R-1331 ODPISANO

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SR SLOVENIJE

YU ISSN 0473-7466

1983

Letnik 30

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. LJUBLJANA • LETNIK 30 • ŠT. 3 • STR. 65—96 • LETO 1983

LETNIK 30. — ŠTEVILKA 3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 1983

Uredniški odbor: France Avsec (gim. Kranj), Robert Blinc (FNT), Alojz Kodre (FNT), **Edvard Kramar — glavni urednik** (FNT), Peter Legiša (FNT), Jože Lep (VTŠ Maribor), Anton Moljk (FNT), Mitja Rosina (FNT), Tomaž Skulj (Iskra Ljubljana), **Janez Strnad — odgovorni urednik, urednik za fiziko** (FNT), **Anton Suhadolc — urednik za matematiko** (FNT), **Ciril Velkovrh — urednik** (FNT), Ivan Vidav (FNT). Jezikovni pregled Marija Janežič. Slike je narisal Miha Štalec.

Naročnina: za posameznike 350.— din (za člane društva je že vračunana članarina), za dijake in študente 175.— din, za ustanove in podjetja 600.— din, za tujino 20 $, posamezna številka 100.— din, dvojna številka 200.— din.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS — Podružnica Ljubljana — Obzornik za matematiko in fiziko, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, p. p. 6, tel. št. (061) 265-061/53, žiro račun 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki št. 50100-620-107-257300-5694/4.

Tisk: Tiskarna Ljudske pravice v Ljubljani, Kopitarjeva ul. 2. Naklada 1500 izvodov.

Izdajo revije sofinancirata Izobraževalna skupnost Slovenije in Raziskovalna skupnost Slovenije.

© 1983 DMFA SRS — 638
YU ISSN 0473—7466

Poštnina plačana na pošti 61102 Ljubljana

VSEBINA

Članki Str.
Spektrometrija (Franc Cvelbar) 65
Šibki bozon (Janez Strnad) 71
O bilinearnih in kvadratnih funkcionalih (Joso Vukman) 80
Obvestilo
Razpis priznanj (Martina Koman) 85
Šola
Misli ob Dieudonnejevem članku (Anton Suhadolc) 86
Šolski električni merilniki (Tomaž Skulj, Anton Štular) 88
Nove knjige
(Jernej Kozak, Andrej Kmet, Martin Čopič, Slobodan Žumer, Janez Rakovec, Zlatan Magajna, Anton Suhadolc, Gorazd Lešnjak) . . . . 87, 94, 95, 96, III
ISKRA za aktivnejši uk in pouk IV

CONTENTS

Articles Page
Spectrometry (Franc Cvelbar) 65
The intermediate vector boson (Janez Strnad) 71
On bilinear and quadratic functionals (Joso Vukman) 80
Home news 85
School 86
New books . . . . . 87, 94, 95, 96, III

Na ovitku: Sl. 2 b k članku na str. 71.

Obzornik mat. fiz. 30 (1983) 3

SPEKTROMETRIJA*

FRANC CVELBAR

UDK 535.33

Članek po obravnavi osnovnih pojmov o porazdelitvah, ki je prirejena šolski rabi, podaja osnove spektrometrije ionizirajočega sevanja, optične spektrometrije in spektrometrije električnih nihanj.

SPECTROMETRY

After the introduction of basic knowledge of distributions adapted to the use in school, fundamentals of the spectrometry of ionising radiation, optical spectrometry and spectrometry of electric oscillations are presented.

Uvod

V vsakdanjem življenju pogosto želimo razvrstiti telesa ali dogodke po kaki značilni količini. Krompir razvrščamo po masi, dijake po višini, zadetke strelca po razdalji od središča. V merilnem laboratoriju tovarne svetil analizirajo porazdelitev svetlobnega toka po prostoru. V raziskovalnem laboratoriju jih zanima porazdelitev ionizirajočih delcev pri radioaktivnem razpadu po kinetični energiji. To dejavnost pogosto imenujemo na splošno *spektrometrija.* Besedo uporabljamo tudi v zvezah, ki označujejo posamezne veje: optična, rentgenska spektrometrija, spektrometrija delcev α itd.

Denimo, da je pred vami 100 naključno nabranih kamenčkov s plaže pri Sv. Štefanu. Kaj lahko povemo o njih? Lotimo se njihovega tehtanja in jih razdelimo po masi. Preštejemo kamenčke na intervalu od 0 do 5 g, od 5 g do 10 g, 10 g do 15 g in od 15 g do 20 g. Ugotovimo, da je število kamenčkov na teh intervalih po vrsti 10, 40, 44, 6 in prikažemo porazdelitev z diagramom (Sl. 1).

Sl. 1. Masna porazdelitev 100 kamenčkov z morske plaže pri Sv. Štefanu

* Po predavanju na seminarju za učitelje fizike v srednjem usmerjenem izobraževanju leta 1981.

Ker smo izbrali masne intervale *dm* razmeroma široke, daje dobljeni *histogram* le grobo sliko o porazdelitvi kamenčkov po masi. Za natančnejšo analizo bi potrebovali več kamenčkov. Tedaj bi si lahko privoščili ožje masne intervale. Novi histogram bi imel več ožjih stopnic. Čim ožje bi bile stopnice, tem bolj bi se histogram približal gladki krivulji. Le-to bi dobili v mejnem primeru infinitezimalno ozkih intervalov. Porazdelitvi, za katero obstaja taka mejna krivulja, pravimo *zvezna porazdelitev* (Sl. 2). Pogosto nanesemo na navpično os histograma kar število kamenčkov na intervalu na enoto mase, torej dN/dm.

Sl. 2. Sklenjena krivulja podaja porazdelitev kamenčkov s slike 1, ki bi jo dobili, če bi zajeli v vzorec veliko večje število kamenčkov in razdelili po mnogo ožjih intervalih. Krivulja je preračunana na celotno število 100 kamenčkov, črtkani histogram pa je prerisan s slike 1

Drugačna je *diskretna porazdelitev,* pri kateri količina zavzame le določene (diskretne) vrednosti. Mečimo kocko! Kocka pokaže eno od celih števil od 1 do 6, ne more pa pokazati vmesne vrednosti. Če smo kocko vrgli 6000-krat, vsako od njih nastopi okoli 1000-krat. Tudi to porazdelitev narišemo (Sl. 3). Za sliko so značilne diskretne črte.

Sl. 3. Diskretna porazdelitev števil, ki jih pri 6000 metih pokaže kocka

Polno število vseh kamenčkov v histogramu (sl. 1) dobimo tako, da seštejemo ordinate vseh stolpcev. Na sliki 2 moramo v ta namen poiskati ploščino pod krivuljama. Pri diskretni porazdelitvi (sl. 3) seštejemo dolžine vseh daljic, da dobimo polno število metov.

O diskretni porazdelitvi govorimo tudi v drugih primerih: pri frekvenci nihanja strune, valovni dolžini ali frekvenci svetlobe, ki jo sevajo plini, kinetični energiji delcev, fotonov itd. Vendar pri merjenju naštetih količin ne dobimo popolnoma ostrih črt, ampak bolj ali manj ostre vrhove (Sl. 4). Vzrok za to je tudi končna ločljivost merilne naprave. Zaradi tega v fiziki imenujemo diskretne vse porazdelitve, ki kažejo izrazite vrhove.

Besedo porazdelitev pogosto nadomestimo z besedo *spekter.* Merjenje spektrov imenujemo *spektrometrija.* Kvalitativno določanje spektrov je *spek-*

troskopija. V optiki namesto o diskretnem spektru govorimo o črtastem spektru in besede porazdelitev navadno ne uporabljamo.

Sl. 4. Pri merjenju diskretnih porazdelitev najpogosteje ne dobimo ostrih črt kot na sliki 3, ampak bolj ali manj razmazane vrhove

V nadaljevanju si oglejmo tri posebne veje spektrometrije: *spektrometrijo ionizirajočih delcev, optično spektrometrijo* in *spektrometrijo električnih nihanj.*

Spektrometrija ionizirajočih delcev

Za identifikacijo radioaktivnih izotopov in pri vrsti jedrskih raziskav je treba poznati porazdelitev izsevanih delcev po kinetični energiji: dN/dW_k. Za delce α jo najpreprosteje ugotovimo tako, da v meglični celici izmerimo dolžino sledi. Z njo je določena kinetična energija delca, ki jo je povzročil. Podatke nato vrišemo v histogram. Postopek je zamuden, vendar so ga v posebne namene še pred kratkim uporabljali.

Ponuja se misel, da ionizirajočemu delcu izmerimo kinetično energijo električno, se pravi, da ji priredimo sorazmerni napetostni sunek: $U \propto W_k$.

Za težke delce to naredimo z *ionizacijsko celico,* ko deluje na območju sunkov. Ionizirajoči delec na svoji poti skozi celico trga nevtralne atome plina v pozitivne ione in elektrone. Če delec pot začne in konča v celici, je število ionskih parov sorazmerno z začetno kinetično energijo. Ko nastale nabite delce pritegneta pozitivna in negativna elektroda, dobimo na delovnem uporu želeni napetostni sunek. Njegova višina je pri izbrani celici in stalnem ojačenju linearnega ojačevalnika, s katerim sunek ojačimo, odvisna samo od kinetične energije delca.

Najpreprosteje izmerimo višino napetostnih sunkov z osciloskopom. Če prihajajo sunki dovolj poredkoma, lahko odčitamo višino za vsakega posebej. Vrednosti zapišemo in razvrstimo v histogram dN/dU. Iz tega sledi spekter:

$$dN/dW_k = (dN/dU)\,(dU/dW_k) \propto dN/dU$$

Porazdelitev delcev po kinetični energiji in porazdelitev višin napetostnih sunkov sta si torej podobni.

Zadnje čase uporabljajo za razvrščanje napetostnih sunkov skoraj izključno *večkanalne analizatorje.* Tak analizator izmeri višino vsakega sunka posebej, shrani podatke v spominu ter na ukaz posreduje spekter. Večkanalni analizatorji imajo vsaj sto kanalov. Spekter posredujejo v obliki izpisane tabele ali diagrama, lahko pa ga prenesejo k računalniku v nadaljnjo obdelavo.

Ionizacijske celice v zadnjem času izpodrivajo polprevodniški merilniki, ki so v bistvu ionizacijske celice v trdni snovi. Poleg teh uporabljamo za spektrometrijo ionizirajočih delcev tudi proporcionalne števce in scintilacijske števce, v katerih nastanejo drobne iskre, ki jih zazna fotopomnoževalka.

Mimogrede povejmo, da Geiger-Müllerjeva cev za spektrometrijo ionizirajočih delcev ni uporabna, ker daje na izhodu napetostne sunke, katerih višina ni odvisna od kinetične energije in vrste delca.

Sorazmernost $U \propto W_k$ velja le za direktno ionizirajoče sevanje. Drugače je pri indirektno ionizirajočem sevanju (fotonih, nevtronih). V spektru fotonov γ z ostro določeno energijo (Sl. 5) poleg vrha fotoelektronov, katerega lega približno ustreza energiji fotonov γ, dobimo tudi zvezno porazdeljeni del zaradi elektronov, ki se sprostijo pri Comptonovem pojavu. Če dobimo pri merjenju spektra več vrhov, ki se morda celo prekrivajo, izluščimo iz njega spekter vpadnih fotonov z zahtevnimi računskimi postopki.

Sl. 5. Porazdelitev višin napetostnih sunkov, ki jih da scintilacijski spektrometer, če ga obsevamo s fotoni γ z energijo 1 MeV: 1 — vrh fotoefekta (srednja višina sunkov v njem je približno sorazmerna z energijo fotonov γ), 2 — comptonski kontinuum (sunki iz njega pripadajo elektronom Comptonovega sipanja)

Da se pri merjenju spektra nevtronov izognejo taki nevšečnosti, merijo čas preleta na dani poti. Tako določijo hitrost nevtrona in iz nje kinetično energijo. Zato mora izvir dajati kratkotrajne sunke nevtronov ali pa moramo s posebno napravo razsekati konstantni tok na sunke.

Optična spektrometrija

V njej nas zanima porazdelitev svetlobnega toka P iz kakega svetila po valovni dolžini:

$$w(\lambda) = dP/d\lambda$$

Oglejmo si merjenje takega spektra z uklonsko mrežico. Za uklon ravnega valovanja z valovno dolžino λ na mrežici z razdaljo med režami a velja $a \sin \vartheta = n\lambda$. Tu pomeni ϑ kot, ki ga s prvotno smerjo oklepa smer, v kateri je gostota energijskega toka v uklonjenem valovanju reda n največja. Če se omejimo na prvi red uklonjenega valovanja, velja $\lambda = a \sin \vartheta$. Valovno dolžino torej določimo tako, da izmerimo kot ϑ in njegov sinus pomnožimo s konstanto mrežice a. Svetlobni tok merimo z merilnikom, pred katerega postavimo zaslonko, ki prepušča svetlobo v intervalu $d\vartheta$ med kotoma $\vartheta - \frac{1}{2}d\vartheta$ in $\vartheta + \frac{1}{2}d\vartheta$. Ustreza mu interval valovne dolžine $d\lambda$. Tudi če je pri meritvi kotna odprtina zaslonke konstantna, to ne velja za ustrezno širino $d\lambda$, saj je

$$d\lambda = a \cos \vartheta \, d\vartheta$$

Spekter merimo tako, da detektor pomikamo od kota do kota in vsakokrat zabeležimo svetlobni tok dP. S tem dobimo spekter $dP/d\lambda$. Zvezo med $dP/d\vartheta$ in $dP/d\lambda$ dobimo tako, da v prvi porazdelitvi zamenjamo neodvisno spremenljivko ϑ z λ. Končno velja:

$$dP/d\lambda = (dP/d\vartheta)/(a \cos \vartheta)$$

Spekter $dP/d\lambda$ dobimo torej tako, da $dP/d\vartheta$ delimo z $a \cos \vartheta$.

Povedano velja za primer, da je detektor merilnika neselektiven in pokaže vedno pravi svetlobni tok. Tak detektor je na primer baterija počrnjenih termoelementov, ki pa ima razmeroma majhno občutljivost. V praksi uporabljamo bolj občutljive, selektivne merilnike, na primer fotopomnoževalko, ki pa imajo to slabo lastnost, da so pri različnih valovnih dolžinah različno občutljivi. Pravi spekter dobimo, če upoštevamo popravke. Upoštevati je treba tudi popravke zaradi tega, ker leče, ohišje svetila in merilnika niso enako prepustne za svetlobo vseh valovnih dolžin.

Spektrometer na prizmo izkorišča disperzijo, to je pojav, da je lomni kvocient stekla odvisen od valovne dolžine svetlobe. Zaradi tega je odklon svetlobe ϑ pri dani prizmi z lomečim kotom γ različen za različne valovne dolžine. Čim krajša je valovna dolžina, tem krajši je. Pri majhnih kotih ϑ velja:

$$\vartheta \approx (n - 1)\,\gamma$$

Merimo enako kot pri spektrometru na mrežico, zato velja podobno kot prej:

$$dP/d\lambda = (dP/d\vartheta)\,.\,(d\vartheta/d\lambda) = (dP/d\vartheta)\,.\,(dn/d\lambda)$$

saj je $d\vartheta/d\lambda = dn/d\lambda$.

Spekter svetlobe je ali *črtast* (plini in kovinske pare) ali *trakast* z zelo gostimi črtami (plin, v katerem sevajo molekule) ali *zvezen* (trdna telesa).

Spektrometrija električnih nihanj

V tem primeru gre za porazdelitev amplitude nihajoče električne napetosti po frekvencah. Omejili se bomo le na nihanja, to je na periodično spreminjanje. Po Fourieru se da vsako nihanje napisati kot vsota sinusnih nihanj s frekvencami, ki so mnogokratniki osnovne krožne frekvence ω:

$$U = \sum_j U_j \cos j\,\omega\,t + \sum_j V_j \sin j\,\omega\,t$$

Če je funkcija soda, nastopajo v vrsti sami kosinusni členi, če pa je liha, se pojavijo sami sinusni členi. Pri nihanju imamo torej opraviti samo s celimi mnogokratniki osnovne frekvence. To pomeni, da je spekter nihanja diskreten. Če spreminjanje ni periodično, je spekter zvezen.

Poglejmo, kako določimo spekter kakega nihanja. Spekter nizkofrekvenčnega nihanja približno določimo tako, da vzbujamo niz na konceh vpetih jezičkov (nihal), ki se po lastni frekvenci le malo razlikujejo. Frekvenco nihanja, ki ga raziskujemo, določimo tako, da ugotovimo, kateri jeziček najmočneje zaniha. Spekter pa podajajo amplitude vseh jezičkov. Opisano napravo so do nedavna uporabljali v elektrarnah za analizo nihanja omrežne napetosti.

Za proučevanje visokofrekvenčnih nihanj (s frekvenco na primer 50 kHz) opisana naprava ni uporabna, saj bi jezički postali premajhni. Mehanično nihalo v tem primeru nadomestimo z električnim nihajnim krogom. Če bi se zgledovali po prejšnjem merilniku, bi morali nanizati množico nihajnih krogov. Vendar pa opravimo meritev z enim samim nihajnim krogom, če se le amplituda nihanja s časom ne spreminja. Med meritvijo mu korakoma spreminjamo (s spreminjanjem induktivnosti in kapacitete) lastno frekvenco in pri vsakem koraku izmerimo amplitudo nihanja. Vsak radijski sprejemnik je

v bistvu tak spektralni analizator. Pri večini sprejemnikov so lastne frekvence označene. Amplitude ocenimo s poslušanjem. Če pa bi imeli namesto zvočnika voltmeter, bi bil sprejemnik že kar šolski spektralni analizator.

Sl. 6. Spekter pravokotnega (a) in trikotnega nihanja (b). Ker je prvo manj podobno kosinusu kot drugo sinusu, je v spektru (a) več črt kot v spektru (b). Pravokotno nihanje zapišemo kot:

$$U = (4U_0/\pi)\,(\cos\omega\,t - (\tfrac{1}{3})\cos 3\omega\,t + (\tfrac{1}{5})\cos 5\omega\,t - \ldots)$$

in trikotno kot:

$$U = (4U_0/\pi)\,(\sin\omega\,t - (\tfrac{1}{9})\sin 3\omega\,t + (\tfrac{1}{25})\sin 5\omega\,t - \ldots)$$

Za hitro otipanje spektra je ugodno, če ob spreminjanju lastne frekvence istočasno rišemo izmerjeni signal s pisalnim instrumentom. Komercialno pa so dosegljivi tudi nekoliko dražji *osciloskopi s trajnim zapisom,* ki jih brez težav priredimo za spektralne analizatorje. Ko žarek osciloskopa potuje v horizontalni smeri, se spreminja tudi lastna frekvenca merilnega nihajnega kroga in njegova amplituda se pokaže kot odklon elektronskega žarka v navpični smeri.

Vse, kar smo spoznali v tem poglavju, velja tudi za mehanično nihanje in zvok. Ustreznih nihanj namreč ni težko spremeniti v električna nihanja.

Zaključek

Ogledali smo si najpogostejše in pedagoško najlaže razumljive spektrometrije. V poglavju o optični spektrometriji smo obdelali le pravo, to je *emisijsko spektrometrijo.* Ogledali smo si določanje porazdelitve izsevane svetlobe po valovnih dolžinah. V optiki pa sta pomembna pojma tudi *absorpcijski spekter* in *absorpcijska spektrometrija.* V tem primeru gre za merjenje absorpcijskega koeficienta snovi v odvisnosti od valovne dolžine. Če kaže taka odvisnost izrazito strukturo, govorimo o *absorpcijskem spektru.* Znano je, da plin, ki seva svetlobo z dano valovno dolžino, to svetlobo tudi močno absorbira.

Obzornik mat. fiz. 30 (1983) 3

ŠIBKI BOZON

JANEZ STRNAD

UDK 539.126.4

Članek govori o delcu polja šibke interakcije, ki so ga nedavno odkrili pri trkih protonov in nevtronov v trkalniku CERN. Stari zamisli o tem delcu je dala novo veljavo poenotena teorija elektromagnetne in šibke interakcije, ki je napovedala lastno energijo delca. Dve veliki mednarodni raziskovalni skupini sta ob velikih in zapletenih merilnikih opazili deset dogodkov, ki po vsej verjetnosti kažejo razpad nabitega šibkega bozona.

THE INTERMEDIATE VECTOR BOSON

The article is devoted to the particle mediating weak interactions that was recently observed in proton-antiproton collisions at the CERN collider. The unified electroweak theory gave support to the old idea of this particle and predicted its proper mass. Using great and complicated detectors two international research groups observed ten events which at a high level of confidence show the decay of charged intermediate vector bosons.

Vest, ki so jo mnogi pričakovali že pred novoletnimi prazniki, se je razširila v januarju. O odkritju so govorili najprej na rimskem delovnem sestanku, uradno pa so ga objavili na tiskovni konferenci v evropskem središču za jedrske raziskave CERN v Ženevi [1]. Kmalu nato je izšlo poročilo prve skupine [2] in nekoliko pozneje poročilo druge skupine [3]. O odkritju so pisali tudi dnevni časopisi in Obzornik si ne more kaj, da ne bi poročal o njem.

Osnovna zamisel izvira od japonskega fizika Hidekija Yukawe — iz leta 1938. Interakcijo — ali po domače silo — med delcema opišemo z delovanjem polja prvega delca na drugi delec. V kvantni teoriji polja si predstavljamo, da prvi delec izseva *delec polja,* ki ga absorbira in ponovno izseva drugi delec, nato ga zopet absorbira in izseva prvi delec in tako naprej. Delec polja, ki si ga izmenjavata oba delca, je *virtualen,* s čimer hočemo reči, da ni prost in ni mogoče določiti njegove energije ali gibalne količine. Ob trkih med delci pa lahko nastane prosti delec polja, če je na voljo dovolj energije.

Virtualni delec polja si mora energijo, ki je potrebna za njegov nastanek, sposoditi in jo tako hitro vrniti, da ga ni mogoče zalotiti s sposojeno energijo. Zadevo ureja zveza nedoločenosti $t\,\delta W \gtrapprox \hbar$, v kateri je δW nedoločenost pri merjenju energije in t čas, ki je na razpolago za merjenje. Ta čas povežemo z največjo razdaljo $x = ct$, do katere bi se lahko oddaljil delec polja, če bi se gibal s svetlobno hitrostjo c, za nedoločenost energije pa postavimo lastno energijo delca polja mc^2. Tako dobimo za lastno energijo delca polja $mc^2 \approx \approx \hbar c/x$, če pomeni x doseg interakcije.

Doseg elektromagnetne interakcije ni omejen, saj pojema Coulombova sila obratno sorazmerno s kvadratom razdalje. Zato je lastna energija delcev elektromagnetnega polja, to je fotonov, enaka nič. Doseg močne jedrske interakcije, ki veže protone in nevtrone v atomskih jedrih, pa meri okoli $2 \,.\, 10^{-15}$ m, kar da za lastno energijo delca njenega polja okoli $1{,}5 \,.\, 10^{-11}$ J ali okoli 100 MeV. Tako je Yukawa napovedal obstoj mezona π ali piona, ki na-

stopa v treh inačicah, nabitih in nevtralni: π^+, π^- in π^0. Šibka interakcija, ki povzroča radioaktivni razpad β atomskih jeder in nekatere razpade delcev, je mnogo manj učinkovita od močne. To je mogoče pojasniti z zelo kratkim dosegom ali s šibkostjo interakcije. Teorije, ki so izhajale od kratkega dosega, so napovedovale, da imajo delci polja zelo veliko lastno energijo, mnogo večjo od lastne energije pionov.

Za delce polja nasploh ne velja izključitveno načelo, to pa pomeni, da morajo imeti cel spin in so torej *bozoni*. Foton ima na primer spin 1, kar je povezano z vektorsko naravo električnega in magnetnega polja. Tudi za spin delca polja šibke interakcije so predvidevali spin 1 in so ga zato imenovali *vektorski bozon*. Če so rekli *vmesni vektorski bozon*, so hoteli s tem samo še dodatno poudariti, da kot virtualni delec posreduje šibko interakcijo. V angleščini mu rečejo včasih prav na kratko kar *weakon* (»šibkon«, weak — šibek).

Od Yukawovih časov je zamisel o delcu polja šibke interakcije dobila mnogo bolj določne poteze. Medtem je obveljalo, da so hadroni sestavljeni iz kvarkov in so S. L. Glashow in drugi obdelali šibko interakcijo kvarkov. A. Salam in S. Weinberg sta postavila poenoteno teorijo elektromagnetne in šibke interakcije. Ne da bi se spuščali v podrobnosti, povejmo, da izhajajo v tej teoriji iz štirih vektorskih polj z enako naravo. Potem poskrbijo, da ostane doseg enega od njih neomejen in ima njegov delec lastno energijo nič ter da dobijo druga tri polja končen doseg in imajo njihovi delci od nič različno lastno energijo. Prvo polje je znano elektromagnetno polje in so njegovi delci fotoni, druga tri polja pa sestavljajo polje šibke interakcije in so njihovi delci nabita šibka bozona W^+ in W^- in nevtralni šibki bozon Z^0. V ta namen uvedejo dodatna štiri skalarna polja na način, ki ga je predložil P. Higgs. Tri izmed teh polj dajo končen doseg trem od štirih začetnih vektorskih polj in lastno energijo njihovim delcem ter jih ni mogoče zaznati kot samostojne tvorbe. Preostalo Higgsovo polje pa je mogoče zaznati preko njegovega delca — *Higgsovega bozona* s spinom 0. Odkritje nabitih šibkih bozonov, nevtralnega šibkega bozona in Higgsovega bozona bi izdatno podprlo elektrošibko teorijo v sedanji obliki [4].

Vlogo šibkega bozona si oglejmo najprej pri razpadu nevtrona. Kvark d z nabojem $-\frac{1}{3}e_0$, ki poleg kvarkov u in d sestavlja nevtron, se spremeni v kvark u z nabojem $\frac{2}{3}e_0$, ko izseva bozon W^-. Bozon razpade dalje na elektron in elektronski antinevtrino (Sl. 1 a), kvarki u, u in d pa sestavljajo proton. Podobno pojasnimo razpad β^- atomskih jeder, le da sta v tem primeru začetni nevtron in končni proton vezana v jedru. Pri razpadu β^+ pa se kvark u v vezanem protonu spremeni v kvark d v vezanem nevtronu, ko izseva bozon W^+ (Sl. 1 b). Bozon dalje razpade na pozitron in elektronski nevtrino. V nukleonu ima vsak od treh kvarkov drugo barvo, ki se ne spremeni, ko izseva šibki bozon in se spremeni v kvark druge vrste. Slikovito pravimo, da izsevanje šibkega bozona ne prizadene barve kvarka, ampak le njegov okus.

Med kvarkom v hadronu in leptonoma prenese šibki bozon W^- ali W^+ en osnovni naboj, zato govorimo v tej zvezi o *nabitem šibkem toku*. Ta tok je odgovoren tudi za reakcije med nevtrini in nukleoni (Sl. 1 c). Za sipanje nevtrinov na kvarkih v nukleonu pa je odgovoren *nevtralni šibki tok* (Sl. 1 d). Prav z nevtralnim šibkim tokom in njegovo eksperimentalno potrditvijo leta 1974 so vpeljali poleg nabitih šibkih bozonov še nevtralni šibki bozon Z^0 [5].

V elektrošibki teoriji je mogoče napovedati lastno energijo šibkih bozonov in Higgsovega bozona. Najzanesljivejša se zdi napoved, da imata nabita šibka bozona lastno energijo 82 GeV. Nekoliko manj zanesljiva je napoved, da ima nevtralni šibki bozon Z^0 lastno energijo 90 GeV. Precej bolj nezanesljiva je napoved za lastno energijo Higgsovega bozona, ki je še večja. S protoni s ki-

Sl. 1. Nekatere reakcije med kvarki, pri katerih sodeluje šibki bozon:
razpad prostega ali vezanega nevtrona $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ (a),
razpad vezanega protona $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ (b),
neprožno sipanje nevtrina $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$ (c),
prožno sipanje nevtrina $\nu_\mu + p \rightarrow p + \nu_\mu$ (d),
trk protona z antiprotonom $p + \bar{p} \rightarrow l + \bar{l}$ (e).
Pri tem zaznamuje l lepton in $\bar{l}$ antilepton in mora biti izpolnjen zakon o ohranitvi naboja. Reakcij $p + \bar{p} \rightarrow l + \bar{l}$ + karkoli, pri katerih nastanejo predvsem hadroni, nismo upoštevali, ker jih za zdaj še niso poskušali preiskati. *Feynmanovi diagrami* na risbi so v pomoč pri računanju. Antidelce narišejo kot delce z obrnjeno puščico. Izsevanje šibkega bozona W− je tedaj enakovredno absorpciji njegovega antidelca W+, ki bo nastal pozneje

netično energijo 400 GeV, kolikor zmoreta največja sinhrotrona v Ženevi in Batavii v ZDA, pri trkih z mirujočimi nukleoni vsekakor ni mogoče dobiti delcev s tolikšno lastno energijo. Pri takem trku se poleg polne energije ohrani gibalna količina in je za nastanek novih delcev na razpolago kvečjemu dobrih 25 GeV energije. Da bi pri trku z mirujočim protonom dosegli razpoložljivo energijo 82 GeV, bi morali dati protonu-izstrelku kinetično energijo nad 3700 GeV.

O. B. Cline in C. Rubbia sta iskala možnost, da bi vendarle ustvarili šibki bozon z obstoječima pospeševalnikoma. Po njuni spodbudi iz leta 1976 so preuredili ženevski super-protonski sinhrotron SPS v *trkalnik* (collider) [6], batavijski sinhrotron pa še preurejajo. Kadar deluje sinhrotron kot trkalnik, zberejo v svitkasti cevi antiprotonskega akumulatorja antiprotone, ki nastanejo pri reakcijah hitrih protonov z nukleoni v tarči, in jih »ohladijo«, tako da se gibljejo v bližini predpisanega tira. Nato uvedejo gruče antiprotonov v stari protonski sinhrotron PS in jih pospešijo do kinetične energije 26 GeV. Enako naredijo pozneje z gručami protonov. Oboje gruče nakopičijo potem v cevi super-protonskega sinhrotrona, tako da se gibljejo v nasprotnih smereh in jih naposled hkrati pospešijo do kinetične energije po 270 GeV. Na dveh

mestih v cevi pride do čelnih trkov antiprotonov s protoni. Pri tem je na razpolago za nastanek novih delcev skupna kinetična energija 540 GeV (in še skupna lastna energija protona in antiprotona), saj se laboratorijski sistem pokriva s težiščnim.

Pri tolikšni razpoložljivi energiji pri trkih antiprotona in protona lahko nastane šibki bozon, ko reagirata kvark in antikvark (Sl. 1 e). Za presek za nastanek nabitega šibkega bozona so napovedali okoli $6 \cdot 10^{-8}$ fm^2. Pri svetilnosti 500 fm^{-2} s^{-1}, kolikor je na koncu lanskega leta največ zmogel ženevski trkalnik, da to $6 \cdot 10^{-8}$ fm$^2 \cdot 500$ fm^{-2} s^{-1} $= 3 \cdot 10^{-5}$ s^{-1} ali okoli 26 nabitih šibkih bozonov v desetih dneh. Verjetnost za nastanek nevtralnega šibkega bozona z nekoliko večjo lastno energijo je kakih desetkrat manjša, verjetnost za nastanek Higgsovega bozona s še večjo lastno energijo pa je še kakih stokrat manjša in precej bolj negotova. Ko bo dosegel ženevski trkalnik predvideno svetilnost 10^4 fm^{-2} s^{-1}, se bodo verjetnosti za nastanek teh delcev skoraj stokrat povečale. V Batavii pa vgrajujejo v sinhrotron superprevodne magnete, tako da bo zmogel 1000 GeV ali 1 TeV (teraelektronvolt). V trkalniški izvedbi bo dalo to razpoložljivo energijo 2000 GeV (okoli leta 1985) in pri svetilnosti $4 \cdot 10^4$ fm^{-2} s^{-1} še dobrih desetkrat večje verjetnosti.

Nastali šibki bozon v izredno kratkem času razpade na dva leptona:

$$W^- \rightarrow e^- + \overline{\nu_e} \qquad W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \tag{1 a}$$

$$W^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu_\mu} \qquad W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \tag{1 b}$$

$$W^- \rightarrow \tau^- + \overline{\nu_\tau} \qquad W^+ \rightarrow \tau^+ + \nu_\tau \tag{1 c}$$

$$\begin{aligned} Z^0 &\rightarrow e^+ + e^- \\ Z^0 &\rightarrow \mu^+ + \mu^- \\ Z^0 &\rightarrow \tau^+ + \tau^- \end{aligned} \tag{1 d}$$

Napovedani razpadni čas okoli $2{,}5 \cdot 10^{-25}$ s je kratek celo v primeri z razpadnim časom vzbujenih stanj hadronov pri razpadu zaradi močne interakcije. Vendar se za šibki bozon ta čas ne zdi tako kratek, saj je zaradi tega njegova lastna energija nedoločena le za 3 %. Razpadnemu času okoli $2{,}5 \cdot 10^{-25}$ s ustreza namreč razpolovna energija okoli $W_{1/2} = \hbar/\tau = 2{,}6$ GeV, kar je samo okoli 3 % od 82 GeV ali 90 GeV.

Iskanja šibkega bozona so se lotili zelo velikopotezno in osnovali v CERN dve skupini. V skupini, ki je merila v prvi podzemni dvorani (UA 1, underground area 1), je sodelovalo 136 fizikov iz 11 ustanov iz zahodne Evrope in Severne Amerike [2], v drugi, ki je merila v drugi podzemni dvorani (UA 2), pa 59 fizikov iz šestih ustanov [3]. Drugo napravo so zgradili prav z namenom, da odkrijejo šibki bozon, prva pa je uporabna še za druge namene. Razlika med njima je še v tem, da je osrednji merilnik nekoliko manjše naprave UA 2 brez magnetnega polja, osrednji merilnik UA 1 pa je v magnetnem polju.

Za zdaj so poskušali ugotoviti razpad nabitega šibkega bozona na elektron ali pozitron (1 a). Tak razpad skoraj mirujočega šibkega bozona lahko razločijo od drugih pojavov, če odleti elektron ali pozitron z veliko kinetično energijo skoraj prečno na smer gibanja protona in antiprotona in če hkrati kaže primanjkljaj energije na to, da je nastal antinevtrino ali nevtrino. Iskati je treba torej dogodke, pri katerih ima elektron ali pozitron veliko prečno komponento gibalne količine. Antinevtrina ali nevtrina, ki nastane skupaj z elektronom ali pozitronom, ni mogoče zaznati s števci. O tem, da je nastal,

se lahko prepričajo le tako, da izmerijo gibalno količino vseh nastalih nabitih delcev in vseh sekundarnih nabitih delcev v števcih. Vsota gibalnih količin vseh teh delcev mora imeti v okviru dosegljive natančnosti enako velikost, a nasprotno smer kot elektron ali pozitron. Zagotovo ni lahko določiti velikost in smer gibalne količine vseh nabitih delcev s polno energijo 540 GeV. Vendar so v zadnjem času razvili takšne merilnike, ki jim pravijo *kalorimetri*.

Sl. 2. Fotografija, narejena v CERN [10] (a) ter poenostavljena risba naprave UA 1 (b, na naslovni strani) in njenega osrednjega merilnika, ki ga sestavljajo potovalne celice (c). Naprava je v celoti 10 m dolga in 5 m široka, tehta 2000 ton in je veljala 20 milijonov dolarjev. Prostornina magnetnega polja je 7 m . 3,5 m = 85 m³.
s srednja celica, s_1 in s_2 stranski celici, k ravnina katodnih žičk, a ravnina anodnih žičk. Celice so postavljene tako, da sta ravnini k in a vodoravni. Risbi sta vzeti iz članka M. Barranco Luque et al., *The Construction of the Central Detector for an Experiment at the CERN pp̄ Collider*, Nuclear Instruments and Methods **176** (1980) 175

Sl. 2 a

Sl. 2 c

V napravi UA 1 (Sl. 2) je osrednji merilnik valjasta potovalna celica [8] z dolžino 5,8 m in premerom 2,3 m. Celica je v magnetnem polju z gostoto 0,7 T. Z njo dobijo sliko sledi nabitih delcev na nekaj desetink milimetra natančno, kar ni slabše kot v mehurčni celici (Sl. 3, na ovitku). Osrednji merilnik obdajata elektromagnetni in hadronski kalorimeter. Prvo plast elektromagnetnega kalorimetra sestavlja 48 *gondol* s polkrožnim presekom, v katerih si sledijo plasti svinca in scintilatorja. Razvrščene so v valjasto lupino okoli potovalne celice. Ob osnovnih ploskvah obdaja celico še 64 števcev v obliki *cvetnih listov*, ki zaznavajo plazove nabitih leptonov in so razvrščeni v štirih plasteh v razdalji 3 m od točke trka in več. V še večji oddaljenosti od točke trka so razpostavljeni števci hadronskega kalorimetra, ki zaznavajo hadrone, to je pretežno nabite pione.

Med delovanjem trkalnika v 30 dneh novembra in decembra lani so zaznali okoli milijardo trkov med protoni in antiprotoni, ki so si sledili približno v razmiku po 0,2 s. Iz množice obdelanih dogodkov so s čedalje strožjimi zahtevami izbrali 2125 dogodkov z elektronom ali pozitronom z veliko prečno komponento gibalne količine. Po še strožjih zahtevah je preostalo 39 dogod-

Sl. 3. Sliki dogodkov s 65 (zgoraj) in 14 sledmi (spodaj) v žičnih celicah osrednjega merilnika UA 1. Piki kažeta točko trka, puščici pa sled elektrona ali pozitrona z veliko prečno komponento gibalne količine. Take slike lahko opazujejo sproti na računalniškem zaslonu, barve posredujejo tudi vtis globine: rdeča ustreza manjši, modra pa večji globini [2], [1]

kov, ki so jih preiskali vsakega posebej. Te dogodke so razdelili na tri skupine. Šestih dogodkov (petih iz gondol — od tega štirih elektronskih in enega pozitronskega — in enega iz števcev v obliki cvetnih listov) ni spremljal noben hadron z veliko energijo. Pri njih niso opazili *pljuskov* (angl. jets), kakor imenujejo snop skoraj vzporednih delcev, ki jih rodi hadron z veliko energijo. Pri enajstih dogodkih je pričal pljusk nasproti hitrega elektrona ali pozitrona o nastanku hadrona, pri triindvajsetih pa sta se pojavila celo dva pljuska. Dva izmed prvoimenovanih šestih dogodkov kaže slika 4.

Na novo so pregledali vseh 2125 dogodkov in določili vektor skupne gibalne količine vseh delcev, ki so jih zaznali kalorimetri. Med končnimi 31 dogodki je bilo tudi vseh šest prej izbranih dogodkov. Pri njih je imela manjkajoča gibalna količina pravo velikost in pravo smer. Ti dogodki skoraj zagotovo kažejo razpad nabitega šibkega bozona (1 a) (Sl. 5). Skrbno so pretehtali, ali bi lahko števci dali tako sliko še pri kakem drugem dogodku, a so drugo

Sl. 4. Odvisnost absorbirane energije v števcih elektromagnetnega kalorimetra v napravi UA 1 od polarnega kota Θ in azimuta Φ za dogodek z zgornjega dela slike 3. Pri tem je $\eta = \frac{1}{2} \ln (1 + \cos \Theta)/(1 - \cos \Theta)$. Osamljeni vrh razločno kaže, da je nastal elektron ali pozitron z veliko prečno komponento gibalne količine in ustrezno kinetično energijo 23,7 GeV [2]

Sl. 5. Šest dogodkov, ki so jih z napravo UA 1 izločili kot verjetne razpade nabitega šibkega bozona (sledi pri dveh od njih kaže slika 3. Na vodoravni osi je narisana porazdelitev dogodkov po energiji, ki ustreza prečni komponenti gibalne količine elektrona ali pozitrona, na navpični osi pa porazdelitev dogodkov po energiji, ki ustreza manjkajoči komponenti gibalne količine v nasprotni smeri elektrona ali pozitrona. Sklenjeni krivulji kažeta napovedani porazdelitvi. Merske točke dogodkov bi morale ležati na poševni črti [2], [10]

za drugo izločili vse možnosti. Po dobljenih podatkih o gibalni količini elektrona ali pozitrona in manjkajoči gibalni količini antinevtrina ali nevtrina so določili lastno energijo nabitega šibkega bozona. Zanjo so dobili 81 GeV na ± 5 GeV natančno, kar se zelo dobro ujema z napovedjo elektrošibke teorije.

Podobno so ravnali pri napravi UA 2 [3]. Njen osrednji merilnik, s katerim določijo sledi nabitih delcev in točko trka na 1 mm natančno, sestavljajo dve potovalni celici in štiri večžične proporcionalne celice [8] (Sl. 6). Obdajata ga elektromagnetni in hadronski kalorimeter in na eni strani širokokotni magnetni spektrometer s plastjo svinčevega stekla, v kateri rodijo nabiti delci plazove. Ob osi je še 24 toroidnih magnetnih števcev, ki jim sledijo v smeri navzven potovalne celice, večžične proporcionalne celice in dodatni elektromagnetni kalorimetri. Osrednji kalorimeter sestavlja 200 celic, od katerih zajame vsaka kot 15^0 po azimutu Φ in 10^0 po polarnem kotu Θ. Celico sestavljajo plasti svinca in scintilatorja za zaznavanje nabitih leptonov in dve plasti

Sl. 6 a

Sl. 6 b

Sl. 6. Fotografija naprave UA 2, ki so jo posneli v CERN (a) [10], in poenostavljena risba njegovih merilnikov [3] (b): k konverter (kovinska plošča, v kateri fotoni rodijo elektronske pare, srednje plošče so iz volframa), om osrednji merilnik, pc potovalne celice, sk sprednji kalorimeter, tn toroidno navitje

železa in scintilatorja za zaznavanje hadronov. Delovanje kalorimetrov so prej skrbno preverili pri reakcijah protonov iz SPS in PS z nukleoni v tarči.

Zopet so v množici dogodkov iskali takšne z elektronom ali pozitronom z veliko prečno komponento gibalne količine. Z vse strožjimi zahtevami so izbrali 363 dogodkov, pri katerih je imel elektron ali pozitron v prečni smeri kinetično energijo 15 GeV ali več. Te dogodke so podrobneje preiskali in dobili s poostrenimi zahtevami — med njimi je bila zahteva, da izvira iz točke trka ena sama sled — štiri dogodke.

Nato so s podatki iz kalorimetrov in spektrometra določili manjkajočo gibalno količino. Izločili so dogodke z manjkajočo gibalno količino 0. Med preostalimi dogodki so imeli prej izbrani štirje dogodki največjo prečno komponento manjkajoče gibalne količine. Ti štirje dogodki po vsej verjetnosti kažejo razpad nabitega šibkega bozona. Tudi v tem primeru so zanj dobili lastno energijo 80 GeV, a z nekoliko slabšo natančnostjo.

Po napovedi teorije so vsi trije razpadi (1 a), (1 b) in (1 c) enako verjetni. Vendar je mione, ki so precej težji od elektronov, mnogo teže zaznati, ker je njihovo zavorno sevanje mnogo manj izrazito. C. Rubbia je izjavil [9], da so pozneje našli dogodek, ki bi utegnil biti mionski razpad (1 b). Navajajo tudi, da bi utegnila biti dva dogodka z veliko prečno komponento manjkajoče gibalne količine, a brez elektrona ali pozitrona, tauonska razpada (1 c) [2].

Na osnovi opisanih meritev se C. Rubbia že veseli: »Vse je opravljeno, vse je mimo.« L. Lederman, vodja Fermijevega laboratorija v Batavii pa poziva k zadržanosti, češ da bi se bila lahko vtihotapila še kakšna napaka. V naslednjih mesecih pričakujemo zanimive vesti. V aprilu namreč nameravajo znova pognati ženevski trkalnik z večjo svetilnostjo. Če bodo nova merjenja dala prav C. Rubbii, odbor za podelitev Nobelovih nagrad ne bo mogel zlahka spregledati odkritja šibkega bozona.

Dostavek. New Scientist z 12. maja 1983 (str. 355) poroča, da so z napravo UA 1 v aprilu in začetku maja opazili en razpad nevtralnega šibkega bozona na elektronski par ($Z^0 \rightarrow e^- + e^+$) in štiri nove razpade nabitih šibkih bozonov W^- in W^+. Zdaj (sredi junija) so opazili še štiri razpade Z^0.

LITERATURA

[1] *First Signs of the W*, CERN Courier **23** (1983) 43.

[2] G. Arnison et al. (136 imen), *Experimental Observation of Isolated Large Transverse Energy Electrons with Associated Missing Energy at* $\sqrt{s} = 540$ GeV, Physics Letters **122** B (1983) 103.

[3] M. Banner et al. (59 imen), *Observation of Single Isolated Electrons of High Transverse Momentum in Events with Missing Transverse Energy at the CERN* $p\bar{p}$ *Collider*, Physics Letters **122** B (1983) 476.

[4] G. t'Hooft, *Gauge Theories of the Forces between Elementary Particles*, Scientific American **242** (1980) 90 (6).

[5] J. Strnad, *Nevtrinske oscilacije*, Obzornik mat. fiz. **27** (1980) 176.

[6] J. Strnad, *Korak k višjim energijam*, Obzornik mat. fiz. **29** (1982) 106.

[7] D. C. Cline, C. Rubbia, S. van der Meer, *The Search for the Intermediate Vector Bosons*, Scientific American **246** (1982) 48 (3).

[8] P. Križan, *Nova merilnika za nabite delce*, Obzornik mat. fiz. **27** (1980) 119.

[9] A. L. Robinson, *CERN Reports First Vector Boson Evidence*, Science **219** (1983) 480.

[10] M. Spiro, *Particules W: la fin d'une longue attente?* Recherche **14** (1983) 542.

[11] G. B. Lubkin, $p\bar{p}$ *Collisions Yield Intermediate Boson at 80 GeV as Predicted*, Physics Today **36** (1983) 14 (4).

Obzornik mat. fiz. 30 (1983) 3

O BILINEARNIH IN KVADRATNIH FUNKCIONALIH

JOSO VUKMAN

Math. subj. class. (1980) 10 C 05, 10 E 25, 15 A 03, 15 A 63

Članek obravnava neko posplošitev Jordan-Neumannove karakterizacije predhilbertovega prostora.

ON BILINEAR AND QUADRATIC FUNCTIONALS

In this paper an extension of Jordan-Neumann characterization of pre-Hilbert space is considered.

Naj bo X vektorski prostor nad obsegom kompleksnih števil $\mathbf{C}$. Funkcija B: $X \times X \to \mathbf{C}$ je *bilinearen funkcional,* če je

$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y) \quad , \quad x_1, x_2, y \in X,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$$
$$B(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y) = \bar{\mu}_1 B(x, y_1) + \bar{\mu}_2 B(x, y_2) \quad , \quad x, y_1, y_2 \in X,\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C}$$

Bilinearen funkcional B generira s pomočjo relacije $Q(x) = B(x, x)$ preslikavo Q: $X \to \mathbf{C}$, ki ima lastnosti

(i) $Q(x + y) + Q(x - y) = 2Q(x) + 2Q(y) \quad , \quad x, y \in X$

(ii) $Q(\lambda x) = |\lambda|^2 Q(x) \quad , \quad x \in x,\ \lambda \in \mathbf{C}$

o čemer se ni težko prepričati. Vsaki preslikavi $Q : X \to \mathbf{C}$, ki zadošča zahtevam (i) in (ii), bomo rekli *kvadratni funkcional.* V tem sestavku bomo obravnavali problem, ki ga je formuliral I. Halperin leta 1963. Vprašanje se glasi: ali pripada vsakemu kvadratnemu funkcionalu Q, ki deluje na kompleksnem vektorskem prostoru X, bilinearen funkcional B, tako da je za vsak $x \in X$ izpolnjeno $Q(x) = B(x, x)$? Izkazalo se je, da je odgovor pozitiven. Problem je rešil S. Kurepa s tem, da je leta 1965 dokazal naslednjo trditev.

IZREK 1 (*S. Kurepa* [3]) *Naj bo Q kvadraten funkcional, ki deluje na kompleksnem vektorskem prostoru X. Z relacijo* $B(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y)) + \frac{i}{4}(Q(x + iy) - Q(x - iy))$ *je definiran bilinearen funkcional, pri čemer je za vsak $x \in X$ izpolnjeno $Q(x) = B(x, x)$.*

Zapišimo še naslednjo trditev, za katero je očitno, da je v tesni zvezi z izrekom 1.

IZREK 2 (*P. Jordan. J. v. Neumann* [1] *Naj bo $(x, \|.\|)$ kompleksen normiran prostor. Če zadošča norma $\|.\|$ pogoju $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, kjer sta x in y poljubna vektorja prostora X, potem je z relacijo* $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$ *definiran skalarni produkt, pri čemer je za vsak $x \in X$ izpolnjeno $\|x\|^2 = (x, x)$.*

Z izrekom 2 je podana karakterizacija kompleksnega predhilbertovega prostora med vsemi kompleksnimi normiranimi prostori. Ker želimo opozoriti na težave pri dokazu izreka 1, si bomo najprej ogledali dokaz izreka 2. V ta namen dokažimo najprej naslednji pomožni izrek, ki ga bomo potrebovali tudi pri dokazu izreka 1.

LEMA 1 *Naj bo X kompleksen (realen) vektorski prostor in f funkcija, ki preslika X v obseg kompleksnih (realnih) števil. Če ima funkcija f lastnost $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ za vsak par $x, y \in X$, potem je funkcija $S(x,y)=f(x+y)-f(x-y)$ aditivna v obeh argumentih.*

DOKAZ Denimo torej, da zadošča funkcija f pogoju

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \tag{1}$$

in dokažimo, da je funkcija S, ki je definirana z

$$S(x,y)=f(x+y)-f(x-y) \tag{2}$$

aditivna v prvi spremenljivki. Če v (1) vstavimo $x=y=0$, dobimo

$$f(0)=0 \tag{3}$$

za $x=0$ pa dobimo

$$f(-y)=f(y) \tag{4}$$

Za poljubne elemente x, y, $u \in X$ imamo

$$\begin{aligned} S(x+y,2u) &= f(x+y+2u)-f(x+y-2u)= \\ &= f((x+u)+(y+u))+f((x+u)-(y+u))- \\ &\quad -f((x-u)+(y-u))-f((x-u)-(y-u)) \end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo (1), dobimo

$$\begin{aligned} S(x+y,2u) &= (2f(x+u)+2f(y+u))-(2f(x-u)+ \\ &\quad +2f(y-u))=2S(x,u)+2S(y,u) \end{aligned}$$

Dobili smo torej

$$S(x+y,2u)=2S(x,u)+2S(y,u) \tag{5}$$

Če v (5) vstavimo $y=0$, $x=z$ in upoštevamo (4), dobimo

$$S(z,2u)=2S(z,u) \tag{6}$$

Če v (6) pišemo $z=x+y$ in upoštevamo (5), dobimo končno $2S(x+y,u)=$ $=S(x+y,2u)=2S(x,u)+2S(y,u)$, kar dokazuje, da je funkcija S aditivna v prvem argumentu.

Ker velja $S(x,y)=S(y,x)$, to sledi iz $f(x-y)=f(y-x)$ (glej (4)), je aditivna tudi v drugem argumentu. Dokaz leme 1 je s tem končan.

DOKAZ IZREKA 2 Naj bo torej $(X, \|\cdot\|)$ kompleksen normiran prostor. Enačba $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$ pove, da funkcija $f(x)=\frac{1}{4}\|x\|^2$ zadošča pogojem leme 1, zato je funkcija $S(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$ aditivna v obeh argumentih. Od tod dobimo, da je za vsako racionalno število r izpolnjeno

$$S(rx,y)=rS(x,y) \tag{7}$$

Iz $\|tx + y\| = \|(t - s)x + sx + y\| \leq |t - s| \, \|x\| + \|sx + y\|$, kjer sta x in y poljubna vektorja, t in s pa poljubni realni števili, sledi, da je funkcija $t \mapsto \|tx + y\|$ zvezna. Od tod sledi, da je tudi funkcija $t \mapsto S(tx, y)$ zvezna, to pa nam da skupaj s (7) in dejstvom, da je vsako realno število limita zaporedja z racionalnimi členi

$$S(tx, y) = tS(x, y) \tag{8}$$

pri čemer je t poljubno realno število, x in y pa poljubna vektorja prostora X. Sedaj ko smo dokazali (8), se ne bo težko prepričati, da je z $(x, y) = S(x, y) + iS(x, iy)$ definiran skalarni produkt, pri čemer je za vsak $x \in X$ izpolnjeno $(x, x) = \|x\|^2$.

Pri dokazu izreka 1 bomo sledili P. Vrbovi, ki je leta 1973 v članku [5] prvotni dokaz S. Kurepe skrajšala (glej tudi [4], str. 144). Pri tem ji je bil v pomoč naslednji rezultat.

LEMA 2 (P. Vrbova [5]) *Naj bo f aditivna funkcija, ki preslika obseg kompleksnih števil vase. Če je za vsako od nič različno kompleksno število λ izpolnjeno $f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, potem je $f(\lambda) = f(i)\, Im\lambda$ za vsak kompleksen λ.*

DOKAZ Najprej bomo dokazali, da je

$$f(t) = 0 \tag{9}$$

za vsako realno število t. V ta namen dokažimo najprej veljavnost enakosti (9) za primer, ko je $|t| \leq 1$. Naj bo torej $|t| \leq 1$. Izberimo realno število s tako, da bo $t^2 + s^2 = 1$ in pišimo $\lambda = t + is$. Ker je funkcija f aditivna, imamo $f(t) + f(is) = f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -f(t - is) = -f(t) + f(is)$, od koder dobimo $f(t) = 0$. Če je $|t| > 1$, potem je $\left|\frac{1}{t}\right| < 1$ in je $f(t) = -t^2 f\left(\frac{1}{t}\right) = 0$. S tem je (9) dokazano. Dokažimo, da je pri poljubnem realnem številu s izpolnjeno

$$f(is) = sf(i) \tag{10}$$

Vzemimo najprej $s \in (0, 1]$, t pa naj bo takšno realno število, da je $t^2 + s^2 = s$. Pišimo $\lambda = t + is$. Potem je $f(is) = f(t) + f(is) = f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -sf\left(\frac{t - is}{t^2 + s^2}\right) = -sf\left(\frac{t}{s} - i\right) = -sf\left(\frac{t}{s}\right) + sf(i) = sf(i)$. Uporabili smo (9) in aditivnost funkcije f. Sedaj naj bo $s > 1$. V tem primeru je $f(is) = -s^2 f\left(\frac{1}{is}\right) = -s^2 f\left(-i\frac{1}{s}\right) = s^2 f\left(i\frac{1}{s}\right) = sf(i)$. Dokazali smo torej, da za vsak $s > 0$ velja (10), ker pa je funkcija f aditivna, sledi od tod, da velja (10) za vsak realen s. Iz (9), (10) in aditivnosti funkcije f sledi $f(t + is) = sf(i)$ pri poljubnih realnih številih s in t. S tem je lema 2 v celoti dokazana.

DOKAZ IZREKA 1 Začetek dokaza je podoben začetku dokaza izreka 2. Iz pogojev izreka 1 in leme 1 sledi, da je funkcija $S(x, y) = Q(x + y) - Q(x - y)$ aditivna v obeh argumentih. Od tod sledi, da je tudi funkcija

$B(x, y) = \frac{1}{4}S(x, y) + \frac{i}{4}S(x, iy)$ aditivna v obeh argumentih. Ni se težko prepričati, da je za vsak $x \in X$ izpolnjeno $Q(x) = B(x, x)$. Preostane nam torej le še to, da dokažemo, da je za vsak par $x, y \in X$ in vsako kompleksno število λ izpolnjeno

$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y), \; B(x, \lambda y) = \bar{\lambda} B(x, y) \tag{11}$$

Na tem mestu se podobnost z dokazom izreka 2 konča in začnejo se težave. Iz aditivnosti funkcije B sicer sledi, da za vsako racionalno število r velja $B(rx, y) = rB(x, y)$ oziroma $B(x, ry) = rB(x, y)$, vendar od tod ne moremo dokazati, da velja isto za vsako realno število na tak način kot pri dokazu izreka 2, kjer smo si pomagali z zveznostjo, saj je formulacija izreka 1 povsem algebraična. Dokazovanja enakosti (11) se bomo torej lotili po drugi poti. Pri tem si bomo pomagali s pogojem

$$Q(\lambda x) = |\lambda|^2 Q(x) \tag{12}$$

in z lemo 2. Iz (12) dobimo

$$S(\lambda x, y) = |\lambda|^2 S\left(x, \frac{1}{\lambda} y\right) \tag{13}$$

in

$$B(\lambda x, y) = |\lambda|^2 B\left(x, \frac{1}{\lambda} y\right) \tag{14}$$

Dokažimo, da za vsak par $x, y \in X$ velja

$$B(ix, y) = iB(x, y) \tag{15}$$

Z upoštevanjem (13) dobimo

$$\begin{aligned} 4B(ix, y) &= S(ix, y) + iS(ix, iy) = S(x, -iy) + iS(x, y) = \\ &= i(S(x, y) - iS(x, -iy)) = i(S(x, y) + iS(x, iy)) = 4iB(x, y) \end{aligned}$$

Dokažimo, da je pri poljubnem paru $x, y \in X$ izpolnjeno

$$B(x, iy) = -iB(x, y) \tag{16}$$

Imamo $\begin{aligned} 4B(x, iy) &= S(x, iy) + iS(x, -y) = S(x, iy) - iS(x, y) = \\ &= -i(S(x, y) + iS(x, iy)) = -4iB(x, y) \end{aligned}$

Sedaj dokažimo, da funkcija

$$f(\lambda) = B(\lambda x, y) - B(x, \lambda y) \tag{17}$$

kjer sta x in y fiksna vektorja, zadošča pogojem leme 2. Ker je aditivnost te funkcije očitna — sledi namreč iz dejstva, da je funkcija B aditivna v obeh argumentih — moramo dokazati le še to, da je za vsak $\lambda \neq 0$ izpolnjeno $f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Če upoštevamo, da je $S(u, z) = S(z, u)$, to sledi iz $Q(u - z) = Q(z - u)$ (glej (4)), dobimo

$$\begin{aligned} 4f(\lambda) &= S(\lambda x, y) + iS(\lambda x, iy) - (S(x, \lambda y) + iS(x, i\lambda y)) = \\ &= S(\lambda x, y) + iS(\lambda x, iy) - (S(\lambda y, x) + iS(i\lambda y, x)) \end{aligned}$$

Z upoštevanjem (13) dobimo dalje

$$4f(\lambda) = |\lambda|^2 \left(S\left(x, \frac{1}{\lambda} y\right) + iS\left(x, i\frac{1}{\lambda} y\right)\right) - |\lambda|^2 \left(S\left(y, \frac{1}{\lambda} x\right) + iS\left(iy, \frac{1}{\lambda} x\right)\right) =$$

$$= 4|\lambda|^2 B\left(x, \frac{1}{\lambda} y\right) - 4|\lambda|^2 B\left(\frac{1}{\lambda} x, y\right) = -4|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Dokazali smo torej, da funkcija (17) zadošča vsem pogojem leme 2. Po lemi 2 je $f(t) = 0$ za vsako realno število t, kar ima za posledico

$$B(tx, y) = B(x, ty) \quad , \quad t \in \mathbf{R} \tag{18}$$

Če pišemo $\lambda = is$, kjer je s poljubno realno število, dobimo z upoštevanjem $f(is) = sf(i)$ naslednje

$$B(isx, y) - B(x, isy) = f(is) = sf(i) = s(B(ix, y) - B(x, iy))$$

Če v tej enačbi upoštevamo (15), (16) in (18), dobimo $2iB(sx, y) = 2isB(x, y)$ oziroma

$$B(sx, y) = sB(x, y) \tag{19}$$

Iz (15), (16), (18) in (19) dobimo končno (11). Dokaz izreka 1 je s tem končan.

Kako pa je s Halperinovim problemom v realnem vektorskem prostoru? Tudi na to vprašanje je odgovoril S. Kurepa, in sicer v članku [2]. Izkazalo se je, da je v tem primeru odgovor negativen. V realnem primeru obstajajo kvadratni funkcionali, ki jih ni mogoče reprezentirati z bilinearnimi funkcionali. Preden si ogledamo primer takšnega kvadratnega funkcionala, zapišimo definicijo bilinearnega oziroma kvadratnega funkcionala za realen vektorski prostor.

Naj bo torej X vektorski prostor nad obsegom realnih števil $\mathbf{R}$. Funkcija B: $X \times X \to \mathbf{R}$ je bilinearen funkcional, če je

$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1, y) + \mu_2 B(x_2, y) \quad , \quad x_1, x_2, y \in X, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$$
$$B(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 B(x, y_1) + \mu_2 B(x, y_2) \quad , \quad x, y_1, y_2 \in X, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}$$

Funkcija Q: $X \to \mathbf{R}$, ki ima lastnosti

$$Q(x + y) + Q(x - y) = 2Q(x) + 2Q(y)$$
$$Q(tx) = t^2 Q(x)$$

pri čemer je t poljubno realno število, x in y pa poljubna vektorja, je kvadraten funkcional.

Oglejmo si sedaj primer kvadratnega funkcionala, ki ga ni mogoče reprezentirati z bilinearnim funkcionalom. Naj bo $\{e_1, e_2\}$ baza realnega dvodimenzionalnega vektorskega prostora X. Vzemimo aditivno funkcijo f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ z lastnostjo $f \neq 0$, $f(xy) = xf(y) + yf(x)$, $x, y \in \mathbf{R}$. (Dokaz eksistence takšnih funkcij po S. Kurepi sledi iz poglavja o derivacijah v knjigi [6]). Ni se težko prepričati, da je z

$$Q(t_1 e_1 + t_2 e_2) = f(t_1) t_2 - t_1 f(t_2), \quad , \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

definiran kvadraten funkcional na prostoru. X.

Denimo, da obstaja bilinearen funkcional B tako, da je za vsak $x \in X$ izpolnjeno

$$Q(x) = B(x, x)$$

Brž ugotovimo, da je

$$Q(e_1 + e_2) = Q(e_1 - e_2) = 0 \tag{20}$$

Za vsak par $x, y \in X$ velja

$$B(x, y) + B(y, x) = \tfrac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x - y)) \tag{21}$$

Iz (20) in (21) sledi

$$B(e_1, e_2) + B(e_2, e_1) = 0 \tag{22}$$

Naj bo t poljubno realno število. Če v (21) vstavimo $x = te_1$, $y = e_2$, dobimo

$$B(te_1, e_2) + B(e_2, te_1) = \tfrac{1}{2}(Q(te_1 + e_2) - Q(te_1 - e_2))$$

Od tod sledi

$$tB(e_1, e_2) + tB(e_2, e_1) = f(t)$$

Z upoštevanjem (22) dobimo $f(t) = 0$ za vsako realno število t, kar je v nasprotju s privzetkom $f \neq 0$.

Za konec zapišimo še naslednji rezultat, ki govori o kvadratnih funkcionalih na realnih normiranih prostorih.

IZREK 3 *Naj bo Q kvadraten funkcional na realnem normiranem prostoru $(X, \|.\|)$. Če je funkcional Q zvezen glede na normo $\|.\|$, potem je z relacijo $B(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y))$ definiran bilinearen funkcional, pri čemer je za vsak $x \in X$ izpolnjeno $Q(x) = B(x, x)$.*

Dokaz izreka 3 skoraj popolnoma sovpada z dokazom Jordan-Neumannovega izreka (izrek 2), zato ga opuščamo.

LITERATURA

[1] P. Jordan, J. v. Neumann, *On inner products in linear metric spaces,* Ann. Math. (II S.) **36** (1935) 719—723.

[2] S. Kurepa, *The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces,* Glasnik matematičko-fizički i astronomski **19** (1964) 23—35.

[3] S. Kurepa, *Quadratic and sesquilinear functionals,* Glasnik matematičko-fizički i astronomski **20** (1965) 79—92.

[4] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza,* Zagreb 1981.

[5] P. Vrbova, *Quadratic functionals and bilinear forms,* Časopis pro pestovani matematiky **98** (1973) 159—161.

[6] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra,* van Nostrand Comp. Inc., New York 1958.

OBVESTILO

Na podlagi Pravil o podeljevanju priznanja učitelejem matematike, fizike in astronomije za delo z mladimi, ki so bila objavljena v Obzorniku mat. fiz. **21** (1974) 160

v a b i m o

podružnice DMFA, aktive matematikov in fizikov na šolah, da do 15. septembra 1983 predlagajo kandidate za delo z mladimi.

Predloge z utemeljitvami pošljite na naslov: DMFA SRS, Komisija za pedagoško dejavnost, 61111 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 6.

Martina Koman

MISLI OB DIEUDONNEJEVEM ČLANKU

Pred kratkim je v Notices of the American mathematical society 29, str. 618—623 (1982) izšel članek znanega francoskega matematika J. Dieudonneja: Bourbakijevo delo v zadnjih tridesetih letih. Avtor opisuje nastanek Bourbakija, ali točneje, zbirke knjig z naslovom Osnove matematike izpod peresa kolektiva avtorjev pod psevdonimom Bourbaki; nato opiše značilnosti tega dela, odmeve nanj in končno Bourbakijev razvoj. Ob branju članka sem si priklical nekaj misli o vlogi matematične logike v matematiki in pri pouku matematike na nižji stopnji in pomisleke o »novi matematiki«.

V zadnjih desetih letih (ali celo nekaj prej) smo dobili učbenike, ki uvajajo v osnovno šolo osnove teorije množic, nekateri matematiki (glej npr. prispevke I. Hafnerja v OMF) pa premišljajo celo o možnosti uvedbe osnov matematične logike na nivoje pod univerzitetnim študijem. Mnenje nekaterih mojih kolegov pa tudi moje je, da teorija množic in osnove matematične logike ne sodijo v osnovno šolo. Teorija množic postane koristna šele na višjem nivoju znanja matematike; vse, kar moremo učenca naučiti v osmih letih osnovne šole, moremo zrelejšemu študentu povedati bolj korektno v nekaj (2—4) urah. Matematična logika je nedvomno enakopravno pomembna veja matematike, vendar je za matematika, ki se z njo ne ukvarja, verjetno nepotrebna. Naj v podkrepitev teh mnenj citiram Dieudonneja.

»Sem moremo vključiti kratko obrobno razpravo o Bourbakijevem odnosu do problema »osnov«:[1] najbolje ga opišemo kot: popolna ravnodušnost. Bourbaki ima za najpomembnejše *sporazumevanje* med matematiki, osebna filozofska pojmovanja so zanj nebistvena. Zato Bourbaki ni nikoli skušal javno povedati svojega mnenja o tem, kakšen pomen naj bi pripisali matematiki in njeni povezavi s stvarnim svetom. Vsakomur pušča svobodo do lastnih pogledov, dokler se v matematičnih *spisih* drži priznanih logičnih pravil, tj. tistih iz Zermelo-Fraenklove teorije.«

V zadnjem razdelku članka avtor dopolni citat:

»Opisal sem že Bourbakijev odnos do matematične logike in teorije množic, ki je, vključiti ju (v knjige »osnove matematike«, op. A. S.) čim manj, namreč le toliko, kolikor je absolutno potrebno za dokaz izrekov, ki jih ima Bourbaki za pomembne. Od leta 1950 je logika zelo napredovala, a po Bourbakijevem mnenju matematikom ni prinesla dovolj novega orodja, da bi bilo treba prej opisani odnos do nje spremeniti. Mogoče je, da bo v prihodnosti sedanja rast nestandardne analize in podobnih uporab matematične logike prinesla osupljiva odkritja; doslej se to še ni zgodilo. ‚Čakaj in opazuj' prevladuje.«

Morda moram posebej poudariti, videlo pa se bo iz naslednjega citata, da Bourbakijev traktat ni mišljen kot učbenik za študente matematike ali celo učence nižjih stopenj. To so osnove matematike, ki dajejo orodje aktivnemu matematiku, raziskovalcu. Kljub temu so se nedvomno mnogi pisci matematičnih učbenikov zgledovali pri Bourbakiju, saj lepa zgradba osnov matema-

[1] Pod »osnove« je treba tu razumeti matematično logiko in teorijo množic. A. S.

tike, matematične strukture matematika prevzame in navduši za ta način obravnave snovi. To pa je dobro verjetno za tiste, ki so v matematiki že precej doma. Dieudonne dokaj ostro kritizira uporabo Bourbakijevih idej pri pouku matematike na nižjih stopnjah:

»Končno bom skušal odgovoriti na kritike, ki v resnici ne lete na Bourbakija, temveč na način, kako se včasih njegov traktat uporablja. Najpreprostejši odgovor je seveda, da ni mogoče klicati na odgovor avtorja, če se nekateri ljudje sklicujejo na njegova dela, ko so že objavljena, zato, da bi opravičili teorije ali dejanja, ki jih avtor niti ni imel v mislih niti jih ni predvideval. Naj bom kljub temu konkreten: ena od stvari, ki jih očitajo Bourbakiju je, da je on kriv, da v pouk elementarne matematike uvajajo abstraktne in nasploh neuporabne pojme (na tej stopnji), to, kar včasih imenujemo »nova matematika«. Naj vas spomnim, da je namen Bourbakijevega traktata oskrbeti orodje »aktivnemu matematiku«, tj. tistemu, ki se ukvarja z raziskovanjem. Zato nima nobenega opravka s poukom matematike na stopnjah, nižjih od podiplomskega študija matematike na večjih univerzah. Bourbaki sploh ne govori o tem, ali je možno, ali priporočljivo uvajati koncepte iz njegovega traktata na nižjih stopnjah, prav gotovo ne v osnovni šoli. Zagovorniki takih popačenj so navadno ljudje, katerih poznavanje današnje matematike je milo rečeno pičlo.«

Podpisani se ne čutim kvalificiranega za to, da bi dajal nasvete za sestavljanje učnih načrtov in pisanje učbenikov za osnovne in srednje šole — najmanj iz dveh razlogov: nikoli nisem poučeval na takih šolah pa tudi Dieudonnejev zadnji stavek v citatu me more oplaziti. Seveda pa imam mnenje o teh stvareh. Pri branju Dieudonnejevega članka sem začutil resonanco s svojim mnenjem, zato sem odlomke prevedel. Predvsem z namenom vzpodbuditi bralce Obzornika, da bi kaj napravili za to, da bi se kmalu kaj spremenilo v duhu in vsebini snovi, ki se poučuje pri matematiki v osnovni in srednji šoli. Trdno upam, da se bodo umirila prizadevanja, ki so opazna v sedanjih učbenikih, začenši v tistih za osnovno šolo.

Anton Suhadolc

NOVE KNJIGE

VILENKIN N. J., Metoda sukcesivnih aproksimacija / Metod posledovateljnih približenii. — Zagreb : Školska knjiga, 1980. — 112 str.

Osnovno vodilo knjige povzamemo kar po avtorjevih besedah: približno reševanje enačb v srednji šoli je vse preveč zapostavljeno. Zato že iskanje korenov preproste transcedentalne enačbe pogosto povzroča težave tudi še v višji šoli. Knjiga je tako elementarna izpeljava osnovnih iterativnih algoritmov: direktna iteracija, sekantna metoda, regula falsi in Newtonova metoda. Iterativni postopki so osvetljeni z mnogimi zgledi, ki številčno in geometrijsko ponazarjajo konvergenco procesov. Avtor predpostavlja malo predznanja, zahtevnejše pojme kot odvod ali razdaljo si izpelje kar sam. Zato je knjiga primerna kot zanimivo dopolnilno branje že v prvih letih srednje šole.

Jernej Kozak

ŠOLSKI ELEKTRIČNI MERILNIKI

Program Iskre od vsega začetka vsebuje tudi električne merilnike z neposrednim delovanjem. Že v letu 1946 smo izdelali prve merilnike na vrtljivo železo za vgradnjo. Izbor merilnikov se je nato širil na merilnike z vrtljivo tuljavico in univerzalne merilnike. Ker zaradi hitrega naraščanja potreb po univerzalnih merilnikih lastni razvoj ni več zadoščal, smo po kooperacijski pogodbi začeli sodelovati s podjetjem Goerz z Dunaja. Tako smo izdelovali univerzalne merilnike na profesionalni ravni, ki pa so bili za širok krog porabnikov predragi.

Pri cenenih univerzalnih merilnikih so bili v Evropi na prvem mestu Italijani. Navezali smo stike s podjetjem ICE iz Milana in po njegovem univerzalnem merilniku razvili svoj merilnik, ki je v nasprotju z vzornikom ustrezal varnostnim in kakovostnim predpisom DIN in IEC.

S pridobljenimi izkušnjami smo razvili popolnoma nov univerzalni merilnik, ki je bil izviren po zasnovi in merilno-tehničnih lastnostih. Ta merilnik (US 7 A) z merilnim ojačevalnikom je po naročilu razvila Fakulteta za elektrotehniko v Ljubljani. Ponudba merilnikov Iskre je bila tako že dovolj zaokrožena in kakovost primerna tudi za izvoz na zahodnoevropski trg. Tu smo se srečali s podjetjem Phywe iz Göttingena, ki ima v svojem programu širok

Sl. 1. V dobro opremljenem laboratoriju pogosto rabimo na vsakem delovnem mestu vsaj dva merilnika: voltmeter in ampermeter. Univerzalni merilnik lahko uporabimo namesto enega ali drugega, hkrati pa uporabljamo še voltmeter ali ampermeter kot drugi merilnik pri poskusih

izbor sistemov, zbirk in opreme za eksperimentiranje in delo in obvladuje tudi znaten del evropskega in svetovnega trga. Z njim smo se dogovorili za sodelovanje pri šolskih električnih merilnikih, prilagojenih za uporabo pri pouku in vajah iz naravoslovja in tehnike.

Oglejmo si zahteve za šolske električne merilnike. Ena od najpomembnejših zahtev pri tovrstnih merilnikih je učinkovita električna zaščita. Vsi merilni dosegi naj bi bili tako zavarovani, da se merilnik ne poškoduje, če ga priključimo na omrežno izmenično napetost (220 V). Edina dotlej znana rešitev je bil poseben avtomat, ki ga je izdelovalo podjetje Goerz za svoje profesionalne univerzalne merilnike, a je bil za šolske namene predrag.

Razvoj polprevodniške tehnike je privedel do močnostnih usmerniških diod z odličnimi karakteristikami v zaporni smeri. Izdelali smo zaščito iz kombinacije takih diod in talilnega vložka, ki popolno zaščiti vse tokovne dosege merilnika. Tako je merilnik na najnižjih tokovnih dosegih brez škode prestal tudi desettisočkratno preobremenitev. Nerešena je ostala še zaščita

Sl. 2. Univerzalni električni merilnik za učence (07021.01) je najbolj priročen za učenčeve vaje pri pouku fizike v osnovni in srednji šoli. Ravnanje z merilnikom je zelo preprosto in ne povzroča posebnih težav pri odčitavanju, saj ima samo eno logaritemsko skalo od 0 do 6 (60 razdelkov)

Sl. 3. Univerzalni električni merilnik z zaščito pred obremenitvami (07026.00) je podoben univerzalnemu laboratorijskemu merilniku, zaradi rabe na šolah pa je učinkoviteje zaščiten

nizkih napetostnih dosegov in dosegov za merjenje upora. Dodati je bilo treba še en talilni vložek in silicijeve diode za zaščito merilnega sistema. Treba pa je bilo zaščititi tudi nekatere upornike, ki morajo biti nasploh tako izbrani, da se jim upor pri predvidenih obremenitvah ne spremeni.

V primerjavi z univerzalnimi merilniki za servise, laboratorije in za splošno rabo imajo šolski merilniki še druge posebnosti, npr. nizke napetostne padce, da lahko pri računanju zanemarimo napako zaradi merilnika. Še ena posebna zahteva nastopa pri nekaterih merilnikih: odklon naj bi bil pri merjenju enosmerne in izmenične napetosti podoben. Če ne bi bilo tako, bi merilnik na izmeničnih dosegih ne pokazal nobenega odklona, ko bi bila priključena enosmerna napetost. Učenec s pomanjkljivimi izkušnjami bi napetost na izviru povečal, misleč, da je nekaj narobe z izvirom, in bi lahko poškodoval elemente preskušanega vezja ali merilnika. Merilnik mora torej pokazati odklon tudi v tem primeru, vendar le do ene desetine prave vrednosti, tako da pokazane vrednosti ne moremo zamenjati s pričakovano pravo vrednostjo.

Glede na neizkušenost uporabnikov moramo posvetiti posebno pozornost skalam. Biti jih mora čim manj, kar pomeni, da se morajo dobro prekrivati skale za različne dosege.

Sl. 4. Voltmeter (07035.00) pogosto uporabljamo kot drugi merilnik pri poskusih. Z njim lahko merimo enosmerne in izmenične napetosti do 300 V

Sl. 5. Tudi ampermeter (07036.00) je lahko drugi merilnik pri poskusih. Z njim lahko merimo enosmerne in izmenične tokove do 3 A

Preglednica tehničnih in didaktičnih podatkov za šolske električne merilnike

Podatki / Merilnik	VAM 07021.01	VAΩM 07026.00	VM 07035.00	AM 07036.00	VM 07037.00	AM 07038.00	GM 07039.00	μAM 07057.00
Skala								
— vrsta skale	logaritemska	linearna	linearna	linearna	linearna	linearna	linearna	linearna
— razpon skale	0—6	0—30 in 0—100	0—30 in 0—100	0—30 in 0—100	0—5 in 0—15	0—1 in 0—5	3,5—0—3,5	0—150
— število delcev	60	30 in 100	30 in 50	30 in 50	50 in 15	50 in 50	70	30
— podložena z zrcalom	da	da	—	—	da	da	da	da
Razred točnosti	1,5 ⎓ in 2,5 ~	1,5 ⎓ in 2,5 ~	2,5	2,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Merilna območja								
— I ⎓	120 μA—6000 mA	100 μA—10 A		1—300 mA 1 in 3 A		1; 5 A	3,5—0—3,5 mA	150 μA
— I ~	6—6000 mA	1 μA—10 A		1—300 mA 1 in 3 A				
— U ⎓	0,6—600 V	100 mV—1000 V	0,3—300 V		5 in 15 V			
— U ~	6—600 V	1—1000 V	10—300 V					
— R		20, 200 in 2000 kΩ						
— ojačitev, oslabitev		—10 . . . +20 dB						
Specifični notranji upor (za VM)	10 kΩ/V ⎓ 4 kΩ/V ~	12 kΩ/V ⎓ 4 kΩ/V ~	30 kΩ/V ⎓ 10 kΩ/V ~	—	1 kΩ/V	—	10 Ω	1,8 kΩ
Padec napetosti (za AM)	135—500 mV	—	300 mV	300 mV	—	≦ 200 mV	—	—
Frekvenčno področje	20 Hz—10 kHz	15 Hz—11 kHz	15 Hz—10 kHz	—	—	—	—	—
Število enopolnih vtičnic	3	3	2	2	3	3	2	2
Število preklopnikov	1	2	1	1	—	—	—	—
Zaščita								
— velik notranji upor	da	da	da	—	da	—	—	—
— zaščita inštrumenta (močnostni Si diodi)	da	da	—	da	—	—	—	—
— zaščita merilnega sistema (Si diodi)	da	da	da	da	da	da	da	da
— varovalka (taljivi uložek)	6,3 A	10 A in 32 mA	—	6,3 A	—	6,3 A	0,63 A	6,3 A
Preskusna napetost	2 kV	3 kV	2 kV	2 kV	2 kV	2 kV	2 kV	2 kV
Lega	vodoravna	vodoravna	vodoravna	vodoravna	vodoravna (pokončna)	vodoravna (pokončna)	vodoravna (pokončna)	vodoravna (pokončna)
Posebnosti	samo ena skala za vsa območja	za merjenje upora sta potrebna g. čl. za 1,5 V		razširitev tokovnih območij na 10, 30 in 100 A				
Uporaba	vaje učencev — naravoslovje in tehnika (prvi in osnovni merilnik)	vaje učencev — tehnika	vaje učencev (drugi merilnik)	vaje učencev (drugi merilnik)	— vaje učencev in poskusi učitelja — visokošolski praktikum	— vaje učencev in poskusi učitelja — visokošolski praktikum	— vaje učencev in poskusi učitelja — visokošolski praktikum	— vaje učencev in poskusi učitelja — visokošolski praktikum

Značilnost šolskih električnih merilnikov

Vsi instrumenti so v okrovu iz plastične snovi, ki ima priročno velikost (100 mm krat 165 mm krat 55 mm), tako da je skala dolga 78 mm. Vsi uporabljajo vrtljivo tuljavo z valjastim magnetom. Tehnične podatke za posamezne merilnike kaže preglednica.

Univerzalni električni merilnik za učence z zaščito pred preobremenitvami (07021.01) ima merilne dosege v razmerju 1 : 10. To omogoča eno samo skalo za vse dosege, zato mora biti vgrajen merilni transformator. Za boljšo točnost v prvi tretjini skale (končni odklon na nižjem dosegu je le desetina naslednjega dosega) je skala približno logaritmična, torej v začetnem delu razširjena, v končnem pa stisnjena. Merilnik ima ločeni vtičnici za merjenje tokov in merjenje napetosti. Vezava merilnika je izvedena, tako da pri priključitvi za merjenje napetosti na tokovni enopolni vtičnici pregori varovalka, pri priključitvi za merjenje toka na napetostni enopolni vtičnici pa merilnik meri le napetost izvira. Vsi instrumenti so v tovarni kontrolirani glede na vpliv frekvence, tako da napaka na vsem območju ne preseže 2,5 %.

Sl. 6. Voltmeter (07037.00) ima dve območji za merjenje enosmerne napetosti do 5 V in do 15 V. Narejen je tako, da ga lahko postavimo pokonci in uporabimo kot demonstracijski merilnik

Sl. 7. Ampermeter (07038.00) ima dve območji za merjenje enosmernih tokov od 1 A do 5 A. Merilnik lahko postavimo pokonci in ga uporabimo kot demonstracijski merilnik

Univerzalni električni merilnik z zaščito pred preobremenitvami (07026.00) ima merilne dosege v razmerju 1 : $10^{1/2}$, ker je to najugodnejše razmerje za merjenje ojačenja ali slabljenja v decibelih (dB). Prav tako ima tudi dosege za merjenje upora in se v tem pogledu ne razlikuje od običajnih univerzalnih merilnikov. Tudi pri tem merilniku je pomembna zaščita, ker je namenjen za rabo v šoli. Zaradi uporovnih dosegov je uveden še dodatni talilni vložek. Prednost instrumenta je tudi v tem da ima direktni doseg za 10 A enosmernega in izmeničnega toka in da ostane vpliv frekvence tudi na tem dosegu v predpisanih mejah.

Kljub univerzalnosti in kar 43 merilnim dosegom ima merilnik samo štiri različne skale in potrebuje samo dekadne pretvornike. Tako ostaja skala še vedno pregledna. Prav zato je merilnik zelo primeren za vaje pri tehnični vzgoji, elektrotehniki in fiziki.

Voltmeter 0,3 ... 300 V⎓, 10 ... 300 V ∼ (07035.00) je namenjen samo za merjenje enosmernih in izmeničnih napetosti. Preduporniki so izbrani tako, da zdržijo izmenično napetost 220 V tudi najnižji dosegi. Notranji upor merilnika je zelo velik, kar omogoča točne meritve v polprevodniških električnih krogih.

Sl. 8. Galvanometer (07039.00) ima kazalec na sredini in lahko meri enosmerne tokove do 3,5 mA. Merilnik lahko postavimo pokonci in ga uporabimo kot demonstracijski galvanometer

Sl. 9. Mikroampermeter (07057.00) ima eno območje za merjenje enosmernih tokov do 150 μA. Merilnik lahko postavimo pokonci in ga uporabimo kot demonstracijski merilnik

Ampermeter 1 mA ... 3 A ≃ (07036.00) je namenjen samo za merjenje enosmernih in izmeničnih tokov. Vgrajene zaščitne diode in talilni vložek ga popolnoma varujejo.

Voltmeter 5/15 V ⎓ (07037.00) je namenjen za merjenje malih enosmernih napetosti. Primeren je predvsem za vaje učencev, pri katerih je treba meriti ali nadzirati napetost galvanskega člena, baterije ali pa izhodne napetosti malonapetostnega izvira.

Ampertemer 1/5 A ⎓ (07038.00) je namenjen za merjenje enosmernih tokov. Primeren je predvsem za šolske vaje, pri katerih je treba meriti ali nadzirati enosmerne tokove pri priključitvi električnega kroga na galvanski člen, baterijo ali malonapetostni izvir.

Galvanometer 3,5 ... 0 ... 3,5 mA ⎓ (07039.00) je namenjen za merjenje majhnih enosmernih tokov pri vajah učencev. Ker ima merilnik ničlo na sredi skale, ga uporabljamo pri poskusih z nično metodo, npr. pri Wheatstonovem mostiču, ali pri poskusih z indukcijo.

Mikroampermeter 150 μA ⎓ (07057.00) je namenjen za merjenje majhnih enosmernih tokov pri poskusih in vajah iz naravoslovja in tehnike.

Tomaž Skulj in *Anton Štular*

NOVE KNJIGE

ŠPORER Z., Matematičke formule i njihova primjena. Zagreb, Školska knjiga, 1980.

Zbirka matematičnih formul je sijajna zlepljenka. Žal je neuravnovešena. Nekatera poglavja so preveč zgoščena in zapisana brez pojasnil. Praktiki, ki dovolj dobro obvladajo matematiko, iz spomina pa jim je ušla kaka formula, jo bodo s pridom uporabljali. Razveseljivo je, da skoraj vsaki formuli sledi zgled. Ti so dobro izbrani in lahko iz njih izluščimo nekaj osnovnih prijemov in receptov računanja.

Za vsebino omenimo le to, da so zbrane skoraj vse matematične formule, ki jih uporabljajo nematematiki v praksi. Dodane so osnovne formule iz fizike in nekatere matematične tablice, ki pa v novejšem času zgubljajo svoj pomen.

Andrej Kmet

NOVE KNJIGE

Optoelectronics in Engineering : Proceedings of the 5th International Congress / Edited by Wilhelm Waidelich. — Berlin : Springer, 1982. — 580 str.

V knjigi so objavljeni prispevki udeležencev konference, ki je vsako drugo leto v Münchnu. Podala naj bi pregled dosežkov v optoelektroniki, ki je v zadnjih letih doživela nesluten razmah. Prispevkov je 96, razdeljeni pa so po naslednjih področjih: laserski sistemi, laserska spektroskopija in laserska kemija, laserji v obdelavi materialov, laserji v merilni tehniki za okolje, laserji in optoelektronika v vesoljski tehniki, optoelektronske komponente, optoelektronsko prenašanje signalov, optoelektronsko zaznavanje slike, optoelektronski zapis slike in podatkov, optoelektronska obdelava slike, optoelektronska sončna tehnika. Kratki prispevki so predvsem poročila o raziskovalnem in razvojnem delu in so tako koristni predvsem strokovnjakom. Nekaj prispevkov pa podaja pregled stanja na nekaterih področjih in so tako zanimivi tudi za širši krog bralcev, ki jih zanima industrijska uporaba optoelektronike. 43 prispevkov je v nemščini.

Martin Čopič

RELAXATION OF ELEMENTARY EXCITATIONS: (Proceedings of the Taniguchi International Symposium, Susono-shi, Japan, Okt. 1979) / Uredila R. Kubo in E. Hanamura. — (Springer Series in Solid-State Sciences Vol. 18).

Zbornik predavanj s srečanja o relaksaciji elementarnih ekscitacij vsebuje prispevke, ki opisujejo relaksacijske pojave v izolatorjih, polprevodnikih, plinih in celo bioloških sistemih.

Večje število prispevkov je posvečeno multifononski relaksaciji elektronskih in ekscitonskih stanj ter njenemu vplivu na ramansko sipanje in luminiscenco v trdni snovi. Prikazane so možnosti za študij teh relaksacijskih procesov preko nelinearnih optičnih pojavov. Krajši prispevek je posvečen termodinamiki močno neravnovesnih optičnih sistemov. Sledi prikaz vpliva relaksacije na optične lastnosti makromolekul in bioloških sistemov s posebnim poudarkom na fotosintezi. Na koncu so opisani še multifononski procesi in pojav fotodissociacije v molekularnih sistemih.

Čeprav skuša zbornik prikazati sorodnost relaksacijskih pojavov v različnih sistemih, so posamezni prispevki namenjeni predvsem strokovnjakom z ustreznih področij.

Slobodan Žumer

PALMAN D., Projiciranja i metode nacrtne geometrije. — Zagreb: Školska knjiga, 1982. — 213 str.

Pred seboj imamo poglobljeno razlago osnov opisne geometrije. V uvodnem delu se seznanimo z geometrijskimi elementi, z dvorazmerjem in z različnimi transformacijami ravnine. Nato spoznamo vzporedno in Mongeovo projekcijo, središčno projekcijo in perspektivo. Sledi vpeljava splošne dvorisne projekcije in njenih posebnih primerov. Zadnje poglavje govori o ciklografski projekciji.

Vsaka projekcijska metoda je vpeljana z matematično strogostjo, podrobno so dokazane njene lastnosti, razložen je njen pomen in uporabnost. Pokazana je možnost rekonstrukcije geometrijskega objekta iz njegovih projekcij. — Z uporabo ciklografske projekcije je podrobno rešenih več konstrukcijskih problemov, kakršen je npr. Apolonijev: narisati krožnico, ki se dotika treh danih krožnic.

Knjiga s 174 dobro izbranimi slikami je namenjena bralcu, ki pozna poleg evklidske geometrije še nekaj opisne geometrije, pa bi rad čim bolje razumel njene matematične osnove.

Janez Rakovec

NOVE KNJIGE

DUGUNDJI J., Granas A., Fixed point theory, Volume 1. — Warszawa : Polish Scientific Publishers, 1982. — 209 str. — (Monografie matematijezne ; 61).

Med številnimi članki in knjigami, ki so izšli v zadnjem času in obravnavajo teorijo negibnih točk, zasluži monografija J. Dugundjija in A. Granasa posebno pozornost. Knjiga obsega tri zaključena poglavja. Prvo obravnava Banachov klasični izrek o kontrakciji in njegove številne uporabe. Osrednji temi drugega poglavja sta Borsukov izrek o antipodnih točkah in Brouwerjev izrek o negibni točki (zvezne preslikave diska vase) ter številne aplikacije v funkcionalni analizi. Zadnje poglavje je posvečeno homološkim metodam — izhodišče je seveda Lefschetz-Hopfov izrek o negibni točki.

Knjiga ne zahteva takorekoč nikakršnega predznanja, saj so v dodatku razložene osnove topologije in funkcionalne analize. Dokazi izrekov so praviloma elementarni in geometrijsko nazorni (vendar žal ponekod pogrešamo slike). Naštete so številne variacije izrekov in njihove uporabe v topologiji, funkcionalni analizi, teoriji diferencialnih enačb in še kje, ne manjka pa tudi nalog. Na koncu so dodane zgodovinske opombe, izčrpna bibliografija in kar trije indeksi.

Menimo, da bo knjiga posebej dobrodošla študentom, ki se želijo lotiti študija topologije ali funkcionalne analize.

Zlatan Magajna

DIMOVSKI I. H., Convolutional calculus. — Sofia : Bulg. acad. of sci. 1982. — 200 str.

Že zelo stara je ideja obravnavati operator odvajanja $D = \frac{d}{dx}$ formalno, algebrsko. Tak operatorski račun je zgradil že Heaviside. Reševanje sistema navadnih linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti prevedemo na reševanje algebrskih enačb, reševanje nekaterih parcialnih diferencialnih enačb pa na reševanje navadnih diferencialnih enačb. Seveda je treba primerno definirati simbole $1/D$, $1/(D-a)$, e^D itd.

Korektno osnovo operatorskemu računu je mogoče dati z Laplacejevo transformacijo. Druga možna osnova, ki da splošnejši operatorski račun, je Mikusinskijev operatorski račun. Ta zgradi teorijo na pojmu konvolucije

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

Avtor Dimovski si je postavil za cilj sistematično poiskati zelo splošne razrede konvolucijskih algeber in proučiti njihove lastnosti. Mikusinskijev operatorski račun je tesno povezan z operatorjem $\int_0^x$ in odvajanjem. Primeri operatorskih računov v knjigi so povezani z mnogo splošnejšimi integralskimi operatorji. Ti operatorski računi so seveda zelo koristni pri študiju parcialnih diferencialnih enačb, tudi takih, pri katerih dodatni pogoji za rešitev (robni, začetni) nimajo običajne oblike (vrednost funkcije in odvodov v nekaj točkah), ampak so splošni linearni funkcionali.

Anton Suhadolc

KRIVULJE, KI PREKRIVAJO KVADRAT

V knjižici Odseka za matematiko (Ljubljana, Jadranska 19) hranimo ameriški zvočni barvni film z naslovom *Space filling curves* (Krivulje, ki napolnijo prostor). Film daje manj, kot obeta naslov: krivulje, s katerimi nas seznani, prekrijejo le

kvadrat, torej del dvodimenzionalnega prostora s pozitivno ploščino. Slika vsake krivulje, ki poteka skozi sleherno točko kvadrata, je seveda ves kvadrat in ne nekakšna kriva črta, kar si običajno predstavljamo s pojmom krivulja. A iz kvadrata je nemogoče razbrati, kako poteka ta krivulja od točke do točke, torej nekaj, kar pri »običajnih« krivuljah sploh ni problem. Na vprašanje, ali obstaja tako nenavadna krivulja, ki prekrije kvadrat, oziroma, ali obstaja zvezna preslikava zaprtega intervala na kvadrat, je dal pritrdilni odgovor že leta 1890 *Guiseppe Peano.* Njegovi konstrukciji take krivulje manjka prav nazornost njenega poteka [3]. Tej pomanjkljivosti so se avtorji kasnejših konstrukcij [1], [2], [4] izognili z uporabo konvergentnih zaporedij krivulj. To je tudi pot, po kateri nas avtor filma N. L. Max vodi do takšnih krivulj.

Najprej nam pojasni, da krivulje s končno dolžino gotovo nimajo pozitivne ploščine, kar prikaže tako, da krivuljo s končno dolžino zaporedoma prekriva s čedalje ožjimi trakovi. Torej krivulja, ki prekrije kvadrat, nima končne dolžine. Zatem uvede nov pojem: *limitna krivulja* zaporedja krivulj. Le-ta nam je znan že iz srednje šole, kjer v krog včrtamo zaporedje primerno izbranih $3 \cdot 2^n$ kotnikov. Pravimo, da zaporedje krivulj določa limitno krivuljo, če vsaki točki prve krivulje pripada natančno določeno zaporedje točk z zaporednih krivulj, ki konvergira, in če vse tako dobljene limitne točke spet sestavljajo krivuljo. Ta definicija limitne krivulje je v filmu razen s krožnico ilustrirana še z zaporedjem krivulj, ki ima limitno krivuljo, imenovano »*snežinka*« (snowflake curve). Iz konstrukcije spoznamo, da je zaporedje dolžin teh krivulj geometrijsko s kvocientom 4/3, zato limitna krivulja nima končne dolžine. Tako v tem kot v naslednjih primerih nam film prikaže »pot« izbrane točke od začetne do limitne krivulje s pomočjo daljic, ki povezujejo zaporedne točke iz zaporedja točk, ki pripada izbrani točki. V filmu vidimo tudi »potovanje« večjega števila točk hkrati od začetne do limitne krivulje.

Po tem uvodu se avtor loti problema, kako s krivuljo prekriti kvadrat. Najprej nam ponudi preprost primer zaporedja krivulj, ki čedalje gosteje prepredajo kvadrat, vendar pa to zaporedje ne določa limitne krivulje. Sledita podrobno prikazana primera zaporedij krivulj, ki določata limitni krivulji, ki prekrijeta kvadrat. Prvi primer nam da rešitev, ki ni sklenjena krivulja, in je podoben prvim konstrukcijam [1], [2]. Drugi primer pa je zaporedje sklenjenih centralno-simetričnih krivulj, ki ga je leta 1912 objavil *W. Sierpiński* [4]. Film se konča s sprotnim povečanjem slik zaporednih krivulj Sierpińskega, kar nam pričara svojevrsten občutek o neskončnosti.

Odmik od matematične strogosti (osnovni pojmi, kot so krivulja, limita zaporedja krivulj, dolžina krivulje, ploščina ravninskega lika, ... niso definirani, dokazi so prepuščeni »nazornosti« filma, ...) in uporaba sodobnih sredstev (barvni film, risanje s pomočjo računalnika, ...) zagotavljata, da je film zanimiv tudi za gledalca, ki ni predan matematiki. Ob ogledu filma se ne naučimo le novih dejstev o krivuljah, temveč se tudi zavemo, da se v mnogih na videz jasnih in lahko razumljivih pojmih skriva še mnogo nenavadnega (pogosto pravimo »patološkega«, ker se ne sklada z našo predstavo). Zato ogled tega 25-minutnega filma toplo priporočam vsem, ki jih zanima matematika in njen včasih nenavadni svet. Vodstva šol in matematičnih krožkov si film lahko izposodijo v matematični knjižnici za predvajanje na šolah.

Gorazd Lešnjak

LITERATURA

[1] Gelbaum B. R., Olmsted J. M. H., Counterexamples in Analysis, Holden Day, San Francisco 1964.

[2] Hilbert D., Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. Math. Ann. **38** (1981) 459—460.

[3] Peano, G., Sur une courbe qui remplit toute une aire plaine, Math. Ann. **36** (1890) 157—160.

[4] Sierpiński, W., Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plaine, Bull. Acad. Sci. Cracovie, **5** (1912) 462—478.

Iskra SISTEMI IN OPREMA ZA IZOBRAŽEVANJE

ISKRA ZA AKTIVNEJŠI UK IN POUK

Iskra se s svojim programom vključuje v vzgojo in izobraževanje kot načrtovalec in proizvajalec učne tehnologije ter načrtovalec in izvajalec najsodobnejših metodično-didaktičnih projektov.

ISKRA proizvaja družino šolskih električnih merilnikov, ki so prilagojeni učenčevi rabi, saj so dobro zaščiteni pred preobremenitvami s talilnimi varovalkami, diodami in visokim notranjim uporom. Za poskuse učiteljev in eksperimentiranje učencev so na voljo univerzalni merilniki in posebni merilniki: dva voltmetra, dva ampermetra, mikroampermeter in galvanometer. Osnovna merilnika za vaje učencev pri začetnem pouku naravoslovja in tehnike sta univerzalni merilnik za učence (07021.01) in univerzalni merilnik, ki lahko meri tudi upor (07026.00).

ISKRA — Industrija merilno regulacijske
in stiskalne tehnike, Kranj, n. sol. o.,
DK Komerciala — Prodaja Ljubljana,
61000 Ljubljana, Trg revolucije 3,
tel.: (061) 213-213