičnost vektorske funkcije z vrednostmi v prostoru l^p ($1 \leq p < \infty$).

Glavni rezultat naloge je naslednji:

IZREK. Naj bo Δ odprt enotni krog v kompleksni ravnini in naj bo $1 \leq p < \infty$. Obstaja nezvezna funkcija, definirana na Δ , z vrednostmi v prostoru l^p , ki je analitična kot funkcija v prostor $l^{p'}$ za vsak $p' < p$ in vsi njeni odvodi so funkcije v prostor l^p .

Izrek odgovori na vprašanje negativno. Objavljen bo v članku On analytic functions into l^p -spaces, ki je v tisku v Proc. Amer. Math. Soc.

Nadaljnji rezultati naloge so različni dodatni zadostni pogoji za koordinatne funkcije, ki zagotavljajo analitičnost vektorske funkcije z vrednostmi v prostoru l^p . Ti rezultati so že objavljeni v članku Some sufficient conditions for analyticity of functions into l^p -spaces, Glasnik Mat. 11 (31) (1976) 19—25.

37. Analiza zaokrožitvenih napak pri nekaterih algebraičnih procesih

Nosilec naloge je bil Zvonimir Bohte, sodelavca pa Edvard Kramar in Miro Lozej.

Naloga ima dva dela. V prvem je bila izdelana splošna analiza zaokrožitvenih napak pri zaporedju neortogonalnih transformacij matrike. Ta je bila uporabljena pri Gaussovi metodi za splošne in simetrične sisteme linearnih enačb. Za primerjavo so bili analizirani tudi ustrezni procesi, formulirani na osnovi eliminacij in direktnih razcepov. V drugem delu so bili analizirani algebraični procesi: računanje vrednosti polinoma, direktna, obratna in kombinirana redukcija polinoma z linearnim in kvadratičnim deliteljem. Na koncu je bila obravnavana nova posplošena redukcija s kvadratičnim deliteljem.

Iz rezultatov naloge sta avtorja napisala članek in ga poslala v objavo zagrebškemu Glasniku. Sodelavec Miro Lozej je iz obravnavane snovi izdelal tudi diplomsko nalogo.

38. Podalgebra simetričnih elementov v tenzorski algebri

Nosilec naloge je bil Peter Petek.

V delu je obravnavan tenzorski produkt osnovne algebre A same s seboj, $A \otimes A$. Tu deluje grupa $S(2)$ z zamenjavo faktorjev. Zanima nas podalgebra simetričnih elementov $S(A)$. Omejimo se na primer, ko je A polinomska algebra n spremenljivk nad komutativnim kolobarjem k , ki je brez deliteljev nič in ima enoto. Osnovni simetrični funkciji za vsako od nastopajočih spremenljivk sta seve v $S(A)$. Vse te osnovne simetrične funkcije pa ne generirajo vse $S(A)$, pač pa le neko podalgebro F . Zato je treba privzeti nekaj dodatnih generatorjev, osnovnih simetričnih binomov. Le-ti pa niso med sabo neodvisni. Rezultati so odvisni še od narave kolobarja k , natančneje od tega, ali je v k moči deliti z 2 ali ne. Posebno zanimivi so osnovni simetrični binomi s po dvema spremenljivkama; zadoščajo namreč neki kvadratni enačbi s koeficienti v F . So pa tudi med sabo nad F linearno odvisni.

Na koncu je navedenih še nekaj hipotez glede nadaljnjih relacij med generatorji $S(A)$. Avtor bo objavil rezultate raziskave v članku.

39. Študij in uporaba analitičnih, numeričnih in računalniških metod v dvodimenzionalni elastostatiki

Nosilec naloge je bil Bogdan Krušič, sodelavci pa Milan Muršič, Bogomil Pertot, Franc Kosel, Boris Štok, Jože Petrišič, Mladen Houška in Igor Emri.

V tej raziskavi so obravnavani robni problemi v ravninski izotropni elastostatiki v naslednjih primerih: enoperiodni in dvoperiodni robni problem in neki posebni primer upogiba srednje debele plošče. V vseh primerih je dokazano, da je rešitev teh problemov mogoče najti na Šermanov način. Izdelan je tudi numerični pristop za računanje napetosti v dveh primerih, in sicer za neskončno ravnino z eliptično luknjo in neskončno ravnino s pravokotno luknjo.

40. Hermitski operatorji in struktura Banachovih prostorov

Nosilec naloge je bil Ivan Vidav, sodelavec Peter Legiša.

Delo obravnava dva problema s področja izometrične strukture Banachovih prostorov. Denimo najprej, da obstaja izometrična reprezentacija von Neumannove algebre A na kompleksnem Banachovem prostoru X . Kaj se da povedati o lastnostih prostora X ? Obširneje je obdelan najpreprostejši primer, ko je A faktor tipa I. Naloga se da obrniti. Če je na kompleksnem Banachovem prostoru X dano naraščajoče posplošeno zaporedje hermitskih projektorjev z dovolj lepimi lastnostmi, v nekaterih primerih obstaja naravna izometrična reprezentacija von Neumannove algebre tipa I na X in X nekako razpade na Hilbertove podprostore.

V drugem delu je obravnavano vprašanje, kdaj je grupa G vseh linearnih izometrij kompleksnega Banachovega prostora nase Liejeva grupa v normni topologiji. Avtorja pokažeta: G je Liejeva grupa, če obstaja okolica identitete v G , tako da lahko vsak element iz nje povežemo z identiteto s potjo po G , ki ima končno dolžino (ali pa je odvedljiva) in se ne oddalji preveč od identitete.

Iz snovi naloge namerava sodelavec izdelati doktorsko disertacijo.

41. Računalniško orientirane numerične metode

Nalogo sta izdelala Janez Grad in Jože Vrečko.

Naloga predstavlja opis in analizo metode za numerično računanje lastnih vrednosti sistema enačb $(A - \lambda B)x = 0$, kjer sta A in B realni simetrični matriki, od katerih je vsaj ena nesingularna. Po tej metodi se začetni sistem prevede najprej v obliko $(C - \lambda I)y = 0$, kjer je C psevdosimetrična matrika, nato pa v obliko $(T - \lambda I)z = 0$, kjer je T tridiagonalna

psevdosimetrična matrika. Z iteracijskim postopkom na matriki T se T prevede v formo, iz katere je mogoče potem na enostaven način določiti lastne vrednosti. Postopek se odlikuje po tem, da ohranja psevdosimetričnost vmesnih matrik in operacije v realni aritmetiki. Njegova slaba stran pa je, da je v določenih primerih lahko numerično nestabilen.

Avtorja sta poročala o rezultatih naloge na mednarodnih kongresih INFORMATICA leta 1974 in 1975.

42. Baza prostora zlepkov nad območji dvodimenzionalnega evklidskega prostora in njena uporaba v problemih numerične interpolacije

Avtorji naloge so bili Jernej Kozak, Andrej Kmet in Matjaž Omladič.

V prvem delu naloge je raziskan problem konstruiranja interpolacijskih zlepkov v dveh dimenzijah. Za posebni primer območja je dana baza prostora zlepkov in pokazana možnost, kako si pomagamo pri splošnejših območjih. Predlagan je algoritem konstrukcije interpolacijskega zlepka, ki je praktično in tudi teoretično zanimiv. Na koncu je narejena primerjava in analiza nekaj konstrukcijskih postopkov.

V drugem delu naloge je študirana enakomerna konvergenca kubičnih interpolacijskih zlepkov. Razširjen je do sedaj znani interval, v katerem mora ležati ocena lokalne razgibanosti delitve, da interpolacijski zlepek tipa I ali II konvergira k podani zvezni funkciji.

V tretjem delu naloge so avtorji raziskovali izbor dodatnih točk delitve intervala, potrebnih za konstrukcijo baze kubičnih B zlepkov. V delu je dokazano, da je izbira večkratnih vozlov v krajiščitih intervala, ki je algoritmično najpreprostejša, tudi numerično zelo smiselna in v enem od meril tudi optimalna.

43. Sodobni koncepti programiranja

Avtorji naloge so bili Egon Zakrajšek (nosilec naloge) in sodelavci Vladimir Batagelj, Jernej Kozak, Iztok Lajovic, Tomaž Pisanski, Vladimir Rajkovič in Roman Rojko.

V prvem delu naloge je podan jedrnat in izčrpen opis programskega jezika Algol 68. Jezik Algol 68 je rezultat razvoja programskega jezika Algol 60 in raziskav osnovnih konceptov programiranja ter teorije programskih jezikov v šestdesetih letih. Zato ni zanimiv samo kot programski jezik, temveč tudi kot učbenik osnovnih konceptov računalništva.

V drugem delu naloge je predstavljeno krajše razmišljanje o imenih v programiranju. Pojasnjena je razlika med imenom, naslovom, lokacijo in vsebino.

Uvod v λ -račun sestavlja tretji kos naloge. λ -račun je pomemben teoretični pripomoček pri analizi strategij izračuna v programskih sistemih in eno najpomembnejših sredstev za opis semantike programskih jezikov in osnova funkcionalno usmerjenih jezikov.

Četrty del poročila zajema sheme programov, ki v zadnjih letih dobivajo osrednjo vlogo v teoriji računalništva.

Peti del naloge je prikaz našega trenutnega angažiranja na področju programske opreme. V tem poglavju so obravnavani problemi in nakazane rešitve pri poučevanju programiranja, načrtovanju programske opreme, programiranju in dokumentaciji programov.

V zadnjem, šestem delu je definiran STRUCTRAN, programski jezik s sodobno bazo kontrolnih struktur (LE), ki temelji na razmišljanjih v četrtem delu naloge.

Teme naloge so bile obravnavane na seminarjih IMFM iz računalniške in numerične matematike več kot dva semestra. V okviru naloge je bilo izdelano diplomsko delo, osem člankov oziroma referatov in izdelava druge verzije prevajalnika (napisane v STRUCTRANU).

Anton Suhadolc

SEZNAM NOVIH ČLANOV DMFA SRS V LETU 1976

Ob koncu leta 1976 smo zabeležili v kartoteki 918 članov našega društva. Med 31 novimi člani je večina študentov matematike in fizike, ki so že pred letom dni zapustili šolske klopi, nekaj pa je tudi takih, ki so bili celo aktivni člani društva, ne pa tudi naročniki Obzornika za matematiko in fiziko. Nekateri med njimi učijo matematiko ali fiziko na osnovnih šolah, drugi pa so vstopili v pred kratkim ustanovljeno sekcijo za starejše člane.

Ciril Velkovich

1020. Arh Stane	1031. Hozjan Jože	1041. Okretič Eda
1021. Benedik Nuša	1032. Jerman Riko	1042. Rakovec Jože
1022. Bezek Danijel	1033. Jurjec Anton	1043. Ravnik Matjaž
1023. Čemažar Franc	1034. Križanič Franc	1044. Rudolf Janez
1024. Davide Višnja	1035. Kusterle Dušan	1045. Schara Milan
1025. Diallo Bano	1036. Lakovič Gorazd	1046. Starc Vito
1026. Fabjan Boris	1037. Lenarčič Stane	1047. Štrbac Zoran
1027. Gajšek Duša	1038. Lesnjak Slavko	1048. Uran Rezka
1028. Gluhac Bogdan	1039. Leško Andrej	1049. Vrečko Jože
1029. Grabnar Slavica	1040. Milošević Igor	1050. Žiberna Gorazd
1030. Grešovnik Ferdo		

DRUŠTVO MATEMATIKOV,
FIZIKOV IN ASTRONOMOV
SR SLOVENIJE

VAS VABI NA OTVORITEV

PLEMLJEVE
SPOMINSKE
SOBE

NA BLEDU, PREŠERNOVA 39
(vila Perun), KI BO V TOREK,
21. JUNIJA 1977, OB 17. URI

PREDSEDNIK DMFA SRS
SERGEJ PAHOR



NOVE KNJIGE

France Križanič, Liejeve grupe, Postdiplomski seminar iz matematike — 8, Ljubljana, DMFA SRS 1976, 145 str., 50.— (40.—) din

Osmi zvezek v zbirki Postdiplomski seminar iz matematike z naslovom Liejeve grupe je spet delo profesorja Franceta Križaniča. To je po Topoloških grupah (šesti zvezek iste zbirke) že druga knjižica, ki je nastala na podlagi njegovega enoletnega cikla predavanj o topoloških in Liejevih grupah na naši tretji stopnji. Izdamo pa lahko še, da se nam kmalu obeta tudi zadnja knjižica iz tega vira z naslovom Liejeve algebre.

Knjiga je razdeljena na dva dela: Mnogoterosti in Liejeve grupe. V prvem se seznanimo z gladkimi mnogoterostmi, tangentnim funktorjem, z vektorskimi polji in diferencialnimi sistemi na gladkih mnogoterostih (vključno s Frobeniusovim izrekom) ter s kratko obravnavo diferencialnih form na gladkih mnogoterostih. Drugi del prinaša zanimivo obravnavo Liejevih grup. Po začetnih informacijah o Liejevi algebri Liejeve grupe, eksponentni preslikavi, adjungirani upodobitvi in podobnem avtor pokaže, da je zaprta topološka podgrupa Liejeve grupe Liejeva podgrupa. Zvemo tudi, koliko je Liejeva grupa določena s svojo Liejevo algebro. Poglavje Primeri in dodatki vsebuje med drugimi zanimivostmi tudi informacijo o kompaktnih Liejevih grupah in kompaktnih Liejevih algebrah. Na koncu imamo še obravnavo invariantnih form in invariantne mere na Liejevi grupi.

Delo je napisano v znanem avtorjevem elegantnem, redkobesednem slogu in, kot smo videli, kljub majhnemu obsegu vsebuje zavidljivo količino materiala. Obravnava je v glavnem zaključena, le na nekaj mestih se pisec sklicuje na svoje prejšnje učbenike. Izčrpna bibliografija in celo stvarno kazalo samo zaokrožata podobo tega lepega prispevka k slovenski matematični literaturi.

Peter Legiša

Sergej Pahor, Slučajni procesi, DMFA SRS, Ljubljana 1977, 42 str. Cena 20.— din (16.— din), Postdiplomski seminar iz fizike; 2

Skripta »Slučajni procesi« Sergeja Pahorja so nastala kot zapis predavanj na podiplomskem študiju fizike. Fizikalno izhodišče zapisa je znani problem Brownovega gibanja, ob katerem razvije avtor osnovne pojme iz teorije slučajnih procesov. S potrebno strogostjo izpelje metode za reševanje šibko stacionarnih procesov ter prikaže njihovo uporabo na razmeroma aplikativnem problemu nihanja pod vplivom slučajne sile. Tudi z osnovnim problemom Brownovega gibanja se srečamo še dvakrat, vsakokrat na višjem nivoju, in se seznanimo z bogatejšim in popolnejšim opisom tega pojava. V končnem poglavju »Spektralna razčlenitev stacionarnega procesa« prikaže avtor tudi svoj originalni prispevek k vprašanju asimptotike Brownovega gibanja.

Skripta so zaradi matematične strogosti sorazmerno zahtevno branje in terjajo od bralca dokaj dobro poznavanje matematične analize in teorije verjetnosti. Področje samo je zelo aktualno, saj se metode iz teorije stacionarnih procesov uporabljajo tako v teoretični fiziki kot tudi v elektroniki in kibernetiki, vendar večinoma zelo nekritično in v obliki izdelanih receptov. Zato bo stroga in kritična utemeljitev teh metod v zapisu S. Pahorja koristila vsem, ki bi se želeli podrobneje seznaniti z delovanjem tega matematičnega orodja. Posebej koristen bo tak pristop mladim raziskovalcem, kar je bil tudi namen samih predavanj, iz katerih so skripta nastala.

Alois Kodre