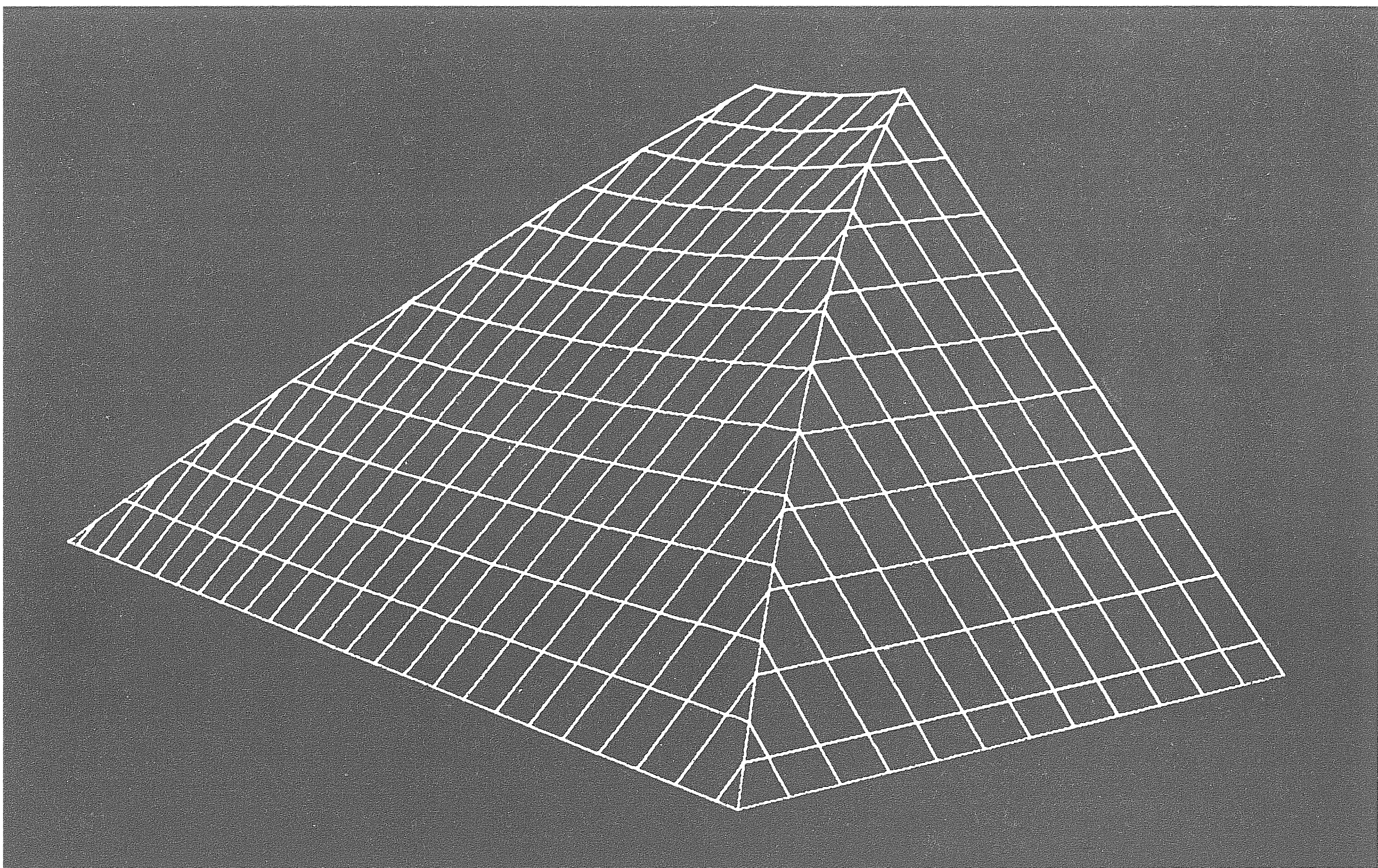


1980

Letnik 27

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1980

Glavni in odgovorni urednik: Janez Strnad.

Uredniški odbor: France Avsec, gimnazija Kranj; Robert Blinc, FNT; Alojz Kodre, FNT; France Kvaternik, tehniška šola za lesarstvo, Ljubljana; Peter Legiša, FNT; Jože Lep, VTŠ, Maribor; Anton Moljk, FNT; Mitja Rosina, FNT; Tomaž Skulj, Iskra, Ljubljana; Janez Strnad (urednik za fiziko), FNT; Anton Suhadolc (urednik za matematiko), FNT; Ciril Velkovrh (urednik), FNT; Ivan Vidav, FNT; jezikovni pregled Marija Janežič, inštitut za slovenski jezik SAZU. Slike je narisal Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 200.— din (za člane društva je že vračunana člana-rina), za dijake in študente 100.— din, za ustanove in podjetja 250.— din, za tujino 20 \$ = 400.— din, posamezna številka 50.— din, dvojna številka 100.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: **Komisija za tisk DMFA SRS**, 61001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 227, tel. št. 265-061/53, žiro račun 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki 32009-007-900.

Tiska tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1400 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1980 DMFA SRS — 460

YU ISSN 0473-7466

VSEBINA**Članki**

O funkciji $[x]$ in komplementarnih zaporedjih naravnih števil (Ivan Vidav) . . .	67
Prostorske predstave in kvantna mehanika (Peter Gosar)	74

Novice

Oblika milnične opne (Rajko Krivec)	83
Nova načina za določanje zornih kotov zvezd (Marijan Prosen)	89
Potrdili možen obstoj nevidnih spremljevalk Barnardove zvezde (Marijan Prosen)	90

Domače vesti

Tridesetletnica Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije (Dušan Modic)	91
Letovanje v Plemljevem domu na Bledu (Dušan Modic)	92
Obvestilo (Martina Koman)	92

Nove knjige (Gorazd Lešnjak, Janez Strnad, Slobodan Žumer, Niko Prijatelj) 73, 93	
Revije v matematični knjižnici (Ciril Velkovrh)	96

CONTENTS**Articles**

The function $[x]$ and complementary sequences of natural numbers (Ivan Vidav) . . .	67
Concepts of space and quantum mechanics (Peter Gosar)	74

News	83
-----------------------	----

Home news	91
----------------------------	----

Reviews	73, 93
--------------------------	--------

Na ovitku: Del opne v žični kocki po končanem računu. Namesto trikotniške mreže so vrisani preseki te mreže z dvema pravokotnima snopoma navpičnih ravnin. Glej članek na str. 81.



JOSIP BROZ TITO
1892—1980

Predsednik Tito med obiskom na Institutu Jožef Stefan (Foto M. Smerke)

O FUNKCIJI $[x]$ IN KOMPLEMENTARNIH ZAPOREDJIH NARAVNIH ŠTEVIL*

IVAN VIDAV

Math. Subj. Class. (1980): 10 A, 10 L, 10 F 40

Članek govori o funkciji $[x]$ in o lastnostih zaporedij oblike $[n\alpha]$ ter $(n\alpha) = n\alpha - [n\alpha]$, $n \in \mathbb{N}$, kjer je α pozitivno iracionalno število. Če je $1/\alpha + 1/\beta = 1$, sta $[n\alpha]$ in $[n\beta]$ komplementarni zaporedji naravnih števil, tj., vsako naravno število je člen enega in le enega od teh zaporedij.

THE FUNCTION $[x]$ AND COMPLEMENTARY SEQUENCES OF NATURAL NUMBERS

In this article we study the function $[x]$ and the properties of sequences $[n\alpha]$ and $(n\alpha) = n\alpha - [n\alpha]$, $n \in \mathbb{N}$, where α is a positive irrational number. If $1/\alpha + 1/\beta = 1$, then $[n\alpha]$ and $[n\beta]$ are complementary sequences of natural numbers, i. e., each positive integer r is a member of one and only one of these two sequences.

Naj bo x realno število. Po navadi zaznamujemo z $[x]$ največje celo število, ki ne presega x . Npr. $[3/2] = 1$, $[\sqrt{5}] = 2$, $[\pi] = 3$, $[-\sqrt{2}] = -2$ itd. Razliko $x - [x]$ označimo z (x) . Leži med 0 in 1, natančneje $0 \leq (x) < 1$. Enačaj velja na levi tedaj in le tedaj, kadar je x celo število. Imamo torej

$$x = [x] + (x), \quad 0 \leq (x) < 1$$

Tako smo dobili dve funkciji: $f(x) = [x]$, ki se imenuje celi del števila x , in $g(x) = (x)$. Obe sta zvezni za vsak x , ki ni celo število. Če pa je $x = n$ celo število, sta nezvezni. Obstajajo pa v teh točkah desne in leve limite in sicer je $f(n+) = n$, $f(n-) = n - 1$, $g(n+) = 0$, $g(n-) = 1$.

V tem članku si bomo ogledali nekaj zanimivih lastnosti teh dveh funkcij, predvsem prve.

Vzemimo števili x in y ter pišimo $x = [x] + (x)$, $y = [y] + (y)$. Ker je $0 \leq (x) + (y) < 2$, dobimo oceno

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1 \quad (1)$$

Enačaj na levi velja v primeru $(x) + (y) < 1$, na desni v primeru $(x) + (y) \geq 1$. Če pa je $y = n$ celo število, imamo enakost

$$[x + n] = [x] + n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Enačbo (1) takoj posplošimo na več sumandov

$$[x_1] + \dots + [x_m] \leq [x_1 + \dots + x_m] \leq [x_1] + \dots + [x_m] + m - 1 \quad (2)$$

Pri enakih sumandih pa dobimo

$$m[x] \leq [mx] \leq m[x] + m - 1$$

* Predavanje na 17. seminarju DMFA 1980 — Zanimiva matematika.

To je skoraj vse, kar se da splošnega povedati o funkciji $[x]$.

Pa si oglejmo preprost primer uporabe. Število $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ je pri nekoliko večjem n zelo veliko. Kako bi izračunali, s kakšno potenco praštevila p je deljivo? Med faktorji $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ je vsak p -ti deljiv s p . Takih faktorjev je torej $[n/p]$. Če iz njih izpostavimo p , ostanejo deljivi s p še tisti faktorji, ki so bili prvotno deljivi s p^2 . Teh je $[n/p^2]$. Tako nadaljujemo in ugotovimo, da je $n!$ deljivo s p^m , kjer je eksponent m enak

$$m = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots \quad (3)$$

Na desni je le na videz neskončna vrsta, ker so vsi členi 0, kakor hitro je $p^k > n$. Vzemimo npr. $n = 1000$ in praštevilo $p = 7$. V tem primeru je $[1000/7] = 142$, $[1000/7^2] = 20$, $[1000/7^3] = 2$, $[1000/7^4] = 0$ itd. Vsota (3) sestoji iz treh členov in je $m = 164$. Torej je $1000!$ deljivo natanko s potenco 7^{164} .

S to metodo hitro razstavimo število $n!$ na prafaktorje. Tako dobimo npr.

$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Binomski simbol $\binom{n}{k}$ pove, na koliko načinov lahko izberemo k predmetov iz množice n predmetov, $k \leq n$. Izračunamo ga takole

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} \quad (4)$$

Če definiramo $\binom{n}{k}$ z izrazom na desni, ni neposredno razvidno, da je celo število. Vendar to brez težave dokažemo s formulo (3). Vzemimo poljubno praštevilo p . Števec $n!$ naj bo deljiv s p^m , faktor $k!$ v imenovalcu s p^r , faktor $(n - k)!$ pa s p^s . Eksponente m , r , s izračunamo po formuli (3), torej

$$r = \left[\frac{k}{p} \right] + \left[\frac{k}{p^2} \right] + \dots, \quad s = \left[\frac{n - k}{p} \right] + \left[\frac{n - k}{p^2} \right] + \dots$$

Neenačba (1) pa nam da

$$\left[\frac{k}{p^i} \right] + \left[\frac{n - k}{p^i} \right] \leq \left[\frac{n}{p^i} \right]$$

Od tod dobimo oceno

$$r + s \leq \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots = m$$

Števec na desni v (4) je deljiv s potenco p^m , imenovalec pa s p^{r+s} . Ocena (5) pove, da je v števcu najmanj toliko prafaktorjev p kakor v imenovalcu, in to za vsak p . Zato se vsi faktorji v imenovalcu okrajšajo in je ulomek (4) celo število.

Odslej naj bo α pozitivno število. Natančneje bomo študirali zaporedje

$$a_n = [n\alpha], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Vsi členi a_n so naravna števila ali 0. Zaporedje je naraščajoče. Če je $\alpha > 1$, je očitno strogo naraščajoče. V primeru $\alpha \leq 1$ pa vsebuje vsa naravna števila.

Naj bo $\alpha > 1$. Členi zaporedja (6) sestavljajo neko podmnožico množice naravnih števil. V odseku $[\alpha], [2\alpha], \dots, [n\alpha]$ je n števil. Kvociient $n/[n\alpha]$ meri gostoto členov tega zaporedja do števila $[n\alpha]$. Ker je $n\alpha = [n\alpha] + \varepsilon_n$, $0 \leq \varepsilon_n < 1$, velja $n/[n\alpha] = n/(n\alpha - \varepsilon_n)$. Od tod se vidi, da limitira kvociient $n/[n\alpha]$ proti $1/\alpha$, če narašča n čez vse meje. Zato lahko rečemo, da je $1/\alpha$ gostota zaporedja $\{[n\alpha]\}$.

Oglejmo si dva primera: $\alpha = \sqrt{2}$ in $\alpha = 5/3$. Dobimo zaporedji

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots \\ \alpha = \sqrt{2}, a_n &= 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, \dots \\ \alpha = 5/3, a_n &= 1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, \dots \end{aligned}$$

Prvo zaporedje poteka nepravilno in ni v njem razvidna nobena zakonitost. Pri drugem pa se člen poveča za 5, če povečamo indeks za 3. Zato sestoji iz treh vloženih aritmetičnih zaporedij z razliko 5, prvi členi pa so 1, 3, 5. Vzrok za razloček med prvim in drugim zaporedjem tiči v tem, da je $\sqrt{2}$ iracionalno in $5/3$ racionalno število.

Drugi primer je značilen za racionalna števila. Naj bo namreč $\alpha = p/q$, kjer je ulomek okrajšan, kolikor je mogoče. Potem sta si p in q tuja. V tem primeru je

$$a_{n+q} = [(n+q)\alpha] = [n\alpha + p] = [n\alpha] + p = a_n + p$$

Od tod sledi, da sestavljajo členi $a_r, a_{q+r}, a_{2q+r}, \dots$ za vsak indeks r aritmetično zaporedje z razliko p . Zaporedje $\{a_n\}$ pa je zloženo iz q takih zaporedij z začetnimi členi $a_1, \dots, a_q$. Vsak bralec se bo sam prav zlahka prepričal, da je α racionalno število, če velja pri nekem $q > 1$ enakost $a_{n+q} = a_n + p$ za vsak indeks n in je p neodvisen od n .

Videli smo, da so členi $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ množica med seboj različnih naravnih števil z gostoto $1/\alpha$, če je $\alpha > 1$. Vzemimo še število β , ki je z α takole povezano

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \tag{7}$$

Če je $\alpha > 1$, je tudi $\beta > 1$. Zaporedje $b_n = [n\beta]$ sestoji torej iz samih različnih naravnih števil, njegova gostota pa je $1/\beta$. Unija $\{a_n\} \cup \{b_n\}$ je množica naravnih števil. Če zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ nimata skupnega člena, je gostota unije enaka $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Seveda s tem še ni rečeno, da sestoji unija iz vseh naravnih števil. Da je res tako, zagotavlja

Izrek 1. Naj bosta α in β pozitivni iracionalni števili povezani z enačbo (7). Vsako naravno število je člen enega in le enega izmed zaporedij $a_n = [n\alpha]$ in $b_n = [n\beta]$.

Dokaz. Števili α in β , ki ustrezata zvezi (7), sta obe > 1 . Zato sta zaporedji $a_n = [n\alpha]$ in $b_n = [n\beta]$ strogo naraščajoči, vsi členi prvega so med seboj različni in prav tako drugega. Pa denimo, da bi bilo naravno število r člen obeh zaporedij, npr. $[m\alpha] = r$ in $[n\beta] = r$. Od tod dobimo

$$m\alpha = r + \varepsilon, \quad n\beta = r + \eta$$

Ker sta α in β iracionalna, je $0 < \varepsilon < 1$ in $0 < \eta < 1$. Delimo prvo enačbo z α , drugo z β in ju seštejmo! Če upoštevamo (7), dobimo

$$m + n = r + \frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta}$$

Ta enakost pove, da je $\varepsilon/\alpha + \eta/\beta = m + n - r$ celo število. Velja pa ocena

$$0 < \frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

Torej $\varepsilon/\alpha + \eta/\beta$ ni celo število. To je protislovje. Zato zaporedji a_n in b_n nimata skupnega člena.

Vzemimo zdaj poljubno naravno število r in ga delimo z α in β . Nobeno izmed števil r/α in r/β ni celo. Pa naj bo m najmanjše naravno število, ki je večje od r/α , in n najmanjše naravno število, ki je večje od r/β . Potem je

$$m = \frac{r}{\alpha} + \varepsilon, \quad n = \frac{r}{\beta} + \eta \quad (8)$$

Tudi tu je $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \eta < 1$ in zato $\varepsilon + \eta < 2$. Od tod dobimo $m\alpha = r + \alpha\varepsilon$, $n\beta = r + \beta\eta$. Če je $\alpha\varepsilon < 1$, imamo $[m\alpha] = r$, tako da je r člen prvega zaporedja. Če pa je $\beta\eta < 1$, je $r = [n\beta]$ člen drugega zaporedja. Produkt $\alpha\varepsilon$ ni enak 1, saj bi sicer iz enačbe $m\alpha = r + 1$ dobili, da je α racionalno število. Prav tako ni $\beta\eta = 1$. Dokažimo zdaj, da ni hkrati $\alpha\varepsilon > 1$ in $\beta\eta > 1$. V nasprotnem primeru imamo oceni $\varepsilon > 1/\alpha$, $\eta > 1/\beta$ in od tod $\varepsilon + \eta > 1/\alpha + 1/\beta = 1$. Če pa seštejemo enačbi (8), dobimo $m + n = r + \varepsilon + \eta$. Torej je $\varepsilon + \eta$ celo število, ki je večje od 1, tedaj $\varepsilon + \eta \geq 2$. To pa je v nasprotju z $0 < \varepsilon + \eta < 2$. Zato je vsaj eden od produktov $\alpha\varepsilon$ in $\beta\eta$ manjši od 1 in je r člen ustreznega zaporedja. S tem je izrek 1 dokazan.

Dve taki strogo naraščajoči zaporedji naravnih števil $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$, da je vsako naravno število člen enega in samo enega zaporedja, torej

$$\{a_n\} \cup \{b_n\} = \mathbb{N}, \quad \{a_n\} \cap \{b_n\} = \emptyset$$

imenujemo komplementarni zaporedji naravnih števil. Izrek 1 pove, da sta $\{[n\alpha]\}$ in $\{[n\beta]\}$ komplementarni zaporedji naravnih števil za poljubni iracionalni števili α in β povezani z enačbo (7).

Neposredno je razvidno, da sta števili α in β , ki ustrezata enačbi (7), ali obe racionalni ali obe iracionalni. Pri racionalnih α in β izrek 1 ne drži. To kaže že primer $\alpha = \beta = 2$. Zaporedji $a_n = [n\alpha] = 2n$ in $b_n = [n\beta] = 2n$ sestajata obe iz vseh sodih števil. Liha števila pa niso členi niti prvega niti drugega zaporedja. Oglejmo si še splošni primer $\alpha = p/q$, kjer sta p in q naravni števili, $p > q$. Potem je $\beta = p/(p - q)$. Ker je $[q\alpha] = p$ in $[(p - q)\beta] = p$, je p člen v obeh zaporedjih. Toda $[(q - 1)\alpha] = [p - p/q] < p - 1$ in $[(p - q - 1)\beta] = [p - p/(p - q)] < p - 1$. Zato $p - 1$ ni člen nobenega zaporedja.

Kakšni zaporedji a_n in b_n dobimo, če iracionalni števili α in β ustrezata enačbi $1/\alpha + 1/\beta = 2$? Smemo vzeti, da je $\alpha < \beta$. Potem je $\alpha < 1$. V nasprotnem primeru bi bilo $\alpha > 1$, $\beta > 1$, torej $1/\alpha + 1/\beta < 2$. Ker je torej $\alpha < 1$, so v zaporedju $a_n = [n\alpha]$ vsa naravna števila, nekatera nastopajo celo dvakrat. Podobno kakor zgoraj dokažemo, da nastopa vsako naravno število natanko

po dvakrat v obeh zaporedjih a_n in b_n skupaj. Če sta dva člena prvega zaporedja enaka r , potem r ni člen drugega zaporedja. Če pa je le en člen prvega zaporedja enak r , je r člen tudi drugega zaporedja. Splošno velja tale

Izrek 2. Naj bosta α in β iracionalni števili in naj bo $1/\alpha + 1/\beta = l$, kjer je $l \geq 1$ naravno število. Vsako naravno število r nastopa natanko l -krat v obeh zaporedjih $a_n = [n\alpha]$ in $b_n = [n\beta]$ skupaj.

Dokaz izreka 2 je podoben dokazu izreka 1, le nekoliko bolj je zapleten.

Oglejmo si še primer, ko je med α in β zveza

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + 1 \quad (9)$$

V tem primeru je vselej $\alpha < 1$ in so zato v zaporedju $[n\alpha]$ vsa naravna števila, nekatera celo večkrat.

Izrek 3. Pozitivni iracionalni števili α in β naj ustrezata enačbi (9). Vsako naravno število nastopa v zaporedju $a_n = [n\alpha]$ enkrat več kakor v zaporedju $b_n = [n\beta]$. Če torej r nastopa v $\{[n\alpha]\}$ enkrat, ga v $\{[n\beta]\}$ ni, če je v $\{[n\alpha]\}$ dvakrat, je v $\{[n\beta]\}$ enkrat itd.

Povrnimo se k izreku 1! Vzemimo $\alpha = \sqrt{2}$. Ustrezni β je $\sqrt{2} + 2$. V tem primeru imamo

$$a_n = [n\alpha] = [n\sqrt{2}], \quad b_n = [n\beta] = a_n + 2n \quad (10)$$

Obe zaporedji sestojita iz naravnih števil in sta strogo naraščajoči. Po izreku 1 sta komplementarni zaporedji naravnih števil. Komplementarni zaporedji a_n in b_n pa sta z zvezo $b_n = a_n + 2n$ natanko določeni. Res! Ker je $b_1 = a_1 + 2 > 2$, je število 1 člen prvega zaporedja, in sicer mora biti $a_1 = 1$, saj je zaporedje a_n strogo naraščajoče. Od tod je $b_1 = a_1 + 2 = 3$. Vsi nadaljnji členi b_n so večji od 3. Zato je 2 člen prvega zaporedja, in sicer $a_2 = 2$. Od tod je $b_2 = a_2 + 4 = 6$. Če tako nadaljujemo, dobimo tabelo

$$\begin{array}{cccccccccccc} n &= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ a_n &= & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 14 & \dots \\ b_n &= & 3 & 6 & 10 & 13 & 17 & 20 & 23 & 27 & 30 & 34 & \dots \end{array}$$

To tabelo računamo takole: Ko smo našli a_n , zapišemo spodaj $b_n = a_n + 2n$. Naslednji členi a_{n+1} , a_{n+2} , ... so tista naravna števila, ki manjkajo v zaporedju b_n . Npr. števil 15 in 16 v tretji vrsti ni. Zato postavimo $a_{11} = 15$, $a_{12} = 16$. Ker je $b_5 = 17$, nadaljujemo $a_{13} = 18$ itd.

Očitno lahko opredelimo zaporedji a_n in b_n neodvisno od zaporedij oblike $[n\alpha]$. Recimo, da bi tako napravili. Potem bi si zastavili vprašanje, kako dobiti formulo za n -ti člen. Brez izreka 1 bi verjetno težko našli, da je $a_n = [n\sqrt{2}]$.

Oglejmo si še en primer komplementarnih zaporedij naravnih števil. Naj bosta torej zaporedji a_n in b_n strogo naraščajoči, vsako naravno število r je člen enega in samo enega zaporedja, med členi pa naj bo zdaj zveza $b_n = a_n + n$. Zaporedji sta s temi podatki natanko določeni. Prav tako kakor prej ugotovimo, da je $a_1 = 1$, tedaj $b_1 = a_1 + 1 = 2$. Ker je $b_2 = a_2 + 2 > 3$, mora biti $a_2 = 3$, torej $b_2 = 5$. Zato je $a_3 = 4$ in od tod $b_3 = a_3 + 3 = 7$. Potem je $a_4 = 6$ itd.

Kako pa se v tem primeru glasi formula za a_n ? Če je v izreku 1 število $\beta = \alpha + 1$, potem je $b_n = [n\beta] = [n\alpha] + n = a_n + n$. Med α in $\beta = \alpha + 1$ pa je tudi zveza (7). Od tod dobimo enačbo $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Ker je $\alpha > 0$, izračunamo $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Torej se splošni člen prvega zaporedja glasi $a_n = \left[\frac{n}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]$.

Podobno računamo člene komplementarnih zaporedij a_n in b_n , če je $b_n = a_n + n + 1$. Bralec naj sam poskuša najti formulo za a_n .

Na koncu povejmo še nekaj o zaporedju $\varepsilon_n = (n\alpha)$. Vsi njegovi členi leže na intervalu $[0, 1)$. Če je α iracionalen, pa so na odprtem intervalu $(0, 1)$. Naj bo najprej α racionalen, torej $\alpha = p/q$, kjer sta si števili p in q tuji. V tem primeru je ε_n oblike s/q , kjer je s eno izmed števil $0, 1, \dots, q-1$. Brez težave se da videti, da v zaporedju ε_n nastopa vsak izmed ulomkov $0, 1/q, 2/q, \dots, (q-1)/q$ neskončnokrat.

Pri iracionalnem α pa so vsi členi ε_n med seboj različni. Velja namreč $m\alpha = [m\alpha] + \varepsilon_m$. Če je $\varepsilon_n = \varepsilon_m$, $n \neq m$, je tudi $n\alpha = [n\alpha] + \varepsilon_m$. Od tod dobimo $(m-n)\alpha = [m\alpha] - [n\alpha]$; torej α je racionalen.

Izrek 4. Pri iracionalnem α so členi zaporedja $\varepsilon_n = (n\alpha)$ enakomerno porazdeljeni po intervalu $(0, 1)$.

Enakomerna porazdeljenost členov ε_n pomeni tole: naj bo t poljubno število med 0 in 1 in N poljubno naravno število. Označimo z N_t število tistih členov izmed $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$, ki so manjši od t . Kvociient N_t/N pove, kolikšen del teh členov leži na intervalu $(0, t)$. Zaporedje ε_n je enakomerno porazdeljeno po intervalu $(0, 1)$, če konvergira za vsak t kvociient N_t/N proti t , ko narašča N čez vse meje, torej $\lim_{N \rightarrow \infty} (N_t/N) = t$. To pomeni, da je gostota zaporedja $\{\varepsilon_n\}$ na intervalu $(0, t)$ enaka t . Na intervalu (s, t) , $0 \leq s < t \leq 1$, pa je njegova gostota enaka dolžini intervala $t - s$.

Izrek 4 dokažemo s pomočjo kriterija, ki velja za poljubna zaporedja:

Izrek 5. Zaporedje ε_n , $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$, je na intervalu $(0, 1)$ enakomerno porazdeljeno natanko tedaj, kadar za vsako funkcijo $f(x)$, ki je na intervalu $[0, 1]$ po Riemannu integrabilna, velja enakost

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) + \dots + f(\varepsilon_N)}{N} = \int_0^1 f(x) dx \quad (11)$$

Dokažimo le to, da je pogoj (11) zadosten. Denimo, da za neko zaporedje $\{\varepsilon_n\}$ velja formula (11) za vsako po Riemannu integrabilno funkcijo $f(x)$. Pa vzemimo funkcijo $f(x)$, ki je na intervalu $[0, t)$, $0 \leq t \leq 1$, povsod enaka 1, na intervalu $[t, 1]$ pa povsod enaka 0. Ker je odsekoma zvezna in omejena, je po Riemannu integrabilna. Integral na desni je enak $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^t 1 dx = t$. Vsota $f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) + \dots + f(\varepsilon_N)$ v števcu na levi je enaka N_t , saj je $f(\varepsilon_k) = 1$, če $0 \leq \varepsilon_k < t$, in $f(\varepsilon_k) = 0$, če $t \leq \varepsilon_k \leq 1$. Tu je seveda N_t število členov ε_n , ki so

manjši od t za $1 \leq n \leq N$. Enačba (11) zdaj pove, da je $\lim_{N \rightarrow \infty} (N_t/N) = t$, tako da je zaporedje ε_n res enakomerno porazdeljeno po intervalu $(0, 1)$.

Toda, bo kdo vprašal, ali ni lažje dokazati neposredno izrek 4 kakor veljavnost formule (11) za vsako po Riemannu integrabilno funkcijo? Tu izkoristimo posebnost zaporedja $\varepsilon_n = (n\alpha)$. Vzemimo najprej funkcijo

$$f(x) = e^{2m\pi xi} = \cos 2m\pi x + i \sin 2m\pi x$$

kjer je m poljubno naravno število. Ker se $(n\alpha) = \varepsilon_n$ razlikuje od $n\alpha$ za celo število $[n\alpha]$, funkcija $f(x)$ pa je periodična s periodo 1, je $f(\varepsilon_n) = f(n\alpha) = e^{2m\pi\alpha i}$. Velja pa formula

$$e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{Nix} = e^{ix} \cdot \frac{e^{Nix} - 1}{e^{ix} - 1}$$

Na levi je namreč vsota geometrijskega zaporedja s kvocientom e^{ix} . Če tu vstavimo $x = 2m\pi\alpha$, delimo z N in napravimo limito $N \rightarrow \infty$, dobimo, da je za funkcijo $f(x) = e^{2m\pi xi}$ limita na levi v (11) enaka 0. Je pa tudi

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{2m\pi xi} dx = \int_0^1 (\cos 2m\pi x + i \sin 2m\pi x) dx = 0$$

Torej velja formula (11) za funkcijo $e^{2m\pi xi}$ in potem tudi za $\cos 2m\pi x$ in $\sin 2m\pi x$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Ker se dajo zvezne funkcije aproksimirati s trigonometričnimi polinomi, velja (11) za vse zvezne funkcije. Nazadnje pa ni težko videti, da velja tudi za vse po Riemannu integrabilne funkcije. Tako nam pomaga izrek 5 dokazati izrek 4.

NOVE KNJIGE

Radovan R. Janić, Dobrilo Đ. Tosić, Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita na tehničkim fakultetima (Matematička biblioteka, 37), 1979, Građevinska knjiga, Beograd. Strani 138 + VII. Cena 110.— din.

Knjižica je namenjena kandidatom za vpis na tehniške fakultete kot orientacija za priprave na izpit, pa tudi za obnovitev in utrditev srednješolskega znanja.

Avtorja sta v njej zbrala matematične naloge z naslednjih beograjskih fakultet: elektrotehniške, gradbene, tehnološko-metalurške, strojne in prometne. S presledki obsega zbirka sprejemne izpite vse od leta 1951, večini pa so priložene rešitve nalog. Le-te so večinoma lahke, le tu in tam je kakšna zahtevnejša. Opazna je razlika med posameznimi izpiti na isti fakulteti — tako glede teže nalog kot tudi njihovega števila. Zato bi bil koristen podatek, koliko časa so imeli dijaki za reševanje nalog.

Na začetku je naveden program elektrotehniške fakultete, v katerem so naštet tista poglavja srednješolske matematike, ki naj bi jih kandidati za vpis dobro poznali. Program obsega aritmetiko in algebro, planimetrijo, stereometrijo, trigonometrijo in analitično geometrijo. Zanimivo pa je, da manjkata vektorski in infinitezimalni račun.

H knjižici — sedanja izdaja je v bistvu že peta in razširjena z novimi nalogami — le ena opomba: rešene bi lahko bile vse naloge, rešitve pa zbrane na koncu v posebnem poglavju, saj prezgoden pogled na rešitev dijaka odvrača od samostojnega reševanja problemov.

Gorazd Lešnjak

PROSTORSKE PREDSTAVE IN KVANTNA MEHANIKA

PETER GOSAR

UDK 530.145.1

Kvantna mehanika se odpove predstavi o tiru delca. V svetu atomov tudi ni mogoče neposredno zaznavati kvantnih stanj. Zato je tu potrebna precejšnja previdnost pri vpeljavi in pojmovanju prostora.

CONCEPTS OF SPACE AND QUANTUM MECHANICS

The quantum mechanics abandons the idea of the particle path. In the world of atoms also direct observations of quantum states are not possible. This requires a careful reconsideration of the space concept.

Uvod

Zunanji svet zaznavamo v veliki meri prostorsko in časovno. Človek poskuša vtise, ki jih sprejema s čutili, urediti in odkriti njihovo medsebojno povezanost. Pri tem mu zelo pomaga predstava o prostoru in času. Prostorske in časovne predstave so zagotovo uporabljali na vseh stopnjah človekovega razvoja. Otroci pridejo zelo zgodaj do njih. Tudi drugim živim bitjem niso tuje. Tu bomo razpravljali le o prostoru. Da si ustvarimo pojem prostora, je potrebno zelo malo, na primer zaznavanje predmetov končne razsežnosti, ki zavzemajo različne medsebojne lege. H kvantitativni predstavi prostora spada merjenje razdalj. To se da napraviti le z omejeno natančnostjo. V zunanjem svetu, ki ga *neposredno* zaznavamo, merjenje navadno poteka z običajnimi mehaničnimi pripomočki, kot so metri, mikrometri in podobno. Recimo, da je natančnost takih meritev največ $10\ \mu\text{m}$. Za te meritve in temu ustrezajočo predstavo prostora ni potrebno nobeno znanje fizike. Potrebna je le geometrijska predstava in interpretacija.

V svetu geometrije ni problemov z nenatančnostjo. Poljubne razdalje, tudi tiste, ki jih ne moremo meriti, so pojmovno enakovredne in dopustne. Zanimivo je, da zgradba Evklidove geometrije sloni le na nekaterih najosnovnejših izkušnjah iz našega zaznavanja zunanjega sveta.

Fiziko seveda tudi zanima, kaj je s tistim velikostnim območjem geometrijskega prostora, ki ni dostopno neposrednim meritvam. To so deli prostora, katerih dimenzije so pod $10\ \mu\text{m}$ in recimo nad 1 km. Pri prvem koraku v razširjanju prostora si pomagamo večinoma z optičnimi pripomočki, kot so mikroskopi in daljnogledi. Tudi tu je interpretacija meritev pretežno geometrijska, osnova zanjo pa so zakoni razširjanja svetlobe v praznem prostoru in v snoveh. Valovni značaj svetlobe omejuje ločljivost takih naprav. Za te meritve je torej potrebna fizikalna interpretacija. Neposredno zaznavamo na primer mikroskopsko sliko in šele iz nje s fizikalnim modelom sklepamo, kakšen in kje naj bi bil predmet, ki ga opazujemo. Tu predmet vidimo le *posredno*.

Tudi meritve iz prve skupine, kjer uporabljamo mehanične pripomočke, kot so metri, imajo v končni fazi fizikalno interpretacijo in potekajo običajno

s prenosom svetlobe. Vendar so take meritve opravljali ljudje že v davnih časih, ko globjih fizikalnih predstav o svetu še ni bilo. Tu ni potreben kak fizikalni model sveta, pač pa le geometrijska predstava. Take meritve spadajo v področje neposrednega zaznavanja in zato za samo meritev in smiselno uporabo merskih rezultatov fizikalna interpretacija ni potrebna.

Meritve z optičnimi in tudi drugimi pripomočki, na primer radarske in akustične metode, močno razširjajo območje prostora, ki je dostopno opazovanju in merjenju. Spodnjo mejo predstavljajo nekako velikosti atomov in molekul. V tem delu prostora zadoščajo za opis pojavov v veliki meri zakoni klasične fizike. Tako se na primer mehanika ukvarja z zakoni pri gibanju teles. Pri dovolj majhnem telesu opišemo gibanje s tem, da povemo, kako se lega telesa r s časom spreminja. Trenutno *stanje* delca je v mehaniki popolnoma podano z navedbo krajevnih koordinat r in gibalne količine p oziroma hitrosti v . Tem stanjem bomo rekli tudi *klasična (gibalna) stanja*. Opozoriti moramo na dve bistveni značilnosti klasične mehanike. Prvič, v klasični mehaniki obstajata pojma lege in tira delca. Drugič, klasična mehanika se ne sprašuje, zakaj je stanje določeno s krajevnimi koordinatami in gibalno količino in ne drugače. Stanje delca ima za poznano iz meritev. S problemom merjenja se neposredno ne ukvarja. Zato klasična mehanika v principu dopušča poljubno natančnost pri navajanju lege in hitrosti v danem trenutku. Klasična mehanika je tako preprosta ravno zato, ker obravnava le zakone pri gibanju delcev. Kot je znano, se stvari popolnoma spremenijo pri prehodu v področje atomskih dimenzij. Treba se je odpovedati pojmu natančne lege in tira delca in s tem klasičnemu pojmu stanja. S tem prehajamo v domeno kvantne mehanike, ki zahteva precejšnjo previdnost pri vpeljavi in pojmovanju prostora.

Zasnova in problemi kvantne mehanike

Osnovo matematične teorije kvantne mehanike predstavlja koncept linearnih vektorskih prostorov. Poljubno *kvantno* stanje $|\psi\rangle$ delca — ali bolj splošno stanje skupine delcev — lahko zapišemo kot linearno superpozicijo *baznih* stanj $|n\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (1)$$

kjer so c_n kompleksna števila. Ker se da poljubno stanje izraziti z baznimi stanji, pravimo, da stanja $|n\rangle$ tvorijo kompletan sistem stanj. Glede na zapis (1) si predstavljamo $|\psi\rangle$ kot vektor v prostoru, ki je definiran z baznimi vektorji $|n\rangle$. Pri vpeljavi pojma prostora je v matematiki treba definirati tudi skalarni produkt $\langle\psi'|\psi\rangle$ dveh vektorjev $|\psi\rangle$ in $|\psi'\rangle$. To naredimo takole

$$\langle\psi'|\psi\rangle = \sum_n c_n'^* c_n \quad (2)$$

Bazna stanja so med seboj ortogonalna, $\langle n'|n\rangle = 0$, in normirana, $\langle n|n\rangle = 1$. Stanja $|n\rangle$ predstavljajo kompletan ortonormiran sistem stanj in ustrezen linearni vektorski prostor se imenuje Hilbertov prostor.

Stanje $|\psi\rangle$ se s časom spreminja. Koeficienti c_n so funkcije časa. Enačba gibanja v kvantni mehaniki je Schrödingerjeva enačba

$$i \hbar \partial|\psi\rangle/\partial t = \hat{H} |\psi\rangle \quad (3)$$

$\hat{H}$ predstavlja Hamiltonov operator za energijo sistema. S to zadnjo trditvijo smo zelo malo povedali, ker je treba pojem energije v področju atomskih razmer šele opredeliti. Vsekakor postane enačba (3) uporabna le, če poznamo matrične elemente $\langle n' | \hat{H} | n \rangle$ Hamiltonovega operatorja. Te bi lahko določili eksperimentalno, če bi sledili časovnemu razvoju različnih stanj $|\psi\rangle$ in iz tega sklepali na $\hat{H}$. Tu se pa začnejo principialne težave. Stanj $|\psi\rangle$ oziroma baznih stanj $|n\rangle$ ne moremo zaznavati neposredno ali s pripomočki klasične fizike, na primer z optičnim mikroskopom. Saj o legi, poti in hitrosti elektrona v atomu ali o kakšnih drugih parametrih, ki bi opredelili stanje v klasičnem smislu, ne moremo več govoriti. Fizika je v atomskih razmerah bistveno težja od klasične fizike, ker se mora ukvarjati tudi s problemi opredeljevanja in ugotavljanja stanj. Vprašanja narave kvantnih stanj so tu del teorije.

Informacijo o dogajanjih v atomih lahko dobimo le posredno. V ta namen uporabljamo predvsem sipanja delcev in elektromagnetnega valovanja. Curek delcev pošljemo na tarčo, ki jo sestavljajo atomi ali molekule, ki jih želimo raziskovati. Nato z raznimi senzorji analiziramo sipane delce. To, kar pri takem poskusu merimo, spada v domeno klasične fizike. Lahko na primer merimo z zadostno natančnostjo hitrost in smer vpadaajočih in sipanih delcev. Pri določevanju smeri uporabljamo reže, ki imajo veliko odprtino v primerjavi z atomskimi dimenzijami. V celoti smo popolnoma v področju, kjer veljajo klasični zakoni, kar zadeva gibanja delcev. Sami senzorji lahko sicer delujejo na kvantnih principih. To so na primer fotocelice, polprevodniški števeci in slično. Vendar je to postranskega pomena.

Naloga kvantne mehanike je sedaj dvojna. Opredeliti mora naravo kvantnih stanj $|n\rangle$ mikroskopskega sveta in določiti Hamiltonov operator, obenem pa najti korespondenco med kvantnimi in klasičnimi stanji. Kvantni zakoni morajo biti seveda taki, da preidejo v klasični limiti v zakone klasične fizike.

Obstoj kompletnega sistema stanj spada med postulate kvantne mehanike. V resnici gre tu za popolnoma abstraktno matematično hipotezo. O sami naravi stanj ne moremo neposredno ničesar povedati. Da povežemo ta stanja s fiziko, je treba vpeljati v Hilbertovem prostoru operatorje, ki jim pripišemo fizikalni pomen. To je mogoče le pri hermitskih operatorjih.

Naj bo $\hat{A}$ hermitski operator. Tedaj je v enačbi

$$\hat{A} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \quad (4)$$

lastna vrednost λ operatorja $\hat{A}$ realna. Množica možnih lastnih vrednosti λ predstavlja spekter operatorja $\hat{A}$ in ga skupaj z lastnimi stanji $|\lambda\rangle$ popolnoma definira. Stanja z različno lastno vrednostjo λ so med seboj ortogonalna. To je zelo pomembna lastnost. Omogoča, da izberemo bazna stanja ali bazo Hilbertovega prostora tako, da so stanja $|n\rangle$ lastna stanja enega ali več hermitskih operatorjev, ki med seboj komutirajo. Če je množica teh operatorjev dovolj velika, je mogoče enolično opredeliti poljubno bazno stanje $|n\rangle$ z navedbo ustreznih lastnih vrednosti operatorjev iz množice. Taki množici operatorjev pravimo, da je *popolna*.

Za fiziko so posebno zanimivi operatorji, ki imajo zvezen spekter. Pri obravnavanju posameznega delca vpeljemo operator krajevnega vektorja $\mathbf{r}$ z definicijsko enačbo

$$\hat{\mathbf{r}} |\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \quad (5)$$

$\hat{\mathbf{r}}$ predstavlja v resnici trojico med seboj komutirajočih operatorjev $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ z lastnimi vrednostmi $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Če pri delcu ne upoštevamo spina, je trojica operatorjev $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ popolna. Lastne vrednosti imajo zvezen spekter, ki se razteza čez celotno območje realnih števil. Dobro se je treba zavedati, da je (5) definicijska enačba za operator $\hat{\mathbf{r}}$. Dali smo mu ime operator krajevnega vektorja zato, ker bomo skušali pozneje povezati $\mathbf{r}$ s klasičnim pojmom lege v prostoru. Ker smo postulirali zvezen spekter, lahko lastne vrednosti x, y, z predočimo kot krajevne koordinate vektorja $\mathbf{r}$ v tridimenzionalnem evklidskem prostoru. To je običajen prostor, ki nima nobene zveze s pojmom Hilbertovega prostora.

Poleg operatorja $\hat{\mathbf{r}}$ je pomemben operator v kvantni mehaniki tudi operator gibalne količine $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$. Zanj velja

$$\hat{p}_i \hat{r}_j - \hat{r}_j \hat{p}_i = -i\hbar \delta_{ij}, \quad i, j = x, y, z \quad (6)$$

To je znano komutacijsko pravilo, ki pove, da niso mogoča taka stanja delca, ki bi bila istočasno lastna stanja operatorjev krajevnega vektorja in gibalne količine. Enačba (6) je osnovna enačba kvantne mehanike. Tudi operator gibalne količine $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ ima zvezen spekter. Po analogiji s prejšnjim primerom vpeljemo tridimenzionalen prostor, v katerem predstavljajo vektorji $\mathbf{p}$ gibalno količino delca. Če si izberemo pri opisu kvantnih pojavov stanja $|\mathbf{r}\rangle$ kot bazna stanja Hilbertovega prostora, govorimo o reprezentaciji x . Koordinatni sistem Hilbertovega prostora pa lahko tudi zavrtimo tako, da tvorijo bazo prostora lastna stanja $|\mathbf{p}\rangle$ operatorjev gibalne količine. Operatorji $\hat{\mathbf{p}}$ tudi tvorijo popolno množico komutirajočih operatorjev. Tedaj govorimo o reprezentaciji p . Z vrtenjem koordinatnega sistema lahko pridemo do najrazličnejših reprezentacij. Matematično so vse reprezentacije dopustne in med seboj popolnoma enakovredne. Nastane pa vprašanje, ali fizika katero od reprezentacij privilegira. To je odvisno od tega, kakšen je Hamiltonov operator, pa tudi od korespondence med kvantnimi in klasičnimi stanji. Na to bomo poskušali odgovoriti v naslednjem poglavju.

Korespondenca in privilegiranost reprezentacije x

Izbira Hamiltonovega operatorja je tesno povezana s problemom korespondence. Da poenostavimo govorjenje, se bomo v nadaljnjem večkrat omejili na enodimenzionalne prostore in nadomestili $\hat{\mathbf{r}}$ z $\hat{x}$, $\hat{\mathbf{p}}$ pa s $\hat{p}$. Zapišimo poljubno stanje delca v reprezentaciji x . Ustrezne koeficiente c_n v razvoju (1) predstavimo z valovno funkcijo $\psi(x)$. Stanja delca, ki jih zaznavamo pri poskusih sipanj, so stanja, katerih valovna funkcija ima obliko valovnega paketa v prostoru x . Velikost valovnega paketa, to je velikost intervala x , v katerem je $\psi(x)$ znatno različen od 0, je precej večja od atomskih ali molekulskih razsežnosti. Srednjo vrednost $\langle x \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle$ poistovetimo s klasično lego delca x . Nenatančnost v legi, ki jo opredelimo z $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle \psi | (\hat{x}^2 - \langle x \rangle^2) | \psi \rangle$, pa ima tipično velikostno stopnjo nenatančnosti klasičnih meritev. Podobno poistovetimo $\langle p \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle$ s klasično gibalno količino p . Tudi ta ni ostra, vendar so fluktuacije $\langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle \psi | (\hat{p}^2 - \langle p \rangle^2) | \psi \rangle$ le velikostne stopnje nenatančnosti klasičnih meritev. Pri valovnih paketih primernih dimenzij lahko torej govorimo o legi, tiru in hitrosti delca, seveda le v okviru natančnosti meritev

v makroskopskem svetu. S tem dobimo stično točko med opisom dogajanj v atomskih dimenzijah in klasičnim makroskopskim gibanjem delcev.

Z opisano korespondenco smo območje za fiziko zanimivega geometrijskega prostora razširili v področje atomov. Ta razširitev prostorskih predstav pa ni tako lepa, kot bi se zdelo na prvi pogled. Pri makroskopskem dojetanju zunanjega sveta je gotovo bistvena predstava o legi in tiru delcev. V atomskem svetu se moramo temu odpovedati. Koordinata delca in gibalna količina sta tu predvsem matematična pripomočka, ki ju uporabljamo v formalizmu kvantne mehanike. Kvantna mehanika izhaja iz dokaj drzne hipoteze, da je Hamiltonov operator v Schrödingerjevi enačbi oblikovno enak klasični hamiltonki, če zamenjamo $\mathbf{p}$ in $\mathbf{r}$ z ustreznimi operatorji $\hat{\mathbf{p}}$ oziroma $\hat{\mathbf{r}}$. To je sicer v skladu s korespondenčnim principom, da se morajo zakonitosti, ki izvirajo iz Schrödingerjeve enačbe, v makroskopskem področju ujemati z zakonitostmi klasične mehanike, ni pa edina možnost za izbiro takih mikroskopskih gibalnih enačb, ki zadoščajo korespondenčnemu principu.

V področju atomov ne moremo konstruirati valovnih paketov dovolj majhnih razsežnosti, da bi lahko z zadostno natančnostjo govorili o legi in tiru elektrona v klasičnem smislu in pri tem še vedno ostali v okviru energij, ki so tipične za atome, to je nekaj eV. S tem ko smo se odpovedali pojmom lege in tira, zgubi v atomskem svetu prostorska predstava na videz velik del svoje privlačnosti in koristnosti. Morda bi si lažje predstavljali pojave v atomu v reprezentaciji p ali kaki drugi. Pa je vendarle reprezentacija x privilegirana. To spoznamo, če študiramo lastnosti coulombske interakcije med delci, ki je edina pomembna interakcija v atomskih razmerah. Bistvena za uporabnost prostorske predstave je lastnost operatorja $\hat{V}$ za coulombsko interakcijo, da je diagonalen v reprezentaciji x . Vsi izvendiagonalni matrični elementi $\langle \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2' | \hat{V} | \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 \rangle$ so nič. Od nič različni elementi so le $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | \hat{V} | \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 \rangle$. Tu predstavljata $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$ koordinati delcev. Velikost diagonalnega matričnega elementa je $e_1 e_2 / 4\pi \epsilon_0 r_{12}$, kjer sta e_1 in e_2 naboja delcev in $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Diagonalnost interakcijskega operatorja omogoča, da se vpelje v fiziko pojem sile

$$\mathbf{F} = -\text{grad} \langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r} \rangle \quad (7)$$

ki je osnova celotne klasične fizike. Ravno zato lahko tudi v atomskem svetu o mnogih stvareh razmišljamo in si jih predstavljamo v klasičnem smislu.

Poznamo tudi interakcije, ki niso diagonalne v reprezentaciji x . Taka je na primer interakcija nabitega delca z elektromagnetnim poljem. Hamiltonov operator za gibanje nabitega delca v elektromagnetnem polju z vektorskim potencialom $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ se glasi

$$\hat{H} = [\hat{\mathbf{p}} - e \mathbf{A}(\mathbf{r})]^2 / 2m \quad (8)$$

Če od $\hat{H}$ odštejemo operator za kinetično energijo $\hat{p}^2 / 2m$, ostane interakcijski člen

$$\hat{H}' = - (e/2m) [\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{p}}] + (e^2/2m) \mathbf{A}^2(\mathbf{r}) \quad (9)$$

ki ni diagonalen v reprezentaciji x , da se pa razbiti na posamezne člene in faktorje, ki so diagonalni v reprezentaciji x oziroma p .

Kadar imamo več delcev, pripada vsakemu delcu posebej lasten podprostor v Hilbertovem prostoru celotnega sistema. Tako lahko vpeljemo re-

prezentacijo x za vsak delec posebej. S temi reprezentacijami definiramo en sam geometrijski prostor za vse delce skupaj. V tem prostoru so krajevne koordinate lastne vrednosti operatorjev za lego posameznih delcev. V makroskopskem področju je to ravno navadni prostor.

Razdelitev prostora na dve območji glede na to, kje zadoščajo klasični in kje moramo uporabljati kvantne zakone gibanja, je odvisna od vrste delcev in njihove energije. Gibanja delcev, ki so težji ali imajo večjo energijo, lahko opisujemo klasično v večjem območju prostora. Spomnimo se sipanja delcev α na atomskih jedrih. Rutherford je okoli leta 1910 raziskoval notranjost atomov s sipanjem delcev α . Njegove raziskave so bistveno vplivale na sedanjost predstavo o zgradbi atomov. Za nas je tu pomembna ugotovitev, da lahko gibanje delca α v atomu opisujemo s klasično mehaniko in to prav do razdalj od atomskega jedra, ki so velikostne stopnje njegovega premera. Pri delcih α lahko torej govorimo o tiru delca tudi v atomu. Na prvi pogled bi se zdelo, da lahko z uporabo vedno težjih delcev in višjih energij otipljemo celoten prostor na klasičen makroskopski način. To je le deloma res. Težji delci so sestavljeni delci in njihova velikost raste z maso; to prinaša v pojem lege novo nedoločenoost. Tudi visoke energije nosijo s seboj nove težave, ki so povezane s problemi sevanja in nastajanja novih delcev. To so pa že vprašanja, ki ne spadajo več v okvir te razprave.

Dualnost

Valovna funkcija prosto se gibajočega delca z natančno določeno gibalno količino ima obliko valovanja

$$\psi(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar) \quad (10)$$

kjer je V prostornina prostora, v katerem funkcijo $\psi(\mathbf{r})$ normiramo. Ker so coulombske interakcije med delci diagonalne v reprezentaciji x , pride valovni značaj funkcije (10) pogosto do izraza pri sipanjih. Lep primer za to je sipanje elektronov na kristalih. Tu sipanja na različnih atomih prispevajo različne fazne faktorje k sipalni amplitudi; to povzroča interferenčne pojave podobno kot pri sipanjih valovanj. V zvezi s tem se pogosto govori o dualnosti. Elektron se deloma obnaša kot klasičen delec, deloma pa kot valovanje. Ima gibalno količino $\mathbf{p} = \langle \psi | \hat{\mathbf{p}} | \psi \rangle$ in valovni vektor $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$. Pojem dualnosti je nastal iz primerjave z razmerami pri elektromagnetnem valovanju in fotonih. V kvantni teoriji je kvantizirano tudi elektromagnetno valovanje. To vodi do pojma fotonov. Tudi fotonu pripisujemo gibalno količino $\mathbf{g}$ in valovni vektor $\mathbf{q} = \mathbf{g}/\hbar$. Vendar je pomen teh količin tukaj drugačen. Ta trditev je izredno pomembna in jo bomo podrobneje utemeljili.

Pri elektronu je $\mathbf{p}$ in s tem tudi $\mathbf{k}$ podan z valovno funkcijo oziroma stanjem elektrona. Poleg stanja nas pri vsakem delcu zanimajo še podatki o delcu, kot sta masa m in naboj e . Maso potrebujemo pri zapisu operatorja za kinetično energijo. Naboj e pa je v bistvu interakcijska konstanta, ker določa moč coulombske sklopitve delca z drugimi delci. m in e sta invarianti, to je neodvisni od stanja delca. To pa ni res za gibalno količino $\mathbf{p}$ ali za valovni vektor $\mathbf{k}$. Kako je s tem pri fotonih? Pojem fotona vpeljemo, ko kvantiziramo gibalne enačbe za amplitudo elektromagnetnega valovanja. Poljubno elektromagnetno valovanje lahko z Fourierovo analizo razstavimo na ravne valove.

Posamezen ravni val je opredeljen z navedbo valovnega vektorja $\mathbf{q}$ in polarizacije $\mathbf{e}$. Časovno spreminjanje amplitude posamezne Fourierove komponente je harmonično in zadošča ravno taki gibalni enačbi kot koordinata x navadnega harmoničnega oscilatorja. To omogoča kvantizacijo energije na enak način kot pri harmoničnem oscilatorju. Lastne vrednosti energije so $E = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$, kjer je ω ustrezna frekvenca in n celo število. Pravimo, da imamo v polju n fotonov vrste $(\mathbf{q}, \mathbf{e})$. Foton je natančno opredeljen z navedbo gibalne količine $\mathbf{g}$ in polarizacije $\mathbf{e}$. Hilbertov prostor za izbrano vrsto fotonov je izomorfen s Hilbertovim prostorom enodimenzionalnega harmoničnega oscilatorja. Pri tem prevzame vlogo krajevne koordinate x amplituda vektorskega potenciala ali, če hočemo, amplituda električnega ali magnetnega polja. Podobno kot pri delcih s končno maso, to je elektronih, protonih, nevtronih itd., lahko tudi tu vpeljemo pojem »krajevne« koordinata in s tem »prostora«. Tak »prostor« je nujno enodimenzionalen. Krajevna koordinata tu ne pomeni koordinate posameznega fotona in takega »prostora« nikakor ne moremo poistovetiti s prostorom, ki ga uporabljamo pri opisu stanj delcev s končno maso. Ta prostora se že dimenzijsko razlikujeta. Foton se zelo razlikuje od drugih delcev. Predstava o krajevni koordinati fotona v prostoru ni mogoča.

Zanimiva je interakcija elektromagnetnega valovanja z elektroni. O tem smo že spregovorili v okviru semi-klasične aproksimacije (9). Če kvantiziramo elektromagnetno valovanje, postane vektorski potencial operator, ki deluje tudi na fotonska stanja. $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ veže stanja, ki se razlikujejo za ± 1 v številu fotonov. To se pravi, da pri interakciji z elektronom en foton nastane ali se absorbira. Število fotonov v sistemu ni več konstantno. Zanimiva je krajevna odvisnost $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ za določeno vrsto fotonov. Krajevno odvisen del se zapiše v obliki valovanja $\exp(\pm i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$. Vidimo, da nastopa pri fotonih valovni vektor $\mathbf{q}$ kot interakcijski parameter. To je bistvena ugotovitev. Valovni vektor fotona je pojmovno čisto nekaj drugega kot valovni vektor elektrona. $\mathbf{q}$ je neodvisen od fotonskih stanj. Podobno je seveda tudi s pojmom gibalne količine. Ta ima pri elektronu sama na sebi fizikalni pomen, ki je povezan s stanjem elektrona. Pri fotonu je gibalna količina vpeljana kot pomožni pojem pri študiju interakcij in sipanj fotonov na elektronih. Pri teh procesih so različni od 0 le taki matrični elementi, ki ohranjajo »celotno« gibalno količino. To se pravi, da moramo h gibalni količini elektrona prišteti še tako imenovano gibalno količino $\mathbf{g} = \hbar \mathbf{q}$ fotona in tako dobljeno »celotno« gibalno količino primerjati pred interakcijo oziroma trkom in pozneje.

Ugotovili smo, da o legi fotona v prostoru ne moremo govoriti. Tudi gibalna količina in valovni vektor imata pri fotonu drugačen pomen kot pri elektronu. Kljub temu lahko včasih v določenem smislu govorimo o krajevni koordinati fotonov. Lahko namreč konstruiramo valovne pakete za vektorski potencial tako, da je interakcija elektrona z elektromagnetnim poljem zelo lokalizirana v prostoru. To bi opravičilo ohlapen način govorjenja, da je bil foton na mestu, kjer je prišlo do interakcije. Pri takem načinu govorjenja moramo biti izredno previdni. Najbrž lahko govorimo o krajevni koordinati le pri delcih, katerih število se ohranja pri interakcijah. Tu smo razmere pri visokih energijah pustili popolnoma vnemar. Tam gre že za nadaljnjo razširitev prostorskih predstav v področje razsežnosti, ki so manjše od velikosti nukleonov. Tako daleč pa v razmišljanjih ne bomo šli.

Zrnatost prostora?

Opredelitev korespondence med kvantnimi in klasičnimi stanji delcev in taka izbira Hamiltonovega operatorja, da v klasični limiti preidejo kvantni zakoni v klasične, sta bistvena elementa kvantne teorije. Oboje je mogoče doseči na več načinov. Kvantna mehanika izbere najpreprostejše. Predstavo geometrijskega makroskopskega prostora razširi na celotno področje atomskih in subatomskih dimenzij. V tem prostoru nato uporabi Hamiltonove operatorje, ki so oblikovno enaki klasičnim hamiltonkam. Izjemo napravi le pri obravnavi spina delcev. Za to prostostno stopnjo ni klasične analogije in je zato treba vpeljati dodaten spinski prostor. Spinski prostor je diskreten. V primeru elektrona sta mogoči le dve linearno neodvisni spinski stanji z lastnima vrednostma $\pm \frac{1}{2}$ komponente z spinskega operatorja. Vsi operatorji v spinskem prostoru imajo seveda diskreten spekter.

Postavlja se zanimivo vprašanje, ali morda ne delamo naravi sile, ko v kvantni mehaniki precej samovoljno ekstrapoliramo zveznost makroskopskega prostora tudi na razmere v atomih in še dalje v atomskih jedrih. Izredni uspeh kvantne mehanike v preteklih petdesetih letih potrjuje, da je bila izbrana pot pravilna, vsaj kar zadeva področja nizkih energij, to je fizike atomov in atomskih jeder. Vendar je lahko v tem področju energij enako uspešna tudi teorija, ki se odpove predstavi zveznega prostora. Poglejmo si to podrobneje.

Z enačbo (5) smo vpeljali operator krajevne koordinate in zanj zahtevali zvezen spekter. Sedaj bomo pa naredili nekoliko drugače. Ponovno se zaradi lažjega govorjenja omejimo le na eno dimenzijo. Vpeljemo operator $\hat{x}$ krajevne koordinate z enačbo

$$\hat{x}|n\rangle = n a |n\rangle \quad (11)$$

kjer n pomeni celo število in a neko osnovno dolžino. Tu je spekter operatorja $\hat{x}$ diskreten. Lastnih vrednosti in stanj $|n\rangle$ ne moremo več ponazoriti s poljubno krajevno koordinato x . Le diskretne točke $x = n a$ reprezentirajo lastne vrednosti in lastna stanja. Prostor je postal *zrnat*. Če je zrnatost dovolj fina, to se pravi, da je a dosti manjši od dimenzij atomskih jeder, bo valovna funkcija $\psi(n) = c_n$ v reprezentaciji z osnovnimi stanji $|n\rangle$ dala za področje atomov in atomskih jeder ravno tako dobro informacijo o stanju delca kot zvezna valovna funkcija $\psi(x)$ v običajni kvantni mehaniki. Iz definicijske enačbe sledi, da lahko zapišemo operator $\hat{x}$ kot

$$\hat{x} = a \sum_n n |n\rangle \langle n| \quad (12)$$

Ustreznega operatorja za gibalno količino $\hat{p}$, ki bi zadoščal zahtevi (6), to je

$$\hat{p} \hat{x} - \hat{x} \hat{p} = -i \hbar \quad (13)$$

tu ne moremo konstruirati. Pojem gibalne količine lahko kljub temu vpeljemo. Iz zapisa (10) za valovno funkcijo delca z gibalno količino $\mathbf{p}$ sklepamo na obliko valovne funkcije prosto se gibajočega delca v zrnatem prostoru. Stanje delca z gibalno količino $p = \hbar k$ definiramo z

$$|k\rangle = N^{-1/2} \sum_n \exp(i n k a) |n\rangle \quad (14)$$

kjer je Na velikost enodimenzionalnega prostora, $N \rightarrow \infty$. Gibalna količina je tu zvezen parameter. Lahko bi konstruirali ustrezen operator za gibalno količino tako, da bi bila stanja $|k\rangle$ lastna stanja tega operatorja z lastno vrednostjo $\hbar k$. Zapis zanj v reprezentaciji s stanji $|n\rangle$ ni preprost. V resnici to ni potrebno. Stanja $|k\rangle$ so namreč lastna stanja precej enostavnega hermitskega operatorja

$$\hat{T} = 2w - w \sum_n (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (15)$$

z lastnimi vrednostmi

$$\varepsilon(k) = 2w [1 - \cos(ka)] \quad (16)$$

w je navadno izbran kot pozitiven parameter. Če je valovna dolžina $\lambda = 2\pi/k$ valovanja velika v primerjavi z zrnatostjo a , torej $ka \ll 1$, preide (16) v

$$\varepsilon(k) \approx w a^2 k^2 = p^2/2m \quad (17)$$

$$m = \hbar^2/2w a^2 \quad (18)$$

V dolgovalovni limiti preide $\varepsilon(k)$ v klasičen izraz za kinetično energijo, če je w izbran tako, da je m enak masi delca. Operator $\hat{T}$ opravlja vlogo operatorja za kinetično energijo v zrnatem prostoru.

Vpeljava ustreznega Hamiltonovega operatorja je sedaj lahka. Če se delec giblje v potencialu $V(x)$, je najnaravnejša izbira Hamiltonovega operatorja za zrnati prostor naslednja

$$\hat{H} = 2w - w \sum_n (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) + \sum_n V(an) |n\rangle \langle n| \quad (19)$$

Podobno lahko zapišemo Hamiltonove operatorje, ki opisujejo interakcije med delci. Tu smo se morali odpovedati preprostemu zapisu operatorja za gibalno količino in tudi operator za kinetično energijo ni več $\hat{p}^2/2m$. Kljub temu ima gibalna količina tudi v tej teoriji fizikalni pomen. Da se pokazati, da ohranitveni zakoni za gibalno količino, čeprav bistveno modificirani, še vedno veljajo pri trkih. V dolgovalovni limiti se vsi rezultati ujemajo z običajno kvantno mehaniko. Če je valovna dolžina iste velikostne stopnje kot zrnatost a , pa so razmere čisto drugačne. Že iz (16) sledi, da je kinetična energija delca navzgor omejena. S tem dobimo čisto novo fiziko, ki postane pomembna v področju visokih energij.

V tem poglavju smo želeli le pokazati, da ekstrapoliranje predstave o zveznem prostoru na vedno manjše dimenzije ni nekaj, kar bi bilo samo po sebi razumljivo in nujno. Taka ekstrapolacija je zelo vprašljiva in je morda vzrok marsikaterim težavam in divergencam, s katerimi se mučijo teorije polj. Naj omenimo še to, da fizika v diskretnem prostoru fizikom nikakor ni tuja. Velik del kvantne fizike kristalov operira s takimi predstavami.

S tem zaključujemo razmišljanja o prostoru. Osvetlili smo nekatera vprašanja v zvezi s prostorskimi predstavami v svetu atomov in atomskih jeder. To je le del fizike, kjer zamisel prostora predstavlja bistven del teorije. Vnemar smo pustili vprašanja relativnosti in gravitacije. Osnova teh teorij so lastnosti štiridimenzionalnega prostora s časom kot četrto koordinato. Zamisel štiridimenzionalnega prostora močno razširja problematiko prostora v fiziki. To pa ne spada več v okvir te razprave.

OBLIKA MILNIČNE OPNE

Obravnavamo rešitev problema, ki utegne zanimati širši krog bralcev: najti obliko milnične opne, napete na danem žičnem ogrodju. Pri tem mislimo na poljubno ogrodje, ki ga dobimo, če nekaj kosov žice sestavimo tako, da se vsako krajišče dotika kakega kosa žice; ogrodje je sestavljeno iz povezanih žičnih okvirov.

V splošnem je taka opna sestavljena iz več gladkih delov, ki jih bomo imenovali kar »ploskve«. Poleg robov, določenih z žico, lahko tedaj nastopijo še »prosti« robovi, v katerih se stikajo različne ploskve. V danem žičnem ogrodju je v splošnem možnih več oblik open, ki se navadno razlikujejo po številu ploskev.

Opna je stabilna, če se pri poljubni dovolj majhni deformaciji poveča njena površina. V vsakem prostem robu pa se morajo stikati natanko tri ploskve. Trditev utemeljimo, če vzamemo, da se v prostem robu stikajo več kot tri ploskve. Kakor hitro se tak rob razcepi na dva, ki sta zelo malo razmaknjena, pri čemer nastane nova ploskev, se površina opne zmanjša. Prosti robovi se torej cepijo, dokler se v vsakem ne stikajo tri ploskve. Normale teh ploskev oklepajo v vsaki točki prostega roba zaradi ravnovesja sil enake medsebojne kote 120° .

Zanimajo nas le opne, kot je milnična, v katerih deluje površinska napetost. Ta je neodvisna od oblike opne in enaka v vseh njenih točkah. Zato je oblika opne določena samo s pogojem, da je njena površina minimalna. Oblika napete elastične opne pa je odvisna tudi od njene oblike v nenapetem stanju. Prav tako moramo izključiti opne, ki zapirajo plin (opne z mehurčki), tako da pritisk plina ni enak na obeh straneh ploskev.

Problema se lahko v splošnem lotimo le z numerično iteracijsko metodo. Zato moramo ugotoviti začetni približek za obliko opne, ki ga je mogoče transformirati v pravo opno tako, da okolica vsake točke na opni ostane podobna sama sebi. Neznana ni samo oblika posameznih ploskev, temveč tudi oblika prostih robov.

Rešitev za opno zadošča variacijskemu principu $\delta \int dS = 0$, kjer je $\int dS$ površina opne. Ustrezna Euler-Lagrangeva enačba pove, da je povprečna ukrivljenost opne v vsaki točki (razen v točkah na prostih robovih) enaka nič, tj., opna je v okolici vsake točke sedlasta (ali ravna).

Pri naši metodi oblike opne ne iščemo z Euler-Lagrangevo enačbo, ampak z numeričnim postopkom, s katerim dejansko minimiziramo površino opne. Vsako ploskev nadomestimo z mrežo iz trikotnikov. Pri tem podamo začetne položaje vseh oglišč, s čimer so opisani tudi prosti robovi. V vsaki iteraciji opravimo naslednji postopek: vse točke na mreži premaknemo drugo za drugo tako, da v vsaki točki približno minimiziramo vsoto ploščin trikotnikov, ki imajo v njej skupno oglišče. Trikotniki mreže imajo lahko v koordinatnem sistemu, v katerem podamo lege oglišč, popolnoma poljubno lego.

Ne da bi postala razprava manj splošna, se lahko omejimo na opne, katerih ploskve so med seboj povezane tako, da je mogoče z vsake priti na vsako dru-

go čez same proste robove. Točke trikotniške mreže so potem dveh vrst: na žičnih robovih so pri gibanju omejene na te robove (ali pa popolnoma fiksirane), vse preostale, vključno s tistimi na prostih robovih, pa so proste. Kadar pa ima opna kako simetrijo, bi radi računali obliko le tistih ploskev ali delov ploskev, iz katerih je mogoče sestaviti celotno opno. V ta namen razdelimo vse točke mreže na štiri tipe: (i) proste, (ii) vezane na ravnino, (iii) vezane na premico in (iv) fiksirane. Za vsako točko zadnjih treh tipov opredelimo to s homogenimi vezmi oblike

$$g_{1k} h_1 + g_{2k} h_2 + g_{3k} h_3 = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (1)$$

kjer je m število vezi, $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ pa vektor odmika točke od lege v predhodni iteraciji. (g_{ik} so koeficienti enačb m ravnin, na katere je točka istočasno vezana.)

Simetrije in vezi (1) omogočijo znatno zmanjšanje obsega računanja. Če je npr. ploskev sestavljena iz zrcalno simetričnih polovic, lahko eno polovico izpustimo. Gibanje točk novega, pomožnega roba je omejeno na zrcalno ravnino. Podobno ravnamo, če je zrcalnih ravnin več. Pomemben primer nastopi, kadar je vnaprej znano, da je ena od treh ploskev, ki se stikajo v kakem prostem robu, ravna. Od drugih dveh, ki sta skladni in ležita zrcalno simetrično glede na ravnino prve, obdržimo samo eno. Pri tem moramo storiti dvojje: (i) da ohranimo simetrijo, omejimo gibanje točk prostega roba na ravnino prve (ravne) ploskve; (ii) da preostali ploskvi (ravna in ukrivljena) prispevata k površini opne pravilna deleža, trikotnike na ukrivljeni ploskvi štejemo dvakrat več kot tiste na ravni ploskvi. S tem je tudi zagotovljeno ravnovesje sil v vsakem prostem robu. Nadaljnjo poenostavitev dosežemo, če na ravnih delih ploskev definiramo trikotnike tako, da ležijo vsa oglišča na robovih.

Del opne, ki preostane po opisani redukciji, je omejen (i) z žičnimi robovi in (ii) z gibljivimi robovi, ki potekajo po ploskvah in ležijo v simetrijskih ravninah teh ploskev. Nikoli pa ni omejen s kakim prostim robom.

Kako najdemo premik točke, s katerim zmanjšamo vsoto ploščin sosednjih trikotnikov, si oglejmo najprej za prosto točko.

V izbranem koordinatnem sistemu zapišemo ploščine trikotnikov, ki se stikajo v dani točki, kot funkcije njenega položaja $\mathbf{r}$. Da lahko izračunamo iskani premik $\mathbf{h}$, razvijemo te funkcije v Taylorjevo vrsto. Do drugih dveh oglišč k -tega sosednjega trikotnika naj vodita vektorja $\mathbf{A}_k$ in $\mathbf{B}_k$, tako da je ploščina trikotnika enaka velikosti vektorja $\mathbf{p}_k = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_k - \mathbf{r}) \times (\mathbf{B}_k - \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_k \times \mathbf{B}_k + \mathbf{c}_k \times \mathbf{r})$; tu je $\mathbf{c}_k = \mathbf{B}_k - \mathbf{A}_k$. Taylorjeva vrsta za ploščino se v okolici točke $\mathbf{r}$ glasi:

$$p'_k(\mathbf{h}) = p_k + (2p_k)^{-1} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{p}_k \times \mathbf{c}_k) + (8p_k^3)^{-1} c_k^2 (\mathbf{h} \cdot \mathbf{p}_k)^2 + O(h^3) \quad (2)$$

Označili smo $p'_k(\mathbf{h}) = p_k(\mathbf{r} + \mathbf{h})$, torej vzeli $\mathbf{h}$ za neodvisno spremenljivko. Vsakemu trikotniku v mreži pripada utež n_k , ki pove, kolikokrat moramo šteti ploskev ali del ploskve, na katerem leži trikotnik (razmerje dveh uteži je določeno s tem, kolikokrat ustrezni ploskvi nastopita v celotni opni). Namesto vsote ploščin trikotnikov, ki so zares v mreži in imajo v dani točki skupno oglišče, zapišemo vsoto:

$$P'(\mathbf{h}) = \sum_k n_k p'_k(\mathbf{h}) \quad (3)$$

Do drugega reda po h bo imel izraz (3) minimum, če bo za vse bazične vektorje $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, izpolnjena zahteva

$$\mathbf{e}_i \nabla_h P'(\mathbf{h}) = 0 \quad (4)$$

(Edini ekstrem je seveda minimum, ki pa ga lahko $P'(\mathbf{h})$ doseže v mnogo točkah, npr. če so vsi $\mathbf{c}_k$ v isti ravnini.) Iz (2) in (3) dobimo za najnižje rede po h naslednje izraze:

$$\mathbf{e}_i \nabla_h \sum_k n_k p_k = 0$$

$$\mathbf{e}_i \nabla_h \sum_k n_k (2p_k)^{-1} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{p}_k \times \mathbf{c}_k) = \sum_k n_k (2p_k)^{-1} (\mathbf{p}_k \times \mathbf{c}_k)_i = (\mathbf{a})_i$$

$$\mathbf{e}_i \nabla_h \sum_k n_k (8p_k^3)^{-1} c_k^2 (\mathbf{h} \cdot \mathbf{p}_k)^2 = \sum_k n_k (4p_k^3)^{-1} c_k^2 \mathbf{h} \cdot \mathbf{p}_k (\mathbf{p}_k)_i$$

Če definiramo simetrično matriko B z elementi

$$B_{ij} = \sum_k n_k (4p_k^3)^{-1} c_k^2 (\mathbf{p}_k)_i (\mathbf{p}_k)_j$$

in opravimo substitucijo $\mathbf{h}' = -\mathbf{h}$, preide zahteva (4) v naslednji sistem linearnih enačb v matričnem zapisu:

$$B\mathbf{h}' = \mathbf{a} \quad (5)$$

Za točke, ki niso proste, posplošimo enačbo (5) takole: vezi (1) zapišemo v obliki

$$A^T \mathbf{h}' = 0 \quad (1 \leq m \leq 3)$$

A je matrika s tremi vrsticami in m stolpci: $A_{ij} = g_{ij}$. Z ortogonalno matriko Q jo preoblikujemo tako, da ima nova matrika

$$G = QA$$

samo desni spodnji trikotnik dimenzije $m \times m$ različen od nič. (To dosežemo z naslednjim postopkom: po vrsti množimo A z matrikami Q_i , $i = 1, \dots, m$, ki v i -tem stolpcu matrike A pustijo samo zadnjih i elementov različnih od nič. Matrika Q_i ohrani ničle, pridelane v prejšnjih $i - 1$ stolpcih. S temi zahtevami lahko izračunamo Q_i in $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_m$. Ker so Q_i Householderjeve matrike zrcaljenja preko ravnine z enotno normalo $\mathbf{w}_i 2^{-1/2}$: $Q_i = I - \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T$, računamo kar z vektorji $\mathbf{w}_i$.)

Zdaj imamo vezan ekstrem, zato definiramo vektor m Lagrangevih multiplikatorjev λ , tako da namesto (5) zapišemo

$$\mathbf{a} - B\mathbf{h}' + A\lambda = 0 \quad (6)$$

Pomnožimo (6) z leve z matriko Q , označimo $Q\mathbf{a} = \mathbf{s}$, $QBQ^T = E$, $Q\mathbf{h}' = \mathbf{z}$, pa imamo ekvivalenten sistem enačb

$$\mathbf{s} - E\mathbf{z} + G\lambda = 0 \quad (7)$$

Vektor $G\lambda$ ima samo zadnjih m komponent različnih od nič. Hkrati dobimo iz zveze $0 = A^T \mathbf{h}' = G^T \mathbf{z}$, da ima vektor $\mathbf{z}$ zadnjih m komponent enakih nič. Zato lahko zmanjšamo dimenzijo sistema (7) za m , saj nas vektor λ ne

zanima. Okrajšane vektorje označimo s črtico ', prav tako tudi levi zgornji vogal matrike E . Rešiti moramo torej sistem enačb

$$E' \mathbf{z}' = \mathbf{s}' \quad (8)$$

dimenzije $3 - m$. Sistema (8) oziroma (5) rešujemo tako, da najprej diagonaliziramo še vedno simetrični matriki E' oziroma B :

$$E' = P D P^T \quad (9)$$

Z matriko Q smo v zvezi (7) zavrteli koordinatni sistem tako, da leži v njem premik $\mathbf{h}'$ na osi ali v koordinatni ravnini, t. j., vektor $\mathbf{z}$ ima le $3 - m$ komponent. V (9) smo koordinatni sistem zavrteli še enkrat in rešujemo enačbo z diagonalno matriko: $D(P^T \mathbf{z}') = P^T \mathbf{s}'$. Če je kaka lastna vrednost D_{ii} matrike E' po absolutni vrednosti »majhna«, ima vektor $P^T \mathbf{z}'$ v novem koordinatnem sistemu lahko veliko i -to komponento, kar pomeni tudi velik premik v prvotnem sistemu. Tak premik lahko močno deformira mrežo trikotnikov. Zato postavimo $(P^T \mathbf{z}')_i = 0$ za »premajhne« D_{ii} . Preostale komponente izračunamo preprosto:

$$(P^T \mathbf{z}')_j = (P^T \mathbf{s}')_j D_{jj}^{-1}$$

Premik $\mathbf{h}$ dobimo v dveh korakih: izračunamo vektor $\mathbf{z}'$: $\mathbf{z}' = P(P^T \mathbf{z}')$ in ga z ničlami dopolnimo do vektorja $\mathbf{z}$, nato pa izračunamo $\mathbf{h}$: $\mathbf{h} = -\mathbf{h}' = -Q^T \mathbf{z}$.

Za računanje po opisani metodi smo sestavili računalniški program. Njegova uporaba je pokazala, da numerični postopek konvergira dokaj počasi, posebno če imamo skoraj ravne ploskve, sestavljene iz sorazmerno velikega števila trikotnikov. V tem primeru je dobro, če začetni približek ni preveč stran od pravega rezultata.

Konvergenco smo pospešili s pomočjo preproste Aitkenove formule [1]: če členom konvergentnega geometrijskega zaporedja prištejemo konstanto a , dobimo zaporedje $\{x_k\}$, katerega limita je a , pri tem pa za vsaka k velja relacija

$$a = x_{k+2} - (x_{k+1} - x_k)^2 (x_k + x_{k+1} - 2x_{k+2})^{-1} \quad (10)$$

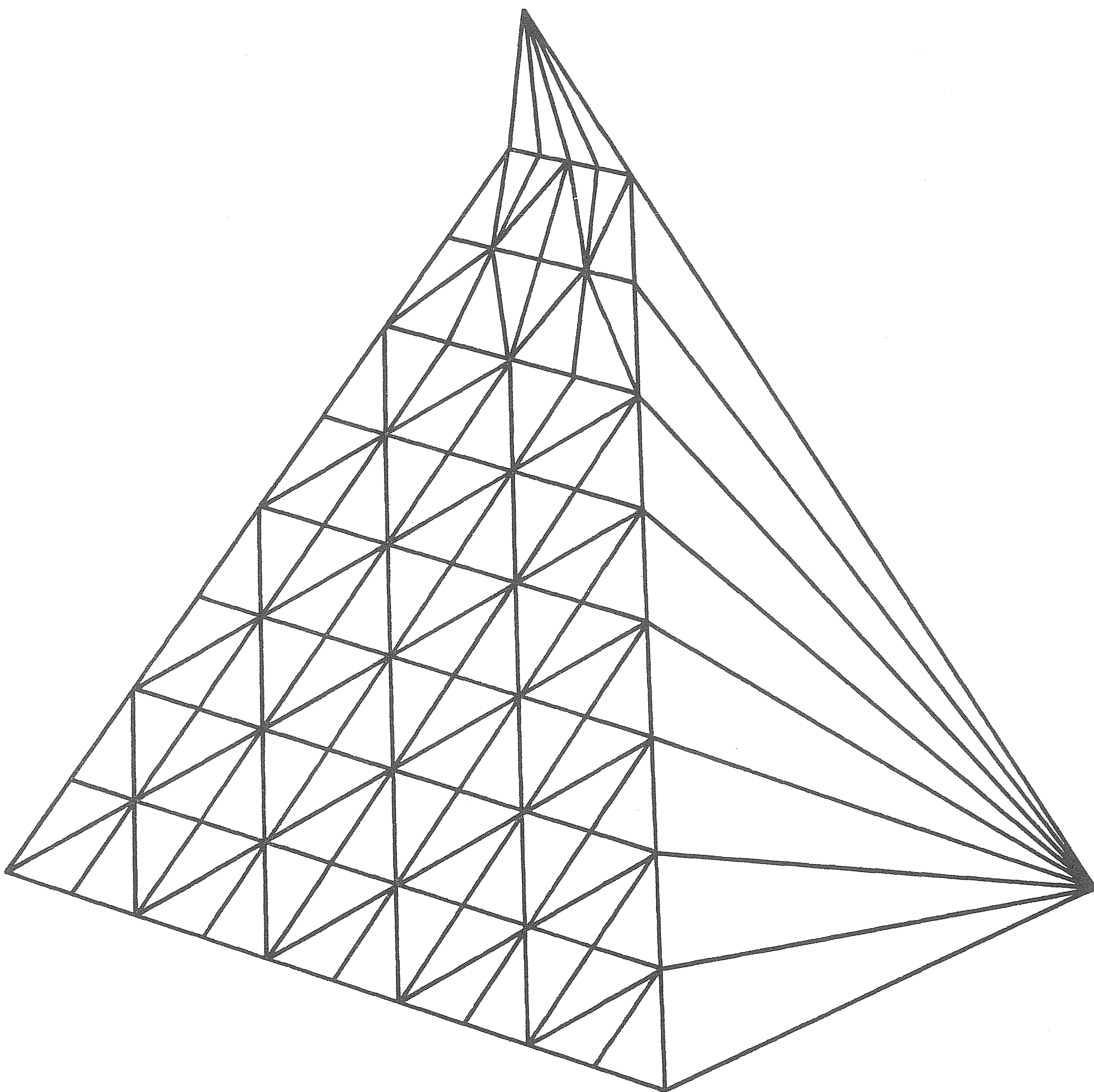
Sklep obrnemo: (10) je ocena za limito zaporedja, pri katerem absolutne vrednosti razlik sosednjih členov padajo približno geometrijsko. Koordinate točk mreže se že po nekaj deset iteracijah spreminjajo tako, da smemo uporabiti (10) za vsako izmed njih. Vrednost a po formuli (10) je zelo občutljiva za vrednosti razlik sosednjih členov zaporedja, zato vzamemo za x_k , x_{k+1} , x_{k+2} vrednosti izbrane koordinate na vsakih nekaj iteracij. Formulo (10) uporabimo večkrat in sicer za vse točke hkrati (takemu izračunu novih koordinat točk bomo rekli »skok«). Na ta način lahko prihranimo število iteracij, ki je enake velikostne stopnje kot število opravljenih iteracij. Upoštevati moramo, da tak skok delno poruši monotono konvergenco koordinat točk, saj postane mreža zaradi občutljivosti formule (10) lokalno »valovita«. Da se monotona konvergenca ponovno vzpostavi, moramo med dvema skokoma opraviti dovolj veliko število iteracij. Prav tako vidimo, da postanejo proti koncu računa, ko so premiki točk v posameznih iteracijah majhni ali menjavajo smer, skoki ne učinkoviti.

Pogosto se zgodi, da se pri skoku površina trikotniške mreže poveča. Tedaj poskusimo premike vseh točk razpolavljati ob predpostavki, da smo »presko-

čili« minimum površine. Če to ne pomaga, skoka ne opravimo. (V tem primeru je zelo verjetno, da so premiki točk pri skoku med seboj precej različni.) Na podoben problem včasih naletimo pri nekaterih točkah v posameznih iteracijah.

Da dobimo zadovoljiv rezultat, moramo število potrebnih iteracij izluščiti iz poteka računa v vsakem primeru posebej. Povprečna velikost premikov točk pri tem ni najboljše merilo, če se točke premikajo v stalnih smereh. Isto velja za spremembe površine mreže. Dobro merilo pa so koti med normalami na ploskve v prostih robovih, ki morajo biti čim bližje 120° .

Izračunali smo obliko ene od možnih milničnih open v kocki z robovi iz žice. Če za začetek privzamemo, da so vse ploskve te opne ravne, potem opno sestavljata dve pravilni prisekani piramidi, ki imata skupno manjšo osnovno ploskev — kvadrat v središču kocke. Stranske ploskve piramid tvori osem



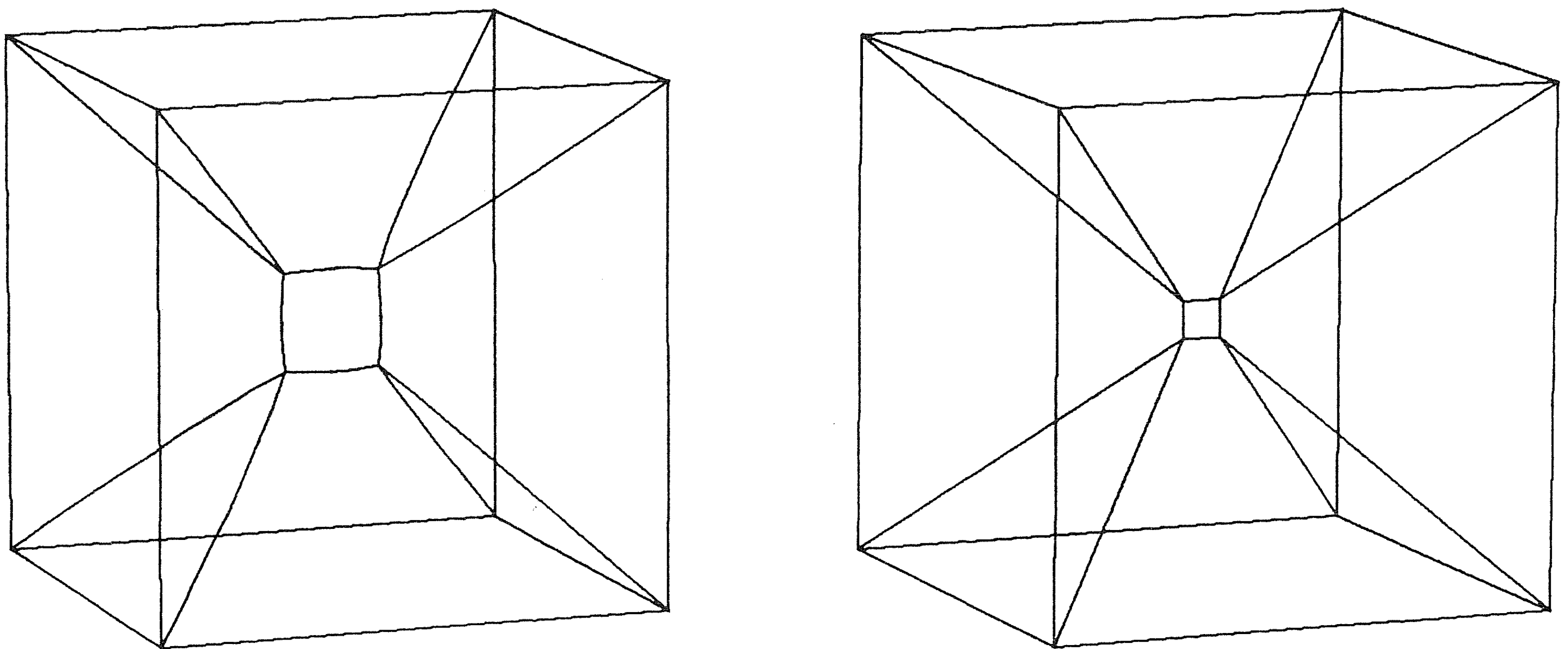
Sl. 1. Trikotniška mreža, ki je rabila kot začetni približek pri računanju oblike milnične opne v žični kocki

enakokrakih trapezov, ki segajo do robov kocke. Med stranskimi robovi piramid in ustreznimi robovi kocke so razpete štiri trikotne ploskve.

Naš problem izvira iz [2] (naloga 6, str. 26) in je predmet Vprašanja št. 116 [3]. Omenjena naloga vprašuje po razmerju stranice središčnega kvadrata in roba kocke, toda ob privzetku, da je opna sestavljena iz ravnih ploskev. To razmerje je $x = 0,072912$. Vendar se pri tem ploskve v prostih robovih ne stekajo pod koti 120° . Temu pogoju ne moremo zadostiti z ravnimi ploskvami niti tedaj, če ne upoštevamo pogoja o minimalnosti površine. Obema pogojema hkrati pa je zadoščeno, če so ploskve primerno ukrivljene.

Zaradi velike simetrije opne smo se omejili na njen del, ki ga kaže sl. 1. To je začetni približek z vrisano trikotniško mrežo. Sestavljajo ga naslednji deli omenjenih ploskev: polovica trapeza, osmina kvadrata in polovica trikotnika. Trikotnike na polovici trapeza štejemo (glej enačbo (3)) dvakrat ($n_k = 2$), vse druge enkrat ($n_k = 1$). Na ta način implicitno upoštevamo osmino celotne opne.

Rezultat je predstavljen na sl. 2 in 3. Vseh iteracij je bilo 290. Izvršeni so bili štirje skoki, ki so skupaj prihranili podobno število iteracij. Ves račun je zahteval okoli 300 sekund računalniškega časa.



Sl. 2. Primerjava obrisov milnične opne v žični kocki, dobljenih z našim računom (levo) in obrisov, dobljenih s privzetkom o ravnih ploskvah [2] (desno)

Na sl. 2 primerjamo svojo rešitev z rešitvijo za ravne ploskve. Poleg drugačne velikosti štirikotnika v središču kocke je opazna ukrivljenost prostih robov ploskev. Naj bo rob kocke enak 1. Razdalja med sosednjima ogliščema središčnega štirikotnika je tedaj enaka 0,1863 ali približno $2,56x$. Največji razmik med nasprotnima stranicama tega lika meri 0,1981. Minimalna površina celotne opne v kocki je, če vzamemo ravne ploskve, enaka 4,24253, naš rezultat pa je 4,23972.

Sl. 2 in 3 sta narisani z računalnikom v centralni projekciji. V ta namen izdelan program kaže obliko trikotniške mreže ne glede na to, kakšni so trikotniki. Program riše preseke mreže z enim ali dvema (pravokotnima) snopoma ekvidistantnih ravnin. Pri tem z daljicami poveže presečišča teh ravnin s stranicami trikotnikov. Tako dobljene lomljene črte projicira na ravnino

papirja; mreži določimo položaj in zasuk v prostoru glede na ravnino risalnega papirja. Risbo vsakega dela opne lahko ponovimo v nekaj poljubnih položajih, tako da lahko npr. sestavimo celotno opno. Tako sta na sl. 3 na ovitku narisani obe zrcalni polovici »trapeza«, pa tudi celotna sl. 2.

Iskreno se zahvaljujem za številne nasvete dr. E. Zakrajšku, ki me je tudi seznanil z opisano metodo.

Rajko Krivec

LITERATURA

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York 1972) 3.9.7.
- [2] I. Kuščer, *Matematična fizika I*, skripta (Univerza v Ljubljani 1972).
- [3] Obzornik mat. fiz. 26 (1979) 122.

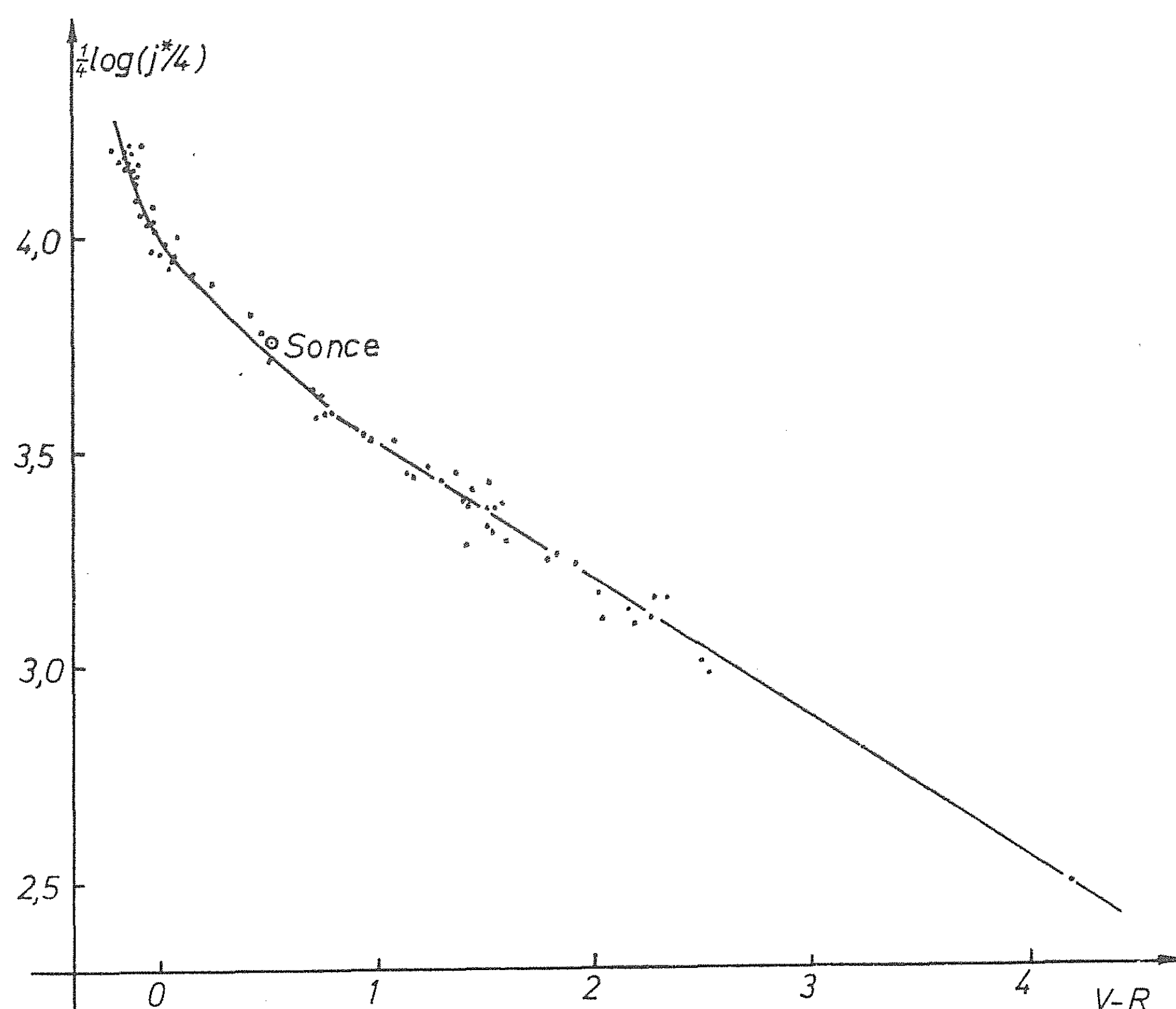
NOV NAČIN ZA DOLOČANJE ZORNIH KOTOV ZVEZD

V zadnjem četrtnem stoletju so na različne načine in z različnimi napravami merili zorne kote zvezd [1]. Pri tem gre za merjenje zelo majhnih kotov okoli stotinke kotne sekunde in manj. Do danes so izmerili zorni kot okoli sto zvezd.

Naj bo zvezda kroglja z radijem $\frac{1}{2}D$ v razdalji r in naj bo j^* gostota izsevanega svetlobnega toka, j pa gostota sprejetega svetlobnega toka na Zemlji. Velja $j = j^* (\frac{1}{2}\alpha)^2$, če je $\alpha = D/r$ zorni kot zvezde. Za Sonce je $j = j_0 = 10^5 \text{ lm/m}^2$. S filtrom, ki prepušča svetlobo med okoli 500 nm in 600 nm, izmerimo vizualni sij (magnitudo) zvezde V . V delu spektra z maksimumom okoli 700 nm pa izmerimo rdeči sij (magnitudo) zvezde R .

Naj ima zvezda vizualni sij V , Sonce pa $V_0 = -26,80$. Iz enačbe

$$j/j_0 = j^* (\frac{1}{2}\alpha)^2/j_0 = 10^{-0,4(V-V_0)} \quad (1)$$



Sl. 1. Izmerjena odvisnost $\frac{1}{4} \log (\frac{1}{4} j^*)$ od barvnega indeksa $V-R$ za zvezde, ki so jim določili zorni kot pri Luninem zakritju [2]

* Po kratkem računu dobimo $\frac{1}{4} \log (\frac{1}{4} j^*) = 4,23 - 0,1 V - 0,5 \log \alpha''$, če je α'' dan v tisočinkah kotne sekunde.

sledi*, da je j^* odvisen od V in α . Če poznamo j^* in V , lahko iz (1) izračunamo α .

Pred kratkim [2] so ugotovili zanimivo odvisnost j^* od barvnega indeksa $V-R$, kakor imenujemo razliko med izmerjenima sijema V in R (sl. 1). Vse kaže, da utegne ta odvisnost veljati splošno.

Zorni kot določijo po novem tako, da za izmerjeni barvni indeks $V-R$ izbrane zvezde s krivuljo (sl. 1) ugotovijo ustrezni j^* in nato iz (1) izračunajo α . Način je zanesljiv, kolikor so ga preverili s podatki za vse zvezde, ki so jim kako drugače izmerili zorni kot, na primer pri Luninem zakritju [1]. Potrebna pa bodo še nadaljnja preverjanja.

Za zgled izračunajmo zorni kot zvezde Beta Andromede. Zanja je $V = 2,04$ in $V-R = 1,24$. S sl. 1 razberemo $\frac{1}{4} \cdot \log(\frac{1}{4} j^*) = 3,45$ in iz enačbe (1) sledi $\alpha'' = 0,014''$. S 15-metrskim zvezdnim interferometrom na Mt. Wilsonu so že pred pol stoletja za Beta Andromede namerili $0,018''$ [3].

Marijan Prosén

LITERATURA

[1] M. Prosén, *Nove meritve zvezdnih premerov*, Obzornik mat. fiz. **15** (1968) 163; *Merjenje zornih kotov zvezd pri Luninem zakritju*, ibid. **25** (1978) 102.

[2] D. S. Evans in drugi, *Measuring Diameters of Stars*, Sky and Telescope **58** (1979) 130.

[3] M. Prosén, *Ob stoletnici zamisli o interferometričnem merjenju zvezdnih premerov*, Obzornik mat. fiz. **15** (1968) 125.

POTRDILI MOŽEN OBSTOJ NEVIDNIH SPREMLJEVALK BARNARDOVE ZVEZDE

Barnardova zvezda ima od vseh znanih zvezd največje lastno gibanje ($10''/\text{leto}$). Od nas je oddaljena 6 svetlobnih let in s prostim očesom ni vidna (sij $\sim 9^m$). Je rdeča pritlikavka. Njena masa je okoli 0,1 mase Sonca, oddani svetlobni tok pa nekaj tisočink sončnega. Zaradi velikega lastnega gibanja to zvezdo od odkritja (1916) na veliko raziskujejo.

Da okoli Barnardove zvezde najbrž kroži en ali več temnih, planetom podobnih teles, je znano že dalj časa [1]. To potrjujejo tudi zadnja opazovanja s 60-centimetrskim sproulskim refraktorjem v ZDA [2]. V letih 1958—78 so več kot 750 noči slikali to zvezdo. Analizo več tisoč fotografij so obdelali elektronski računalniki. Spet so našli značilne periodične motnje v lastnem gibanju zvezde. Iz njih je mogoče sklepati, da okoli Barnardove zvezde krožita dva planeta po skoraj koplanarnih krožnicah v ravnini, ki je zelo naklonjena proti ravnini ekliptike. Krožita v povprečni razdalji 2,7 oziroma 3,8 astronomske enote od zvezde. Njun obhodni čas je malo manj od 12 let oziroma malo več od 20 let, njuna masa pa 0,8 oziroma 0,4 mase Jupitra. Ocenjujejo, da je temperatura površja planetov okoli 500 K, njun sij pa blizu 30^m . Planeta sta tako šibka, da ju z naljnogledi ne bi bilo mogoče zaslediti niti tedaj, ko opazovanja ne bi motila svetloba zvezde. S fotografijo oziroma fotometrijo je namreč danes mogoče izmeriti sij nebesnih teles do 24^m .

Marijan Prosén

LITERATURA

[1] M. Prosén, *Zvezde s temnimi spremljevalkami*. Obz. mat. fiz. **18**, (1971) 20; F. Avsec—M. Prosén, *Astronomija*, Ljubljana, DZS 1971, 165.

[2] Sky and Telescope, **57** (1979) No 3.

TRIDESETLETNICA ZVEZE DRUŠTEV MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV JUGOSLAVIJE

26. decembra 1979 je bila v Novem Sadu s svečano akademijo, katere pokrovitelj je bil Zvezni izvršni svet, obeležena tridesetletnica Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije. Ob tej priložnosti je dobila Zveza visoko odlikovanje, s katerim jo je odlikoval predsednik republike Josip Broz Tito.

Akademijo je začel predsednik Zveze dr. Dragiša Ivanović. Za njim so govorili zastopniki pokrajinskih forumov in zastopnik zveznega izvršnega sveta.

O zvezi društev in njenem delovanju v preteklih tridesetih letih je govoril profesor Živojin Čulum, predsednik DMFA SAP Vojvodine.

Izvršni svet zveze je izrekel priznanja članom, ki so veliko delovali v Zvezi ali posameznih društvih. Iz Slovenije so priznanja prejeli: Fran Dominko, Jožica Dolensek, Ludvik Gabrovšek, Franc Galič, Marjan Hribar, Bogomila Kolenko, Martina Koman, France Križanič, Janez Markelj, Anton Moljk, France Plevnik, Milica Potisek, Jože Povšič, Niko Prijatelj, Janez Strnad, Gabriel Tomšič, Alojzij Vadnal, Marjan Vagaja in Ivan Vidav.

Posebno priznanje je prejelo tudi mesto Bled, kjer je pred tridesetimi leti bila Zveza ustanovljena, in Republiški komite za vzgojo in izobraževanje, ki je zlasti v začetkih delovanja močno podpiral republiška društva in s tem omogočil tudi delovanje Zveze.

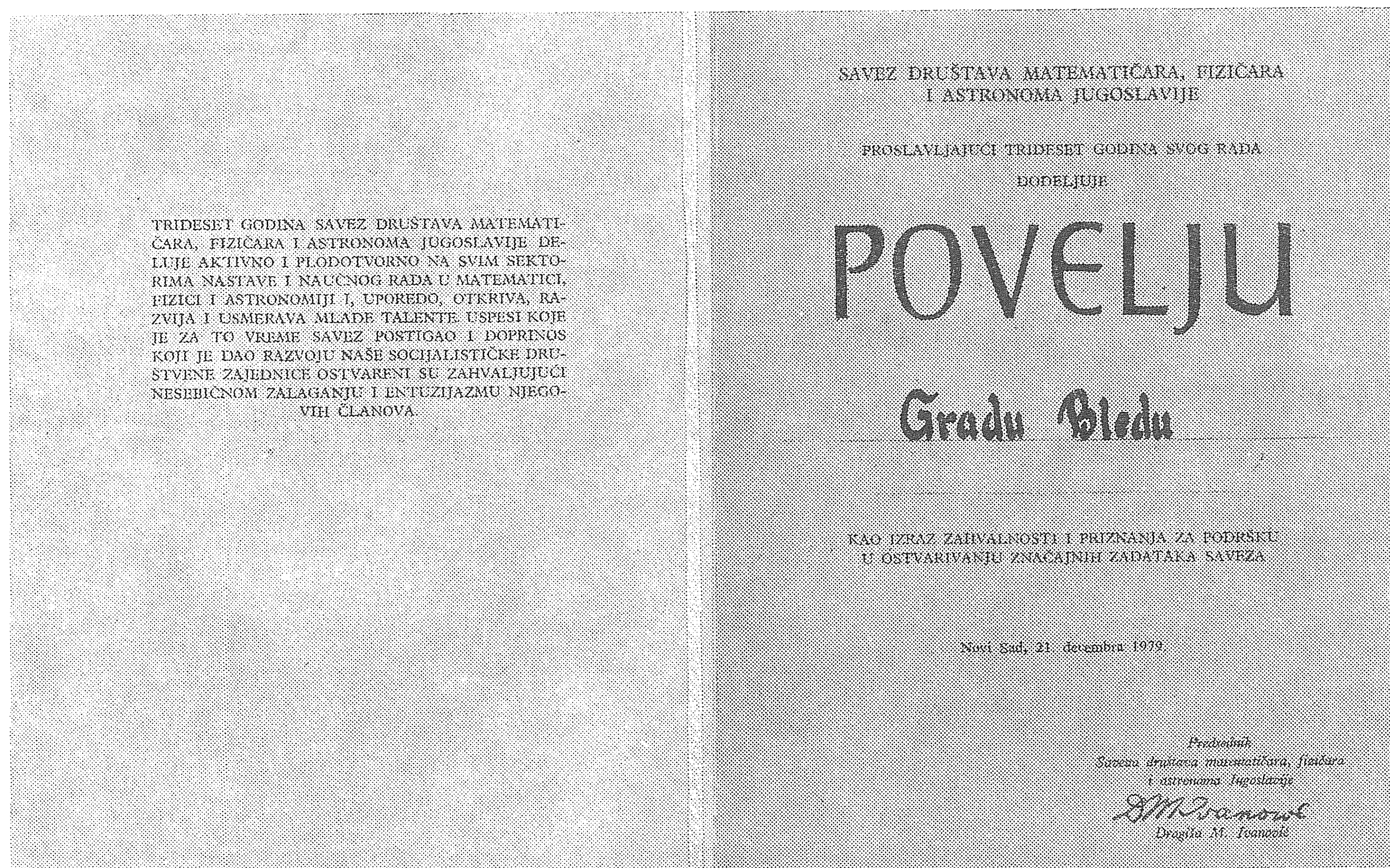
Predsedniku republike Josipu Brozu Titu je bila podeljena svečana listina za njegovo vsestransko tovariško vzpodbujanje in pomoč. Ob tej priložnosti je Društvo za uporabo sončne energije AP Vojvodine sporočilo, da mu podarja dva sončna kolektorja za ogrevanje vode.

V drugem delu akademije je bil izveden umetniški program, v katerem je bilo zlasti zanimivo branje odlomkov iz del naših starejših slavnih matematikov, fizikov in astronomov in iz njihovih življenjepisov. Med njimi so bili Getaldić, Bošković, Varićak, Plemelj, Tesla, Pupin, Petrović in Milanković. S pevskimi točkami je sodeloval zbor glasbene mladine iz Novega Sada.

Po programu je član izvršnega sveta skupščine SAP Vojvodine in sekretar za vzgojo, znanost in kulturo prof. dr. Milenko Nikolić priredil kosilo za goste in udeležence proslave.

Članom DMFA SRS so bila priznanja izročena 25. januarja 1980 na začetku 8. seminarja iz matematike.

Dušan Modić



LETOVANJE V PLEMLJEVEM DOMU NA BLEDU

Vabimo člane društva, da del svojega letnega dopusta preživijo v Plemljevem domu na Bledu, Prešernova 39, kjer je na razpolago več sob z dvema ali tremi posteljami (če je potrebno — tudi s pomožnim ležiščem). V nadstropju je tudi kuhinja z vso potrebno opremo za kuhanje. Gostje jo uporabljajo po medsebojnem dogovoru. Nočnina za eno ležišče (brez posteljnega perila) je 50 din, za pomožno 30 din. Otroci do 10 let starosti se ne štejejo. Gostje se morajo po prihodu na Bled prijaviti tudi pri Turističnem društvu na Bledu, da plačajo turistično takso.

Iz tehničnih razlogov je letovanje od 11. julija do 30. avgusta organizirano v izmenah, ki začenjajo (prva) v petek, 11. 7., (10 dni), druga v ponedeljek, 21. 7., (11 dni), v petek 1. 8., (10 dni), v ponedeljek 11. 8., (9 dni), zadnja v sredo 20. 8., (10 dni), zaključi se v soboto 30. 8.

Prihod v dom je po 15. uri, odhod dopoldne do 9. ure.

Gostje pospravljajo sami, ob menjavi je organizirano temeljitejšo čiščenje.

PRIJAVITE SE Z DOPISNICO do 25. junija 1979 na naslov: Dušan Modic, 61104 Ljubljana, p. p. 20, Šaranovičeva 5.

Navedite rok, v katerem želite letovati, število nočitev, število oseb (starih nad 10 let in posebej pod 10 let zaradi dodelitve primerne prostora) oz. število potrebnih ležišč. Vsak prijaviteljenec bo do 30. junija obveščen o sprejemu in dodeljenem prostoru. Obvestilu bo priložena položnica, s katero je treba nakazati celotno nočnino na naslov: DMFA SRS, Ljubljana, ž. r. št. 50101-678-47233. S potrdilom o plačani nočnini bo vsak gost dobil pri vratarju hiše za fiziko v Ljubljani, Jadranska 19, ključ od vežnih vrat in stopnišča. Ključe je treba vrniti v Ljubljani; tam se tudi prijavijo morebitne pomanjkljivosti in napake, če niso mogle biti odpravljene že na Bledu. Prijave bodo upoštevane po vrstnem redu.

Do letovanja ima pravico vsak član društva MFA SRS.

Dušan Modic

OBVESTILO

Po pravilih o podeljevanju priznanja učiteljem matematike, fizike in astronomije za delo z mladimi (Obzornik mat. fiz. 21 (1974) št. 5) vabimo podružnice Društva matematikov, fizikov in astronomov SRS in aktivne matematikov in fizikov na šolah, da do 1. oktobra 1980 predlagajo kandidate za priznanje za delo z mladimi.

Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov DMFA SRS, Komisija za pedagoško dejavnost 61001 Ljubljana, Jadranska 19, poštni predal 227.

Martina Koman

GOZDNO GOSPODARSTVO NOVO MESTO

NEGUJE, UREJA IN IZKORIŠČA

GOZDOVE NA DOLENJSKEM OBMOČJU



**GOZDNO GOSPODARSTVO
NOVO MESTO**

n. sub. o.
68000 Novo mesto
Gubčeva 15
Telefon: h. c. 068 21-065
Žiro račun: 52100-601-10152

NOVE KNJIGE

Arno Böhm, Quantum Mechanics, Zbirka Texts and Monographs, Springer, New York 1979, XVIII + 522 strani, cena 58 DM.

V zadnjem času je izšlo veliko učbenikov kvantne mehanike, ki se med seboj bolj ali manj razlikujejo po zasnovi, zahtevnosti in obsegu. Böhmova knjiga se po dovolj lastnostih loči od standardnih učbenikov. V njej ni nekaterih odstavkov, ki so postali nepotrebni ali pa jih obdelajo na prvi stopnji. Knjiga je nastajala kot učbenik — z velikimi opustitvami za dodiplomski študij, z majhnimi za podiplomski študij — a je pravzaprav monografija.

Prave odlike knjige bi pokazal podroben pregled, a se mu moramo na tem mestu odpovedati. Nekaj pove o njih tudi seznam poglavij: matematične osnove, osnove kvantne mehanike — harmonični oscilator, energijski spektri nekaterih molekul, polni sistemi komutirajočih observabel, seštevanje vrtilnih količin — Wigner-Eckartov izrek, vodikov atom — kvantnomehanski Keplerjev problem, alkalijski atomi in Schrödingerjeva enačba za enoelektronske atome, teorija motenj, elektronski spin, nerazločljivi delci, sistem z dvema elektronoma — helijev atom, časovni razvoj, sprememba stanja po dinamičnem zakonu in pri merjenju — Stern-Gerlachov poskus, prehodi v kvantnomehanskih sistemih — presek, formalna teorija sipanja in druga teoretična razglabljanja, prožno in neprožno sipanje za krogelno simetrične interakcije, proste in natančne radialne valovne funkcije, resonančni pojavi, časovni obrat, resonance v sistemu z več kanali in razpad neobstojnega fizikalnega sistema.

Avtor posveča matematični strani veliko skrb, a ne terja posebnega matematičnega znanja. Količine, pojme in matematične izreke čimprej uporabi in jih tako približa bralcu. Njegova obljuba, da je sicer v knjigi obdelana stara kvantna mehanika na nov način, ni pretirana, čeprav je seveda v njej precej tradicionalnega.

V naših razmerah je knjiga za dodiplomski študij najbrž prezahtevna. Njeni deli pa utegnejo priti prav na podiplomskem študiju. Tisti, ki se posebej zanimajo za kvantno mehaniko in njene osnove, pa bodo v knjigi našli nove vzpodbude, četudi kvantno mehaniko že znajo.

Janez Strnad

Michael Drieschner, Voraussage — Wahrscheinlichkeit — Objekt, Lecture Notes in Physics — 99, Springer, Berlin 1979, XII + 308 strani, cena 32 DM ali 17,60 \$.

Driescherjeva knjiga Napoved — verjetnost — objekt ima podnaslov O pojmovnih osnovah kvantne mehanike in se loteva problemov v zvezi z interpretacijo kvantne mehanike. Čeprav se je kvantna mehanika popolnoma uveljavila kot osnovna fizikalna teorija, obstajajo različna mnenja o tem, kako naj jo razumemo. To vprašanje je pomembno zato, ker je nanj navezано drugo: se lahko zadovoljimo s kvantno mehaniko ali je treba iskati novo teorijo.

Knjiga hodi po fizikalni strani po Neumannovi poti, kot jo je nadaljevala ženevska šola z J. M. Jauchom. Po filozofski strani pa se naslanja na avtorjevega učitelja C. F. von Weizsäckerja, ki je izhajal iz kopenhške šole. Razdeljena je na naslednja poglavja: logika in naravoslovje, enotnost fizike, napovedi, verjetnost, objekt, kvantnomehanska aksiomatika, interpretacija kvantne mehanike, praobjekt in prostor, redukcionizem. Sledi razmeroma zajetna vrsta dopolnil k posameznim poglavjem.

Knjige, kakršna je pričujoča, nasploh za fizika niso nezanimive, ker lahko prispevajo k razjasnitvi osnov in k globljemu razumevanju matematičnega formalizma. Vendar pa je treba priznati, da so bolj ali manj odmaknjene od osrednjih tokov v fiziki in jim povprečni fizik težko sledi. Za Drieschnerjevo knjigo je najbrž uporaben tisti »bolj«, v mejnem območju med fiziko in filozofijo je premaknjena k slednji. Njen znatni del je posvečen praobjektom ali urom. Vpeljal jih je Weizsäcker, ki že nekaj časa ne predava več fizike, ampak filozofijo. Njegova

zamisel je, da je svet sestavljen iz urov, vsak ur pa ima le dvorazsežen prostor stanj. O smislu domnev take vrste so mnenja močno deljena. Ko bralec prebere, da naj bi imel vsak delec 10^{40} urov, tako da bi bilo v celoti v vesolju pri 10^{80} delcih 10^{120} urov, se vpraša, kje je tu še kaj fizike.

Knjiga bo zanimiva le za fizike, ki se posebej ukvarjajo z interpretacijskimi problemi kvantne mehanike ali so bolj filozofsko usmerjeni.

Janez Strnad

Feynman Path Integrals, Proceedings of the International Colloquium Held in Marseille, May 1968, Edited by S. Albeverio, Ph. Combe, R. Hedh-Krohn, G. Rideau, M. Sirugue-Collin, M. Sirugue and R. Stora, Lecture Notes in Physics — 106, Springer, Berlin 1979, XII + 452 strani, cena 42,50 DM.

Znano je, da je mogoče enačbo gibanja za delec v Newtonovi mehaniki nadomestiti z variacijskim principom, ki zahteva najmanjšo akcijo $S = \int L dt$, če je $L(x, \dot{x}, t)$ Lagrangeva funkcija, to je razlika kinetične in potencialne energije. R. P. Feynman je kot podiplomski študent leta 1942 iskal pot, kako bi enačbo gibanja v kvantni mehaniki izpeljal na podoben način. To mu je uspelo, ko je izrazil amplitudo za prehod delca iz prve točke v drugo kot večkratni integral z akcijo v fazi $e^{2\pi i S/\hbar}$ po vseh mogočih tirih med tema točkama (integral je treba še primerno normirati in poiskati mejno vrednost). Iz reprezentacije amplitude kot integrala v prostoru tirov se je pozneje razvila slika nerelativistične kvantne mehanike, ki je enakovredna Schrödingerjevi ali Heisenbergovi. Integrali na prostorih funkcij, ki pri tem nastopajo, so odprli tudi nove matematične probleme. V nasprotju s podobnimi integrali na prostoru zveznih funkcij, ki jih je uporabil Wiener pri obravnavanju Brownovega gibanja, vsebujejo Feynmanovi integrali namreč kompleksno formalno gostoto, za katero ni mogoče definirati mere.

O tem, kako se je uporaba Feynmanovih integralov na različnih območjih razrasla, priča poročilo s sestanka v Marseillu, ki se ga je udeležilo več kot osemdeset fizikov in matematikov. Predavanja, ki so jih imeli povabljeni predavatelji, so razvrščena v sedem skupin. Prva zajema tri predavanja o različnih matematičnih definicijah komutativnih Feynmanovih integralov v nerelativistični kvantni mehaniki in teoriji skalarnega polja. Dve predavanji v drugi skupini obravnavata nekomutativne Feynmanove integrale, ki nastopijo pri opisu delca s spinom $1/2$. Šest predavanj iz tretje skupine je posvečenih zvezi med integrali iz teorije stohastičnih procesov in Feynmanovimi integrali in povezavi med mehaniko stohastičnih procesov in kvantno mehaniko. Tri predavanja iz četrte skupine zajemajo geometrijske vidike Feynmanovih integralov, njihovo povezavo z oscilatornimi integrali ter načenjajo vprašanje kvantizacije. Tri predavanja iz pete skupine se ukvarjajo s kvantizacijo na območjih, na katerih odpovedo običajni postopki, v splošni teoriji relativnosti in za Lagrangeve funkcije, ki vsebujejo hitrost v višji potenci kot kvadratu. Šesta in sedma skupina — v vsaki so po tri predavanja — se opirata na spoznanje, da vsebujejo Feynmanovi integrali kot mejni primer Newtonovo dinamiko. Prva od njiju zadeva gradientna polja s klasične in kvantne strani, druga pa asimptotične vrste pri formalnem razvoju Feynmanovih integralov okoli klasičnih rešitev. Sledi še devet krajših poročil, ki so jih imeli udeleženci sestanka.

Knjiga bo za specialiste, ki se ukvarjajo s Feynmanovimi integrali, dobrodošel priročnik in prava zakladnica novih zamisli.

Janez Strnad

Philippe A. Martin, Modèles en Mécanique Statistique des Processus Irreversibles, Lecture Notes in Physics 103, Springer-Verlag, Berlin 1979.

Neravnovesna statistična mehanika je v zadnjih letih doživela hiter razvoj, sicer ne toliko kot splošna teorija, pač pa predvsem pri obravnavanju posameznih modelov. V tej knjigi, ki je namenjena tistim, ki stopajo na področje ireverzibilne statistične mehanike, so zbrani trije značilni fizikalni modeli. Vse tri odlikuje možnost razmeroma preprostega eksaktnega pristopa. Z modernejšimi matematičnimi metodami je vzpostavljena zveza med mikroskopsko dinamiko in že dolgo

poznanimi fenomenološkimi enačbami za opis ireverzibilnih pojavov. V prvem poglavju avtor z metodo Greenovih funkcij obravnava klasični Lorentzov plin. V limitnem primeru izpelje Boltzmanovo enačbo. Drugi del knjige je posvečen osnovnim kinetičnim (master) enačbam; z njimi avtor opiše dinamiko spinskih in BCS sistemov, posebej tudi v okolici kritične točke. Za tretji neravnovesni primer je avtor izbral laser. Neravnovesno dinamiko opiše z gibalnimi enačbami Langevinove vrste in to ločeno za model z izgubami in brez.

Slobodan Žumer

A. Martin-Löf, Statistical Mechanics and Foundations of Thermodynamics, Lecture Notes in Physics 101, Springer-Verlag, Berlin 1979.

Večina učbenikov, ki obravnavajo ravnovesno statistično mehaniko, ne posveča veliko pozornosti matematični rigoroznosti izpeljav. Pričujoča knjiga naj bi zapolnila ravno te vrzeli. Žal se zaradi zapletenosti matematične obdelave fizikalne ideje nemalokrat izgubijo. Prvo poglavje je posvečeno statističnemu opisu klasičnih sistemov, nakar je na preprostem Ehrenfestovem modelu prikazana povezava med mikro in makro dinamiko ter pojav ireverzibilnosti. V drugem poglavju se avtor ukvarja z ravnovesnimi verjetnostmi porazdelitvami. Za idealni plin v okviru termodinamične limite izpelje kanonično in velekanonično porazdelitev iz mikrokanonične porazdelitve. Zadnje poglavje pa je posvečeno osnovam ravnovesne termodinamike. Lastnosti entropije, ki so podrobneje obdelane za omenjene porazdelitve, so uporabljene za izhodišče pri izpeljavi zakonov termodinamike.

Slobodan Žumer

Vladimir Devidé, Matematika kroz kulture i epohe. Školska knjiga, Zagreb 1979, 177 str. Cena 400.— din.

Avtor takoj na začetku pribije: to je knjiga o matematiki — za nematematike. Nobenega dvoma ne more biti, da je pisanje take knjige vse prej kot lahek posel. Človek je namreč ves čas izpostavljen dvema nevarnostma. Ali je mož beseda in se res dosledno omeji le na nadroben prikaz matematične »abecede« in s tem kaj brž izzove bravčevo dolgočasje; ali pa iz strahu pred tem nezaželenim učinkom prelomi besedo in se spusti v opisovanje lepih, toda zapletenih matematičnih »zgodb« ter s tem seveda tvega, da se bravec preutruji in zato še pred koncem odloži knjigo. No, treba je povedati, da se je avtor obeh teh nevarnosti mojstrsko izognil.

Seveda govori knjiga predvsem o številih in podobah, teh temeljnih gradnikih matematike. Vendar je to storjeno na tako pretanjen način, da bravec za to »abecedo« zlahka zasluti zanimive »zgodbe«, ki utegnejo biti z njo napisane, pa tudi brez težav dojame smisel tistih, ki jih avtor eksplicitno omenja. Mimo tega je treba še posebej poudariti, da je ta pripoved o matematiki trdno postavljena v živopisen okvir različnih razdobij in kultur, ki zaznamujejo človekovo bivanje na zemlji. To odločno vključevanje matematike v kulturno zgodovino človeštva je logični nasledek simpatične avtorjeve teze, da matematika pač ni delo bogov ampak človeka in da zato tudi ni grozljivo popolna, marveč lepa in nikoli do kraja dopolnjena.

Smisel in skorajda nepogrešljiv del te očarljive knjige, ki sodi po opremi vsekakor v bibliofilsko zvrst, pa so tudi čudovite barvne reprodukcije figur, ki jih je ustvarila bodisi narava ali človeška fantazija in ki posredno pričajo o resničnem izvoru matematičnih podob.

Knjiga ima naslednja poglavja: Uvod — Na začetku je bilo število — Imena in znaki za števila — Številski sestavi — Začetki računanja — Matematika Mezopotamije — Matematika starega Egipta — Matematika starodavne Kitajske — Staroindijska matematika — Starogrška matematika — Arabski prispevek k matematiki — Matematika srednjeveške Evrope — Matematika novega veka — Matematika našega stoletja — Matematika danes in jutri — Kaj je matematika?

Niko Prijatelj

REVIJE V MATEMATIČNI KNJIŽNICI

Kmalu po združitvi fondov obeh matematičnih knjižnic (naravoslovne fakultete in inštituta za uporabno matematiko univerze v Ljubljani) smo objavili v Obzorniku za matematiko in fiziko, **12** (1965) na tretjih straneh ovitka 1., 2. in 3. številke seznam vseh revij (75), ki jih je matematična knjižnica takrat redno prejemale. Kasneje smo objavili dopolnilni seznam, (Obzornik mat. fiz., **17** (1970), str. 191—192) še 58 novih naslovov. Tudi v naslednjih letih se je vsako leto večalo število revij. V lanskem koledarskem letu smo morali zaradi pomanjkanja finančnih sredstev odpovedati petdeset revij, kljub temu pa lahko danes objavimo še 185 novih naslovov. Večino od teh (98) smo pričeli prejemati v zameno za Obzornik za matematiko in fiziko (93) in 5 za Presek. Petinsedemdeset smo jih naročili pri Državni založbi Slovenije oz. Cankarjevi založbi, dvanajst pa jih prejemamo v dar ali v izposajo za nedoločen čas.

Ciril Velkovrh

Na koncu naslova vsake revije je naveden simbol, ki pove način dobave revije (zamenja za: O — OMF, P — Presek; naročilo pri: D — DZS, C — CZ; G — gratis in S — izposojena za nedoločen čas pri SAZU).

- | | | | |
|--|---|---|---|
| 1. ABH.MATH.SEM.UNIV.
HAMBURG — HAMBURG | D | 21. APPL.ANAL. — NEW YORK | D |
| 2. ACTA ARITH. — WARSZAWA | O | 22. APPL.MATH.COMPUT. —
NEW YORK | D |
| 3. ACTA F.R.N.UNIV.COMEN. /
MATH. — BRATISLAVA | O | 23. ARCH.MATH. — BRNO | O |
| 4. ACTA MATH.ACAD.SCI.
HUNGAR. — BUDAPEST | S | 24. ARCH.MATH.LOGIK —
STUTTGART | D |
| 5. ACTA MATH.SINICA —
PEKING | O | 25. ARHIMEDES — BEOGRAD | P |
| 6. ACTA SCI.MATH. — SZEGED | C | 26. ARITH.TEACHER —
WASHINGTON | D |
| 7. ACTA UNIV.CAROLINAE /
MATH. PHYS. — PRAHA | O | 27. ARK.MAT. — STOCKHOLM | O |
| 8. ALGEBRA LOGIKA —
NOVOSIBIRSK | O | 28. BERICHTE G.M.D. — BONN | O |
| 9. ALGEBRA UNIVERSALIS —
BASEL | D | 29. BOL.ACAD.CIEN.FIS.MAT.
NATUR. — CARACAS | O |
| 10. ALPHA — BERLIN | D | 30. BOL.SOC.MAT.MEXICANA
— MEXICO | O |
| 11. AN. STI.UNIV.AL.J.CUZA IASI /
MAT. — IASI | O | 31. BONN.MATH.SCHR. — BONN | O |
| 12. AN.UNIV.BUCARESTI / MAT.
— BUCAREST | O | 32. BULL.ACAD.POL.SCI. / MATH.
ASTR.PHYS. — VARSOVIE | O |
| 13. AN.UNIV.TIMISOARA / MAT.
— TIMISOARA | O | 33. BULL.AUSTRAL.MATH.SOC.
— ST.LUCIA | C |
| 14. ANAL.MATH. — BUDAPEST | C | 34. BULL.DISASTER PREVENT.
RES.INST. — KYOTA | O |
| 15. ANN.ACAD.SCI.FENN. / MATH.
— HELSINKI | O | 35. BULL.FUKUOKA UNIV.EDUC. /
NATUR.SCI. — FUKUOKA | O |
| 16. ANN.ACAD.SCI.FENN. / MATH.
DISSERTATIONES —
HELSINKI | O | 36. BULL.INST.MATH.ACAD.
SINICA — TAIPEI | O |
| 17. ANN.DISCRETE MATH. —
AMSTERDAM | D | 37. BULL.LONDON MATH.SOC. —
LONDON | D |
| 18. ANN.MATH.LOGIC —
AMSTERDAM | D | 38. BULL.SCI. / NATUR.TECH.MED.
— ZAGREB | O |
| 19. ANN.PROBABILITY —
SAN FRANCISCO | D | 39. BULL.SCI.MATH. — PARIS | D |
| 20. ANN.STATISTICS —
SAN FRANCISCO | D | 40. BULL.SOC.MATH.FRANCE —
PARIS | O |
| | | 41. BULL.SOC.SCI.LETTRES LODZ
— LODZ | O |
| | | 42. CANAD.MATH.BULL. —
MONTREAL | D |

43. CERCET.OPERAT.STATISTICA — TIMISOARA	O	77. INTERNAT.MATH.NACH. — WIEN	O
44. COLLOQ.MATH. — WARSZAWA	O	78. ISRAEL J.MATH. — JERUSALEM	D
45. COMMENT.MATH.UNIV. CAROLINAE — PRAHA	O	79. ITOGI NAUKI TEHN. / ALGEBRA TOPOLOGIJA GEOM. — MOSKVA	D
46. COMPOSITIO MATH. — GRONINGEN	D	80. ITOGI NAUKI TEHN. / MAT.ANALIZ — MOSKVA	D
47. COMPT.RENDUS MATH.REP. — KINGSTON	D	81. ITOGI NAUKI TEHN. / PROBL.GEOM. — MOSKVA	D
48. COMPUT.ABSTR. — JERSEY	D	82. ITOGI NAUKI TEHN. / SOVREM.PROBL.MAT. — MOSKVA	D
49. COMPUT.MATH.APPL. — NEW YORK	D	83. ITOGI NAUKI TEHN. / TEOR. VEROJATNOSTI... — MOSKVA	D
50. CURRENT MATH.PUBL. — PROVIDENCE	D	84. IZV.A.N.MOLDAV.SSR / FIZ.TEH.MAT. — KIŠINEV	D
51. CZECHOSLOVAK MATH.J. — PRAHA	D	85. IZV.A.N.TADŽIN.SSR / MAT. GEOLOG.HIM — DUŠANBE	S
52. DIFFERENCIAL'NYE URAVNENIJA — MINSK	O	86. IZV.A.N.TADŽIN.SSR / FIZ.MAT. GEOLOG.HIM. — DUŠANBE	S
53. DISCRETE MATH. — AMSTERDAM	D	87. IZV.VYŠŠ.UČEB.ZAV. / MATH. — KAZAN	D
54. DISSERTATIONES MATH. — WARSZAWA	D	88. J.ANALYSE MATH. — JERUSALEM	D
55. DIVISION NUM.ANAL.COMP. SCI. — TEDDINGTON	G	89. J.CHINESE INST.ENGRS. — TAIPEI	O
56. DOKL.A.N.ARMJAN.SSR — EREVAN	S	90. J.CHINESE STATISTICAL ASSOC. / B — TAIPEI	O
57. DOKL.A.N.BSSR — MINSK	O	91. J.COMBINATORIAL THEORY / A — NEW YORK	D
58. DOKL.BOLG.A.N. — SOFIJA	O	92. J.COMBINATORIAL THEORY / B — NEW YORK	D
59. ECONOM.COMP.ECONOM. CYBERNET.STUD.RES. — BUCAREST	O	93. J.DIFFERENTIAL GEOM. — BETLEHEM	D
60. ENSEIGNEMENT MATH. — PARIS	D	94. J.ENGRG.MATH. — GRONINGEN	O
61. FAKTOGRAF. INFOR.KARTAH / MATH. — MOSKVA	D	95. J.FRANKLIN INST. — PHYLADELPHIA	O
62. GENERAL TOPOLOGY APPL. — AMSTERDAM	D	96. J.GEOMETRY — BASEL	D
63. GLASNIK MAT. — ZAGREB	O	97. J.GRAPH THEORY — NEW YORK	D
64. GODIŠEN ZBOR.ELEK. MAŠIN.FAK. — SKOPJE	O	98. J.NUMBER THEORY — NEW YORK	D
65. GODIŠEN ZBOR.MAT.FAK. — SKOPJE	O	99. J.OPER. THEORY — BUCAREST	D
66. GODIŠNIK VIŠŠ.UČEBNI ZAVED. / PRILOŽNA MAT. — SOFIJA	O	100. J.PURE APPL.ALGEBRA — AMSTERDAM	D
67. HIROSHIMA MATH.J. — HIROSHIMA	O	101. J.RECREATIONAL MATH. — NEW YORK	D
68. HISTORICA MATH. — TORONTO	D	102. J.UNDERGRADUATE MATH. — GREENSBORO	D
69. HOUSTON J.MATH. — HOUSTON	D	103. KIBERNETIKA VYČISL.TEHN. — KIEV	D
70. I.B.M.J.RES.DEVELOP. — NEW YORK	G	104. KVANT — MOSKVA	P
71. INDEX MATH.PAPERS — PROVIDENCE	D	105. KYBERNETIKA — PRAHA	S
72. INDIANA UNIV.MATH.J. — BLOOMINGTON	D	106. LATVIJ.MAT.EŽEG. — RIGA	D
73. INFORMATICA — LJUBLJANA	O	107. LINEAR MULTILIN.ALGEBRA — NEW YORK	D
74. INTEGRAL EQUAT.OPERATOR THEORY — BASEL	D	108. LUCRARILE SEM. GEOM. TOPOLOGIE — TIMISOARA	O
75. INTERNAT.J.MATH.EDUC.SCI. TECH. — LONDON	D	109. MAT.BILTEN — SKOPJE	O
76. INTERNAT.J.MATH.MATH.SCI. — GREENVILLE	D	110. MAT.FIZ.LIST UČ. SRED.ŠKOLA ZAGREB	O
		111. MAT.FYZ.ŠKOLE — OLOMUC	O

112. MAT.LIST. UČ.OS.ŠKOLE — BEOGRAD	P	153. REV.ROUMANE MATH.PURES APPL. — BUCAREST	O
113. MAT.VESNIK — BEOGRAD	O	154. REV.UN.MAT.ARGENTINA — — BUENOS AIRES	O
114. MAT.ZABAVNIK — BEOGRAD	P	155. RICE UNIV.STUDIES — HOUSTON	S
115. MATEMATYKA — GDANSK	O	156. RIV.MAT.UNIV.PARMA — PARMA	O
116. MATH. BALKAN. — BEOGRAD	O	157. ROCKY MOUNTAIN J.MATH. — PROVO	D
117. MATH.CENTRUM / APPL.MATH. — AMSTERDAM	O	158. ROZHLEDY MAT.FIZ. — PRAHA	O
118. MATH.CENTRUM / COMP.SCI. — AMSTERDAM	O	159. SEM.ARGHIRIAD — TIMISOARA	O
119. MATH.CENTRUM / NUM.MATH. — AMSTERDAM	O	160. SEM.ECUATII FUNC. — TIMISOARA	O
120. MATH.CENTRUM / PURE MATH. — AMSTERDAM	O	161. SEM.TEOR.FUNC.MAT.APL. / METRICE PROBAB. — TIMISOARA	O
121. MATH.INTELLIGENCER — BERLIN	D	162. SEMIGROUP FORUM — NEW YORK	D
122. MATH.MAG. — MENASHA	O	163. SERDIKA — SOFIJA	O
123. MATH.PROC.CAMBRIDGE PHILOS.SOC. — LONDON	S	164. SIAM. J.MATH.ANAL. — PHILADELPHIA	D
124. MATH.REPORTS — GOFUKU	O	165. SOFTWARE — LONDON	D
125. MATH.SLOVACA — BRATISLAVA	O	166. STUDIA UNIV.BABES BOLYAI / MATH.MED. — CLUJ	O
126. MATH.STUDENT — RESTON	O	167. STUDII CERC.MAT. — BUCAREST	O
127. MATH.TEACHER — BROCKOT	D	168. TAMKANG J.MATH. — TAIPEI	O
128. MEM.AMER.MATH.SOC. — PROVIDENCE	D	169. TEOR.FUNK.FUNKC.ANAL.PRIL. — HAR'KOV	O
129. MEM.MAT.UNIV.FED. — RIO DE JANEIRO	O	170. TEOR.PRIM.MEH. — BEOGRAD	O
130. METODY DISKRET.ANAL. — NOVOSIBIRSK	O	171. THEOR.COMP.SCI. — AMSTERDAM	D
131. NAGOYA MATH.J. — NAGOYA	D	172. TOKYO J.MATH. — TOKYO	D
132. NONLINEAR ANAL. — LONDON	D	173. TRINITY COLL.DUBLIN / SCHOOL MATH. — DUBLIN	G
133. NOTICES AMER.MATH.SOC. PROVIDENCE	O	174. TRUDY MOSKOV.MAT.OBŠČ. — MOSKVA	D
134. NOTIZIARIO UN.MAT.ITALIANA — BOLOGNA	O	175. UČEN.ZAP.TARTU.GOS.UNIV. / MAT.MEH. — TARTU	O
135. NUMERUS — SKOPJE	P	176. UKRAIN.MAT.Ž. — KIEV	O
136. OSAKA J.MATH. — OSAKA	O	177. VESCI A.N.BSSR. / FIZ.MAT. — MINSK	O
137. PENTAGON — MOUNT PLEASANT	D	178. VESTNIK BELORUS.GOS.UNIV. / FIZ.MAT.TEH. — MINSK	O
138. PERIOD MAT. — ROMA	O	179. VESTNIK HAR'KOV.UNIV. / PRIKL.MATH.MEH. — HAR'KOV	O
139. PERIOD MATH.HUNGAR. — BUDAPEST	C	180. VESTNIK MOSKOV.UNIV. / VYČILS.MAT.KIBERNET. — MOSKVA	O
140. POKROKY MAT.FYZ.ASTR. — PRAHA	O	181. VYČISL.METODY PROGRAM. — MOSKVA	D
141. PREPRINT SER. — GOFUKU	O	182. ZAP.NAUČ.SEM.L.O.M.I. — LENINGRAD	D
142. PREPRINT SER.DEP.MATH. — LJUBLJANA	O	183. ZBORNIK RADOVA / MAT. — NOVI SAD	O
143. PRESEK — LJUBLJANA	G	184. ZBORNIK RADOVA / MAT.INST. BEOGRAD	O
144. PROC.FAC.SCI.TOKAI UNIV. — TOKYO	O	185. ZBORNIK TRUDOVI MAT.FAK. — SKOPJE	O
145. PROC.ROYAL IRISH ACAD. / MATH.PHYS. — DUBLIN	S		
146. PROTEUS — LJUBLJANA	O		
147. PUBL.ELEKTROTEHN.FAK. / MAT.FIZ. — BEOGRAD	O		
148. PUBL.INST.MATH. — BEOGRAD	O		
149. PUBL.MATH. — PARIS	D		
150. REPORT DEP.MATH. / A — HELSINKI	O		
151. RESULT.MATH. — BASEL	D		
152. REV.MAT.HISP.AMER. — MADRID	O		