

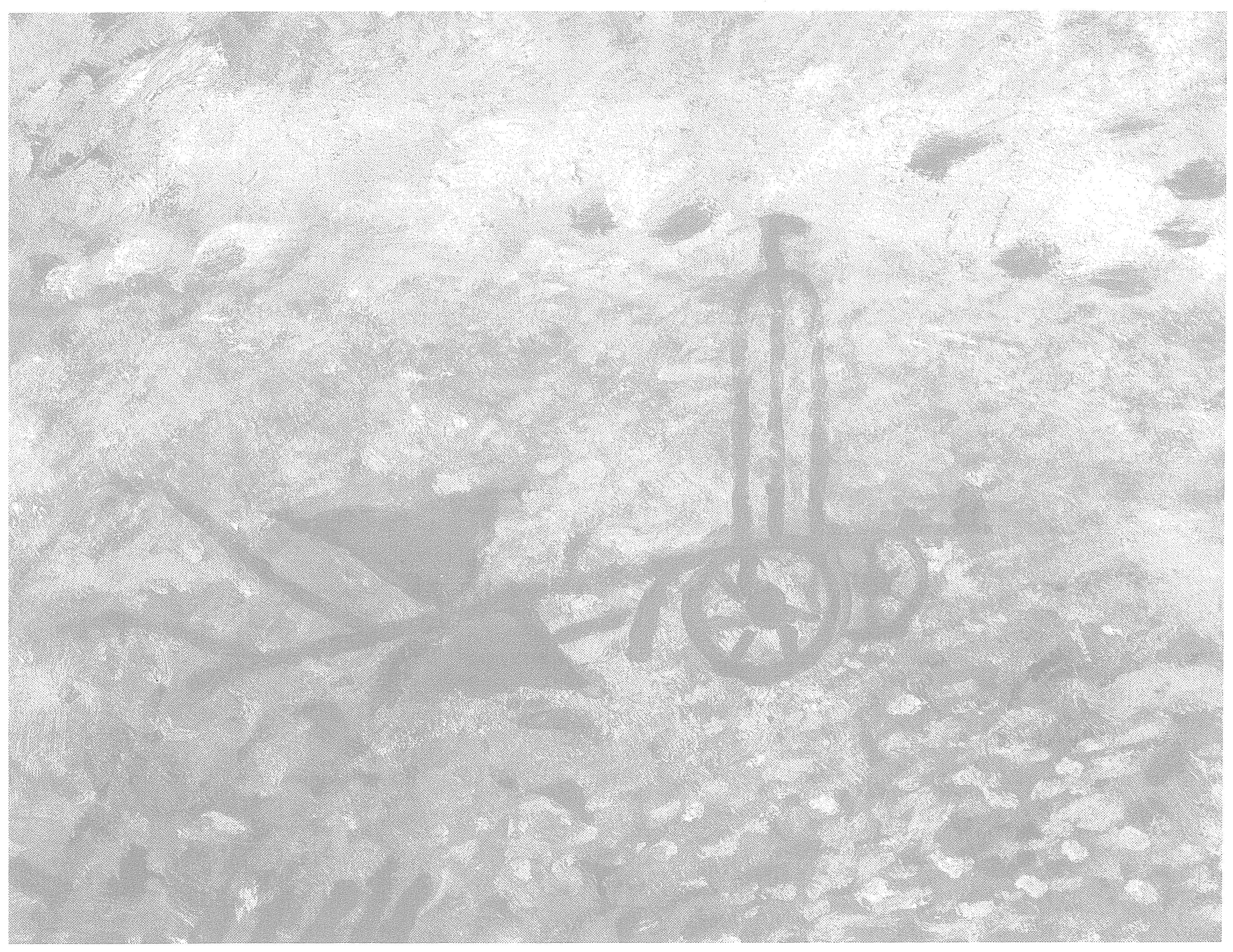


1996

Letnik 43

2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 1996

letnik 43, številka 2, strani 33–64

Glasiilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemaajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.600 SIT, za študente 1.150 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 440 SIT, stare številke 330 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1996 DMFA Slovenije – 1276

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

- Rešitve Riccatijeve algebrajske enačbe — The solutions of the Riccati algebraic equations (Mirko Dobovišek) 33–38
- Konstrukcija Mycielskega — Construction of Mycielski (Matej Mencinger) 39–46
- Povabilo v jordanski svet — An invitation to the Jordan world (Borut Zalar) 47–53
- Nenavadni interferenčni poskusi: Korak k Heisenbergovemu mikroskopu — Unusual interference experiments: A step toward the Heisenberg microscope (Janez Strnad) 54–59

Utrinek

- Diracov slavni rek o interferenci: foton ali dva? (Roy Glauber, izbral Janez Strnad) 60

- Nove knjige — New books** (Bor Plestenjak, Zvonimir Bohte) 61–62, 62

Vesti — News

- Fizika v šoli (Ivan Kuščer) 63–III
- Metki Luzar-Vlachy v slovo (Zvonko Trontelj) III–IV
- Novi člani Društva v letu 1995 (Andreja Šafarič) IV

Na ovitku: G. Braque, *Plug*, 1962.

REŠITVE RICCATIJEVE ALGEBRAJSKE ENAČBE

MIRKO DOBOVIŠEK

Math. Subj. Class.(1991) 15A24

V članku obravnavamo algebrajsko Riccatijevo enačbo v obsegu kompleksnih števil in v algebri $n \times n$ kompleksnih matrik. Dokažemo, da je množica rešitev v bijektivni korespondenci z neko množico delnih izometrij.

THE SOLUTIONS OF THE RICCATI ALGEBRAIC EQUATIONS

In the paper the solutions of the algebraic Riccati equation are discussed. It is shown that all the solutions are in one-to-one correspondence with the set of all partial isometries of a certain space.

Uvod

V sestavku si bomo ogledali rešitve algebrajske Riccatijeve enačbe

$$-x^*x + b^*x + x^*b + a = 0 \quad (0.1)$$

v obsegu kompleksnih števil in nato še v algebri $n \times n$ matrik. Z^* smo označili adjungiranje. Da bo enačba (0.1) sploh imela smisel, mora biti $a = a^*$.

Matrična Riccatijeva enačba se pojavi pri reševanju problemov optimalnega vodenja, filtriranja podatkov, vodenja stohastičnih procesov in pri dinamičnih igrah. Tu bomo obravnavali le najenostavnejše primere te enačbe.

Opomba: Enačba se pri uporabi zelo redko pojavi v obliki (0.1). Največkrat jo lahko prevedemo na enačbo oblike $XCX + B^*X + XB + A = 0$, kjer je C sebiadjungirana matrika. Matrika C običajno ni obrnljiva, mora pa biti v nekakšni zvezi z matriko B . Največkrat določa to zvezo vodljivost ali pa stabilizabilnost sistema, iz katerega izhajamo. Vpeljevanje teh pojmov bi nam vzelo preveč prostora. Reševanje pa je v obeh primerih zelo podobno in rezultati tudi. Radovednega bralca napotimo v [1], [4], [5], [6].

1. Skalarni primer

V prvem razdelku si oglejmo reševanje enačbe (0.1) v obsegu kompleksnih števil. Vsi rezultati so trivialni, vendar poučni za naprej. Enačbo lahko preoblikujemo v

$$(x - b)^*(x - b) = b^*b + a. \quad (1.1)$$

Ker je leva stran zgornje identitete nenegativno število, je potreben pogoj za rešljivost enačbe (0.1)

$$b^*b + a \geq 0. \quad (1.2)$$

Če je pogoj (1.2) izpolnjen, ima desna stran v (1.1) nenegativni kvadratni koren in dobimo $x - b = \sqrt{b^*b + a}$ oziroma $x = b + \sqrt{b^*b + a}$. S tem seveda nismo dobili vseh rešitev. Zveza (1.1) pove, da je $|x - b| = \sqrt{b^*b + a}$. Zato je $x - b = e^{-i\phi} \sqrt{b^*b + a}$ rešitev za vse $\phi \in \mathbb{R}$. Dokazali smo izrek:

Izrek 1.1. *Enačba (0.1) ima rešitev natanko tedaj, ko je $b^*b + a \geq 0$. Vse rešitve zapišemo kot $x = b + e^{-i\phi} \sqrt{b^*b + a}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Če je $b^*b + a > 0$, so rešitve za različne ϕ različne.*

Vprašajmo se, kako je z realnimi rešitvami enačbe (0.1). Najenostavnejši je primer, ko je $b \in \mathbb{R}$. Rešitev je realna, če je $e^{-i\phi}$ realno število. To je res za $\phi = 0$ in $\phi = \pi$. Dobimo $x_1 = b + \sqrt{b^2 + a}$ in $x_2 = b - \sqrt{b^2 + a}$. Rezultat je vsem dobro znan. Pred seboj imamo poseben primer formul za rešitev kvadratne enačbe z realnimi koeficienti. Če je diskriminanta $b^2 + a = 0$, je rešitev seveda ena sama.

Kaj pa, če b ni realno število. Rešitev x je realna, če je $x^* = x$. Torej, ko je

$$x = b + e^{-i\phi} \sqrt{b^*b + a} = b^* + e^{i\phi} \sqrt{b^*b + a} = x^*.$$

Od tod dobimo $b - b^* = (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \sqrt{b^*b + a}$, kar je $2 \operatorname{Im} b = 2 \sin \phi \sqrt{b^*b + a}$. Kot ϕ bomo lahko določili, če je

$$|\operatorname{Im} b| \leq \sqrt{b^*b + a}. \quad (1.3)$$

Če pišemo $b = b_1 + ib_2$, se (1.3) spremeni v

$$b_1^2 + a \geq 0. \quad (1.4)$$

Opomba: Pri realnem b je leva stran v (1.4) spet natanko diskriminanta enačbe (0.1). Funkcija sinus zavzame vsako vrednost na $(-1, 1)$ dvakrat, vrednosti -1 in 1 pa enkrat. Zato bo tudi naša enačba imela pri izpolnjenem pogoju (1.4) dve realni rešitvi, razen za $\operatorname{Im} b = \sqrt{b^*b + a}$ ali $\operatorname{Im} b = -\sqrt{b^*b + a}$. To pa je takrat, ko je $b_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + a$, to je $b_1^2 + a = 0$. Tako smo dokazali naslednji izrek.

Izrek 1.2. *Enačba (1.1) ima realno rešitev natanko tedaj, ko je*

$$(\operatorname{Re} b)^2 + a \geq 0.$$

Rešitvi sta dve, ko je $(\operatorname{Re} b)^2 + a > 0$ in ena, ko je $(\operatorname{Re} b)^2 + a = 0$.

To, da $\text{Im } b$ ne vpliva na realne rešitve, bi lahko videli že iz enačbe same. Za vsako realno število λ ima namreč enačba

$$-x^*x + (b + i\lambda)^*x + x^*(b + i\lambda) + a = 0 \quad (1.5)$$

iste realne rešitve kot enačba (0.1). Tudi koeficienti enačbe (1.5) morajo zadoščati pogoju (1.2). Tako dobimo:

Izrek 1.3. *Realne rešitve enačbe (0.1) obstajajo natanko tedaj, ko za vsako realno število λ velja*

$$(b + i\lambda)^*(b + i\lambda) + a \geq 0. \quad (1.6)$$

Opomba: Če za λ vstavimo $-\text{Im } b$, dobimo pogoj $b_1^2 + a \geq 0$, ki je že sam zadosten in potreben pogoj za obstoj realne rešitve. Pri matrični enačbi te poenostavitve pogoja (1.6) ne moremo narediti.

2. Enačba v algebri $n \times n$ matrik

Začnimo z oznakami. Velike črke bodo označevale $n \times n$ matrike, male črke vektorje in grške črke skalarje. Skalarni produkt vektorjev x in y iz \mathbb{C}^n bomo označili z $\langle x, y \rangle$. Nadalje bomo rekli, da je sebiadjungirana matrika C pozitivna, če je $\langle Cx, x \rangle \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{C}^n$. Če je za vse neničelne vektorje $x \in \mathbb{C}^n$, $\langle Cx, x \rangle > 0$, bomo rekli, da je C pozitivno definitna. Znano je, da so lastne vrednosti pozitivne matrike nenegativne in pozitivno definitne (strogo) pozitivne. Najprej dokažimo, da vedno obstaja pozitiven kvadratni koren pozitivne matrike. To je pravzaprav že prvi izrek o rešitvah kvadratne enačbe.

Izrek 2.1. *Če je C pozitivna matrika, obstaja taka pozitivna matrika D , da je $D^2 = C$.*

Dokaz: Ker je C sebiadjungirana matrika, obstajata unitarna matrika V in diagonalna matrika L , da je $C = VL V^*$. Ker je C pozitivna, na diagonalni matrike L pa so lastne vrednosti matrike C , lahko zapišemo

$$\sqrt{L} = \begin{bmatrix} +\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & +\sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & +\sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Matrika \sqrt{L} je očitno pozitivna in $\sqrt{L}\sqrt{L} = L$. Če za D vzamemo $D = V\sqrt{L}V^*$, dobimo pozitivno matriko, katere kvadrat je C .

Preden napišemo izrek, ki nam bo povedal, kdaj ima enačba

$$-X^*X + B^*X + X^*B + A = 0 \quad (2.1)$$

rešitev in klasificiral rešitve, obnovimo naslednje.

Vsaki matriki reda $n \times m$ s kompleksnimi elementi pripada linearna preslikava iz $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ in obratno. Matrika je odvisna od izbire baze v prvem in drugem prostoru. Preslikavo bomo označili kar z isto črko kot matriko, sliko preslikave A z $\text{im } A$ in jedro s $\ker A$.

Linearni preslikavi $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, za katero velja $U^*U = UU^* = I$, pravimo unitarna preslikava. Matrika, ki ji pripada, pa se imenuje unitarna matrika. Unitarna preslikava ohranja dolžine vseh vektorjev, kar nam pove naslednji kratek račun: $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^*Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Tako preslikavo imenujemo tudi izometrijo prostora \mathbb{C}^n . Pojem izometrije lahko definiramo tudi, kadar imamo opraviti s preslikavami iz enega unitarnega prostora v drugega. Tako rečemo, da je U izometrija iz unitarnega prostora X v unitarni prostor Y , če za vsak $x \in X$ velja $\|Ux\| = \|x\|$. Pojem izometrije moramo še nekoliko razširiti.

Definicija. Prostor X zapišimo kot ortogonalno vsoto $X = X_1 \oplus X_2$. Če za linearno preslikavo $Q : X \rightarrow Y$ velja $\|Qx\| = \|x\|$ za $x \in X_1$ in $Qx = 0$ za $x \in X_2$, imenujemo Q delna izometrija prostora X v prostor Y z začetnim prostorom X_1 .

Naj bo C preslikava unitarnega prostora X vase. Ker je $\langle C^*Cx, x \rangle = \langle Cx, Cx \rangle \geq 0$ za vse $x \in X$, je matrika C^*C pozitivna in po izreku 2.1 ji pripada pozitivni kvadratni koren. Označimo ga s $|C| = \sqrt{C^*C}$. Iz računa

$$\||C|x\|^2 = \langle |C|x, |C|x \rangle = \langle |C|^2x, x \rangle = \langle C^*Cx, x \rangle = \|Cx\|^2$$

vidimo, da je

$$\ker |C| = \ker C.$$

Za poljubno preslikavo unitarnega prostora velja $(\ker C)^\perp = \text{im } C^*$. Ker je $|C|$ sebiadjungirana, je $(\ker |C|)^\perp = \text{im } |C|$. Sledi

$$\text{im } |C| = \text{im } C^*.$$

Sedaj pa že lahko formuliramo izrek o polarni dekompoziciji.

Izrek 2.2. Naj bo C preslikava iz unitarnega prostora X vase. Potem obstaja delna izometrija Q prostora X vase, da je

$$C = Q|C|$$

in Q^*Q je ortogonalni projektor prostora X na $\text{im } |C|$.

Dokaz: Preslikavo Q definiramo na naslednji način. Za $y \in \text{im}|C|$ naj bo

$$Qy = Cx, \quad y = |C|x,$$

za $y \in \text{ker}|C| = \text{ker} C$, pa naj bo $Qy = 0$.

Ali je tako definirana preslikava sploh dobro definirana? Če ima C netrivialno jedro, lahko $y \in \text{im}|C|$ zapišemo kot sliko na več načinov. Pa naj bo $y = |C|x_1$ in $y = |C|x_2$. Razlika $x_1 - x_2$ je v $\text{ker}|C| = \text{ker} C$. Sledi $C(x_1 - x_2) = 0$ in zato $Cx_1 = Cx_2$. Preslikava je zato dobro definirana.

Za $y \in \text{im}|C|$, je $y = |C|x$ za neki $x \in X$ in

$$\begin{aligned} \|Qy\|^2 &= \langle Qy, Qy \rangle = \langle Cx, Cx \rangle = \langle C^*Cx, x \rangle = \langle |C|^2x, x \rangle = \\ &= \langle |C|x, |C|x \rangle = \| |C|x \|^2 = \|y\|^2. \end{aligned}$$

Preslikava Q je torej izometrija prostora $\text{im}|C|$ v X oziroma delna izometrija prostora X v prostor X z začetnim prostorom $\text{im}|C|$. Za vse $x \in X$ pa po definiciji preslikave Q velja $Q|C|x = Cx$.

Naj bo P ortogonalni projektor na $\text{im}|C|$, to je preslikava, ki je na podprostoru $\text{im}|C|$ identiteta, podprostor $(\text{im}|C|)^\perp = \text{ker}|C|$ pa preslika v 0. Vsak $x \in X$ lahko zapišemo kot $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \text{im}|C|$, $x_2 \in \text{ker}|C|$. Če upoštevamo definiciji preslikav P in Q , dobimo:

$$\langle Qx, Qx \rangle = \langle Qx_1, Qx_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle = \langle Px, Px \rangle = \langle Px, x \rangle.$$

Sledi

$$\langle (Q^*Q - P)x, x \rangle = 0 \quad \text{za vse } x \in X.$$

Ker je $Q^*Q - P$ sebiadjungiran, iz zgornjega sledi $Q^*Q - P = 0$. ■

Opomba. Podobno bi lahko dokazali, da je QQ^* projektor na $\text{im} Q$.

Vrnimo se sedaj k Riccatijevi enačbi. Enačbo (2.1) preoblikujmo kot v skalarnem primeru.

$$(X - B)^*(X - B) = B^*B + A. \quad (2.2)$$

Ker je leva stran pozitivna matrika, mora biti

$$B^*B + A \geq 0. \quad (2.3)$$

Matrika

$$X = B + \sqrt{B^*B + A}$$

je gotovo rešitev enačbe (2.1). Seveda pa je rešitev v splošnem več. Zapišimo sedaj izrek:

Izrek 2.3. *Potreben in zadosten pogoj za to, da ima enačba (2.1) vsaj eno rešitev, je*

$$B^*B + A \geq 0.$$

*Rešitev je natanko toliko, kot je delnih izometrij prostora \mathbb{C}^n v \mathbb{C}^n z začetnim prostorom $\text{Im}(B^*B + A)$. Vse rešitve so oblike*

$$X = B + Q\sqrt{B^*B + A}, \quad (2.4)$$

kjer je Q matrika, ki pripada delni izometriji.

Opomba. Če je $B^*B + A$ obrnljiva matrika, je U unitarna matrika. Rešitev je v tem primeru toliko, kolikor je unitarnih $n \times n$ matrik.

Dokaz: Naj bo X rešitev enačbe (2.1). Zveza (2.2) nam pove, da je

$$|X - B| = \sqrt{B^*B + A}.$$

Izrek o polarni dekompoziciji da obstoj take delne izometrije prostora \mathbb{C}^n z začetnim prostorom $\text{im} \sqrt{B^*B + A} = \text{im}(B^*B + A)$, da velja

$$X - B = Q\sqrt{B^*B + A}.$$

Če je X oblike $X = B + Q\sqrt{B^*B + A}$, kjer je Q delna izometrija z začetnim prostorom $\text{im}(B^*B + A)$, nam kratek račun pove, da je tak X rešitev. Pri tem moramo upoštevati, da deluje Q^*Q na $\text{im} \sqrt{B^*B + A}$ kot identiteta.

Ker je $\sqrt{B^*B + A}$ na svoji zalogi obrnljiva preslikava, je prireditev med delnimi izometrijami z začetnim prostorom $\text{im}(B^*B + A)$ in rešitvami enačbe (2.1) bijektivna. ■

Med zgornjimi rešitvami so pri določenih pogojih tudi sebiadjungirane rešitve. Pogoj za obstoj sebiadjungirane rešitve enačbe (2.1) je (1.6), kjer vstavimo B in A namesto b in a . S precej več truda se da lepo klasificirati tudi vse sebiadjungirane rešitve enačbe (2.1) [3].

Če namesto matrične enačbe gledamo enačbo v algebri omejenih linearnih preslikav Hilbertovega prostora vase, dobimo zelo podobne rezultate [2]. Prav tako, če za B vzamemo generator krepko zvezne polgrupe operatorjev razreda C_0 (B ni več nujno omejen operator).

LITERATURA

- [1] R. W. Brockett, *Finite dimensional linear systems*, Wiley, New York (1970).
- [2] M. Dobovišek, *Operator Quadratic Equations*, Glas. Mat. **27** (1992) 283–295.
- [3] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *On hermitian solutions of the symmetric algebraic Riccati equations*, SIAM J. Control and Optim. **24** (1986) 1323–1334.
- [4] R. E. Kalman, and R. Bucy, *New results in linear filtering and prediction*, Journal of Basic Engineering (ASME) **83D** (1961) 366–368.
- [5] P. Lancaster, and L. Rodman, *Algebraic Riccati Equations*, Oxford Science Publications, Oxford University Press Inc., New York 1995.
- [6] J. C. Willems, *Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation*, IEEE Trans. Autom. Control, AC **16** (1971) 621–634.

KONSTRUKCIJA MYCIELSKEGA

MATEJ MENCINGER*

Math. Subj. Class. (1991) 05C15, 05C40, 05C99

V članku obravnavamo konstrukcijo Mycielskega in nekatere njene lastnosti.

CONSTRUCTION OF MYCIELSKI

The construction of Mycielski and some of its properties are considered.

1. Definicije

Graf G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ neprazna končna množica točk in $E(G)$ končna družina neurejenih parov (ne nujno različnih elementov) iz $V(G)$, imenovanih *povezave*.

Točki v in w sta *sosedni*, če med njima obstaja *povezava* $e = [v, w] = [w, v]$, katere *krajišči* sta točki v in w . Povezavo oblike $[v, v]$ imenujemo *zanka*. V tem članku bomo obravnavali le *enostavne grafe*, t.j. grafe brez večkratnih povezav in zank.

Stopnja točke v , $d(v)$, je število povezav, ki potekajo od točke v (grafa G) do katerekoli druge točke grafa G .

Pot $P_n = (V(P_n), E(P_n))$ je graf, za katerega velja $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ in $E(P_n) = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_{n-1}, v_n]\}$. Cikel C_n dobimo, če poti P_n dodamo povezavo $[v_n, v_1]$. Cikel na treh točkah bomo imenovali *trikotnik*. Graf, v katerem sta vsaki dve različni točki *sosedni*, imenujemo *polni graf*. Polni graf na n točkah označimo s K_n . Preslikava $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ je *k-barvanje* grafa G z barvami $1, 2, \dots, k$, če za vsako povezavo $[u, v] \in E(G)$ velja: $c(u) \neq c(v)$. Graf G je *k-obarvljiv*, če premore vsaj eno *k-barvanje*. Če je graf G *k-obarvljiv*, ne pa $(k-1)$ -obarvljiv, pravimo, da je G *k-kromatičen* ali da je k *kromatično število* grafa G . Označimo: $\chi(G) = k$.

$G - v$ je graf G brez točke v in povezav, ki vodijo do točke v . Splošno: za $S \subset V(G)$ je $G - S$ graf G brez točk iz množice S (in ustreznih povezav).

Graf H je *podgraf* grafa G , če velja: $V(H) \subset V(G)$ in $E(H) \subset E(G)$. Pravimo, da množica $S \subset V(G)$ *inducira podgraf* H grafa G , če je $S = V(H)$, in za vsak par točk $u, v \in S$ velja, da je $[u, v] \in E(H)$ natanko tedaj, ko je $[u, v] \in E(G)$.

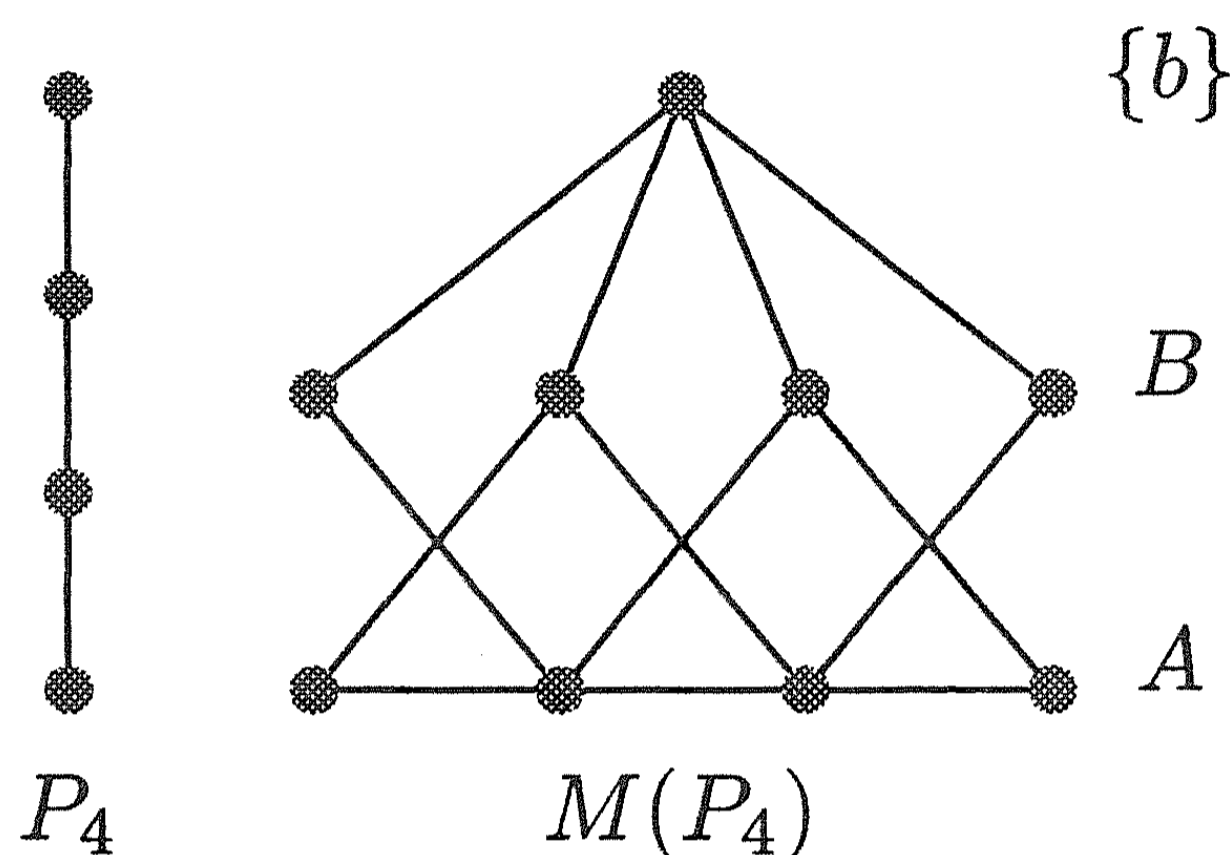
Največja stopnja točk grafa G , $\Delta(G)$, je definirana z $\Delta(G) = \max_{v \in V} \{d(v)\}$. Tako je na primer $\Delta(C_n) = 2$ in $\Delta(K_n) = n - 1$.

Klika v grafu je množica vzajemno sosednih točk. *Velikost največje klike* v grafu G označimo z $\omega(G)$. Očitno je $\omega(G) \leq \chi(G)$.

*Za vse napotke in predloge, ki so pripomogli k nastanku tega članka, se lepo zahvaljujem dr. Sandiju Klavžarju.

2. Konstrukcija Mycielskega

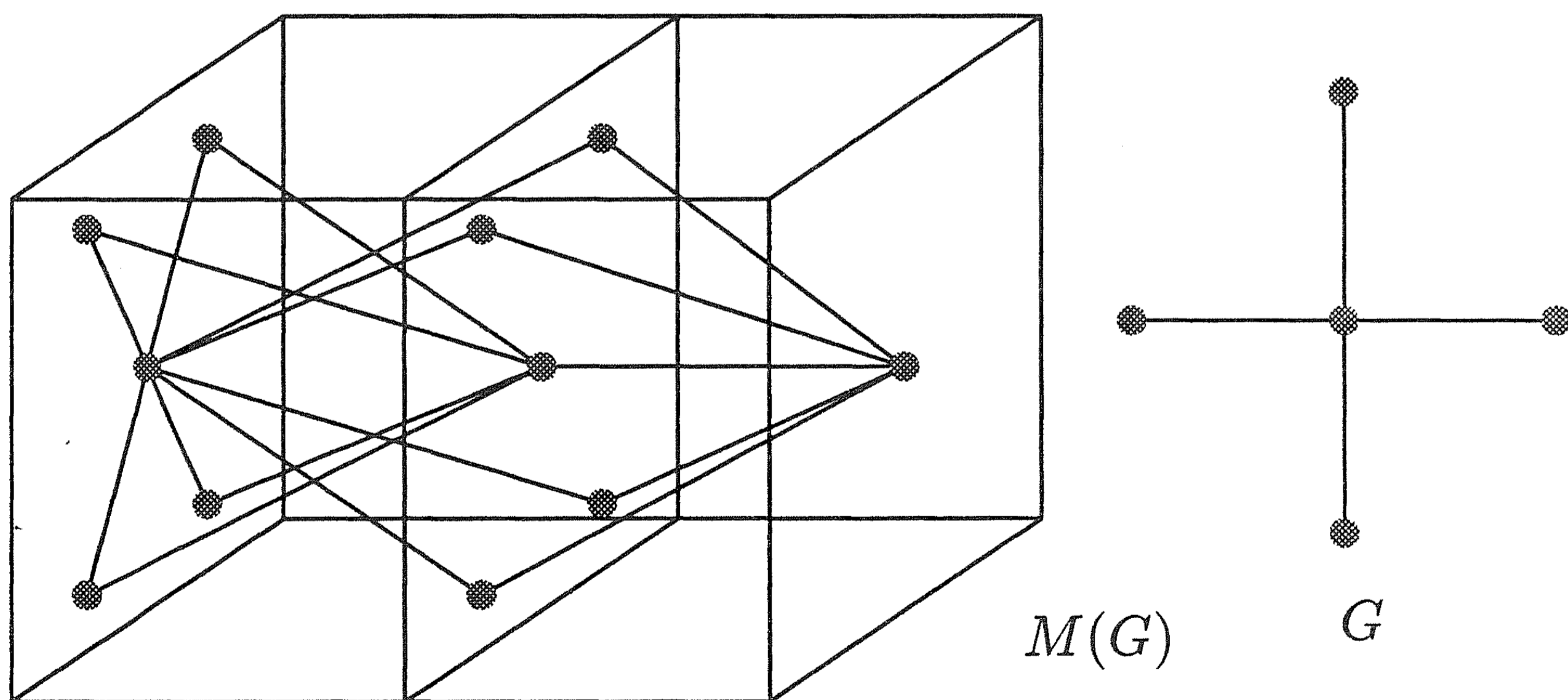
Konstrukcija Mycielskega je zanimiva predvsem zaradi lastnosti, ki jih ima na novo nastali graf $M(G)$. Mycielski [5] jo je vpeljal, da bi pokazal obstoj grafov brez trikotnikov s poljubno velikim kromatičnim številom. Nekaterne lastnosti si bomo podrobneje ogledali kasneje (več o tem lahko najdete v [4]), sedaj pa preidimo k sami definiciji konstrukcije. Naj bo G



Slika 1. Konstrukcija Mycielskega na grafu P_4 .

graf in naj bo $V(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$. Potem konstruiramo graf $M(G)$ tako, da najprej dodamo $p+1$ novih točk b_1, b_2, \dots, b_p, b . Točko b povežemo z vsako točko b_i , točko b_i pa povežemo s točko a_j , če je a_j v grafu G sosedna z a_i . Ali: točko b_i povežemo z vsemi sosedi točke a_i .

Takšno konstrukcijo grafa bomo imenovali *konstrukcija Mycielskega*, graf, ki smo ga s takšno konstrukcijo pridobili iz grafa G , pa bomo označili: $M(G)$. Če postopek ponovimo, dobimo graf $M^2(G) = M(M(G))$, in splošno, $M^n(G)$ je graf, ki ga dobimo z n -kratno zaporedno konstrukcijo na grafu G . Primer konstrukcije si lahko ogledamo na sliki 1.



Slika 2. Konstrukcija Mycielskega na treh vzporednih ravninah.

Dogovorimo se za naslednje oznake:

$$A = V(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \quad \text{in} \\ V(M(G)) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, b\}.$$

Če si predstavljamo graf $M(G)$ v tridimenzionalnem prostoru, je zaradi lažje predstave zanimiva predstavitev grafa na treh vzporednih ravninah. Na eni je kar graf G , na drugi so točke b_1, b_2, \dots, b_p , na tretji pa je točka b (glej sliko 2).

3. Nekatere lastnosti grafa $M(G)$

Najprej si oglejmo, kako je s številom točk in povezav grafa $M^k(G)$ glede na število točk in povezav grafa G . Dokažemo lahko naslednjo trditev.

Trditev 1. Če je G graf na n točkah z m povezavami, je $M^k(G)$ graf na $n_k = n2^k + 2^k - 1$ točkah z $m_k = m3^k + n(3^k - 2^k) + \frac{3^k - 2^{k+1} + 1}{2}$ povezavami.

Dokaz. Dokaz poteka z indukcijo po k .

Za $k = 1$ upoštevamo, da je točk grafa $M(G)$ po definiciji $2n + 1$ in da vsaka povezava $e = [a_i, a_j]$ na točkah a_i, a_j iz $V(G)$ porodi v grafu $M(G)$ tri povezave: $e = [a_i, a_j]$, $e' = [a_i, b_j]$ in $e'' = [b_i, a_j]$. Prištejmo še n povezav oblike $[b, b_1], [b, b_2], \dots, [b, b_n]$, pa imamo v grafu $M(G)$ $3m + n$ povezav, kar je v skladu z naslednjim izračunom:

$$n_1 = n2^1 + 2^1 - 1 = 2n + 1, \\ m_1 = m3^1 + (3^1 - 2^1)n + \frac{3^1 - 2^2 + 1}{2} = 3m + n.$$

Naj trditev velja za vse $1 \leq p \leq k$. Dokažimo, da potem velja tudi za $p = k + 1$. Očitno velja: $2n_k + 1 = n_{k+1}$ in $3m_k + n_k = m_{k+1}$. Izračunajmo:

$$n_{k+1} = 2n_k + 1 = 2(n2^k + 2^k - 1) + 1 = n2^{k+1} + 2^{k+1} - 1$$

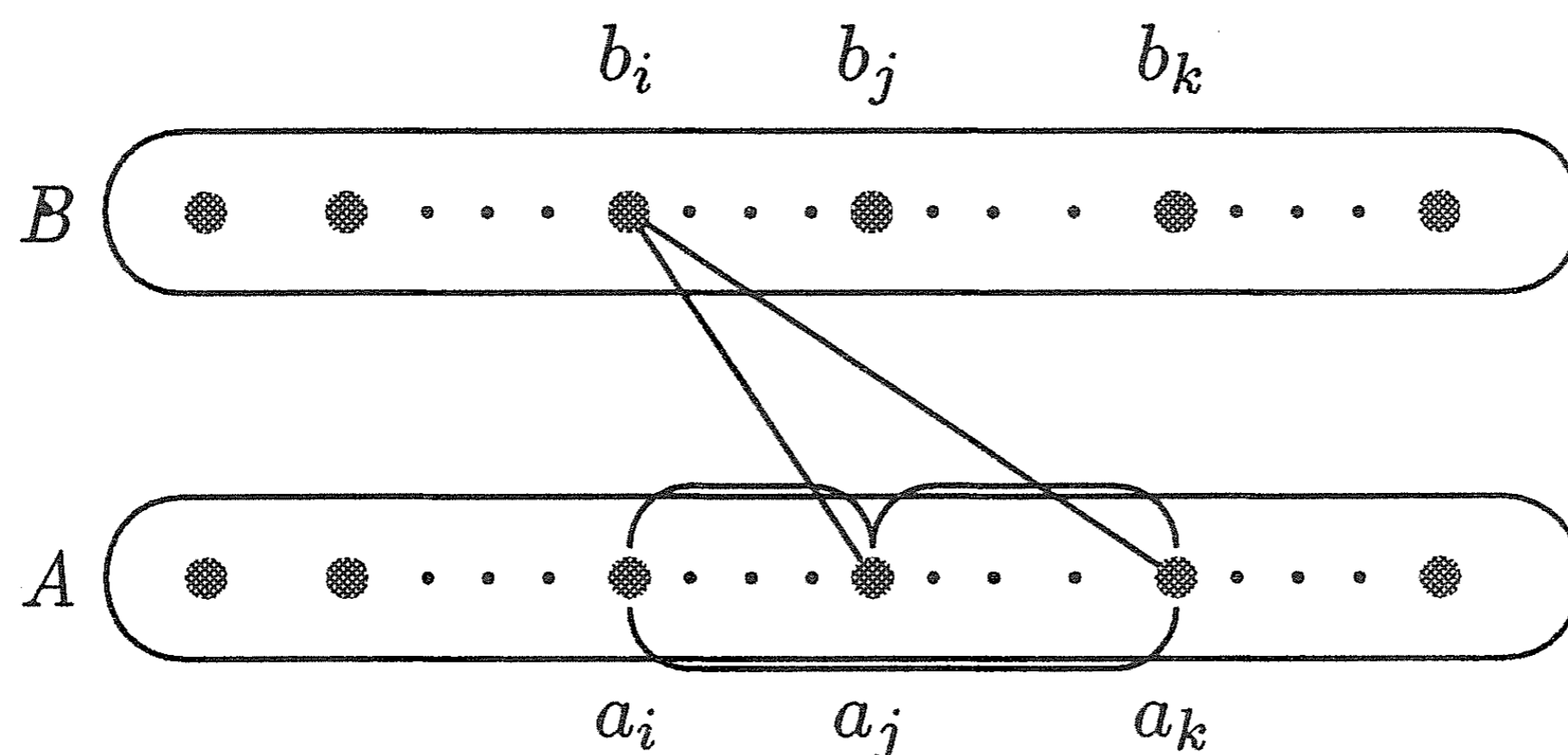
in

$$m_{k+1} = 3m_k + n_k = 3 \left[m3^k + n(3^k - 2^k) + \frac{3^k - 2^{k+1} + 1}{2} \right] + n2^k + 2^k - 1 = \\ = m3^{k+1} + n(3^{k+1} - 3 \cdot 2^k) + \frac{3^{k+1} - 3 \cdot 2^{k+1} + 3}{2} + n2^k + 2^k - 1 \\ = m3^{k+1} + n(3^{k+1} - 3 \cdot 2^k + 2^k) + \frac{3^{k+1} - 3 \cdot 2^{k+1} + 3 + 2 \cdot 2^k - 2}{2} \\ = m3^{k+1} + n(3^{k+1} - 2^{k+1}) + \frac{3^{k+1} - 2^{(k+1)+1} + 1}{2}. \quad \blacksquare$$

Naslednji izrek pravi, da konstrukcija Mycielskega ohranja velikost največje klike v grafu.

Izrek 2. Če ima graf G vsaj eno povezavo, je $\omega(M(G)) = \omega(G)$.

Preden se lotimo dokaza, si na sliki 3 oglejmo njegov pomen za $\omega(G) = \omega(M(G)) = 2$.



Slika 3. Če obstaja trikotnik v grafu $M(G)$, obstaja tudi v grafu G . Ali drugače: če je graf G brez trikotnikov, velja to tudi za graf $M(G)$.

Dokaz. Ker je G podgraf grafa $M(G)$, je $\omega(M(G)) \geq \omega(G)$. Do nasprotni neenakosti pa pridemo z naslednjim razmislekom. Točka b ni v nobeni klikki z močjo, večjo od 2. Če bi bila množica $\{a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(r)}, b_{j(1)}, b_{j(2)}, \dots, b_{j(s)}\}$ klika v $M(G)$, bi bili množici $\{i(1), i(2), \dots, i(r)\}$ in $\{j(1), j(2), \dots, j(s)\}$ disjunktni in bi bila tudi množica $\{a_{i(1)}, a_{i(2)}, \dots, a_{i(r)}, a_{j(1)}, a_{j(2)}, \dots, a_{j(s)}\}$ klika v G . Torej je tudi $\omega(M(G)) \leq \omega(G)$. In izrek je dokazan. ■

Kaj pa lahko povemo o kromatičnem številu grafa $M(G)$? Naj bo c poljubno k -barvanje grafa G . Trdimo, da ga lahko razširimo do k -barvanja c' grafa $M(G) - b$. Definirajmo:

$$c'(a_i) = c'(b_i) = c(a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nobena točka b_i ni sosedna z nobeno točko b_j , $i \neq j$, če pa je $[b_i, a_j] \in E(M(G) - b)$, tedaj je $c(a_i) \neq c(a_j)$, torej je tudi $c'(b_i) \neq c'(a_j)$. Dokazali smo, da je c' k -barvanje grafa $M(G) - b$. Zdaj lahko dokažemo tudi:

Izrek 3. Če je $\chi(G) = k$, je $\chi(M(G)) = k + 1$.

Dokaz. Ker je G podgraf v $M(G)$, je $\chi(M(G)) \geq k$. Predpostavimo, da velja $\chi(M(G)) = k$. Naj bo c poljubno k -barvanje grafa $M(G)$. Ker je $\chi(G) = k$, obstaja v vsakem barvnem razredu točka, ki je sosedna z vsaj eno točko iz vsakega drugega razreda. Če je to točka a_i , mora veljati $c(b_i) = c(a_i)$. Toda tedaj k barv nastopa tudi na točkah b_1, b_2, \dots, b_n . To pa je protislovje, saj je barva na b različna od vseh barv na b_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Zato je $\chi(M(G)) \geq k + 1$.

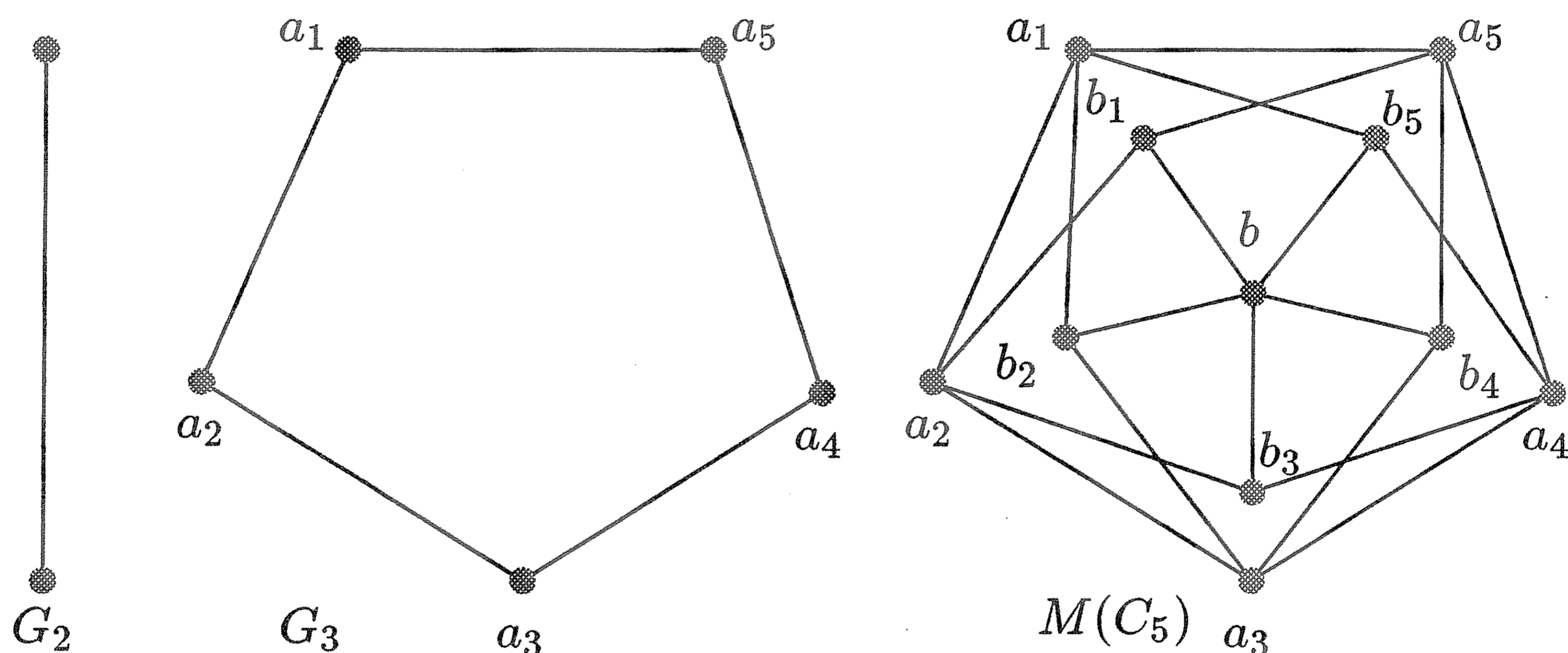
Barvanja grafa $M(G)$ s $k + 1$ barvami ni težko narediti. Naj bo c k -barvanje grafa G . Pravkar smo dokazali, da obstaja k -barvanje, c' , grafa $M(G) - b$. Če postavimo še $c'(b) = k + 1$, smo dobili $(k + 1)$ -barvanje grafa $M(G)$ in s tem končali dokaz. ■

Obstoj grafov brez trikotnikov s poljubno velikim kromatičnim številom je posledica izreka 3 in izreka 2. Mycielski [5] je ravno zato konstruiral zaporedje grafov G_2, G_3, \dots , kjer je

$$G_2 = P_2 \text{ in } G_i = M(G_{i-1}) \text{ za } i \geq 3.$$

Vsi ti grafi so očitno brez trikotnikov, saj je P_2 brez trikotnikov. Ker je $\chi(G_2) = 2$, dobimo po izreku 3 $\chi(G_3) = 3, \chi(G_4) = 4, \dots, \chi(G_k) = k$.

Posebej zanimiv graf tega zaporedja je $G_4 = M(C_5)$, ki mu pravimo tudi *graf Mycielskega* (glej sliko 4).



Slika 4. Prvi trije členi zaporedja Mycielskega.

4. Minimalnost grafa Mycielskega

Dokazali bomo, da je graf Mycielskega najmanjši 4-kromatični graf brez trikotnikov. V dokazu naslednjega izreka se bomo sklicevali na Brooksov [1] izrek, zato si oglejmo, kaj pravi.

Izrek 4 (Brooks). Naj bo G poljuben graf, $G \neq K_n, G \neq C_{2n+1}, n \geq 1$. Potem velja $\chi(G) \leq \Delta(G)$. ■

Izrek 5 (Chvatal). Graf Mycielskega, G_4 , je edini 4-kromatičen graf brez trikotnikov na kvečjemu 11 točkah.

Dokaz. Naj bo $G = (V, E)$ graf brez trikotnikov, ki je 4-kromatičen na kvečjemu 11 točkah. Naj bo $u \in V$ točka z maksimalno stopnjo in A množica njenih sosednih točk.

Po Brooksovem izreku velja $|A| \geq 4$ (sicer bi bil G 3-pobarvljiv). Za vsak par točk iz množice A velja: $[x, y] \notin E(G)$, sicer bi G vseboval trikotnik na točkah u, x, y .

Naj bo $B = V - \{u\} - A$. Potem je $|B| = |V| - 1 - |A| \leq 6$.

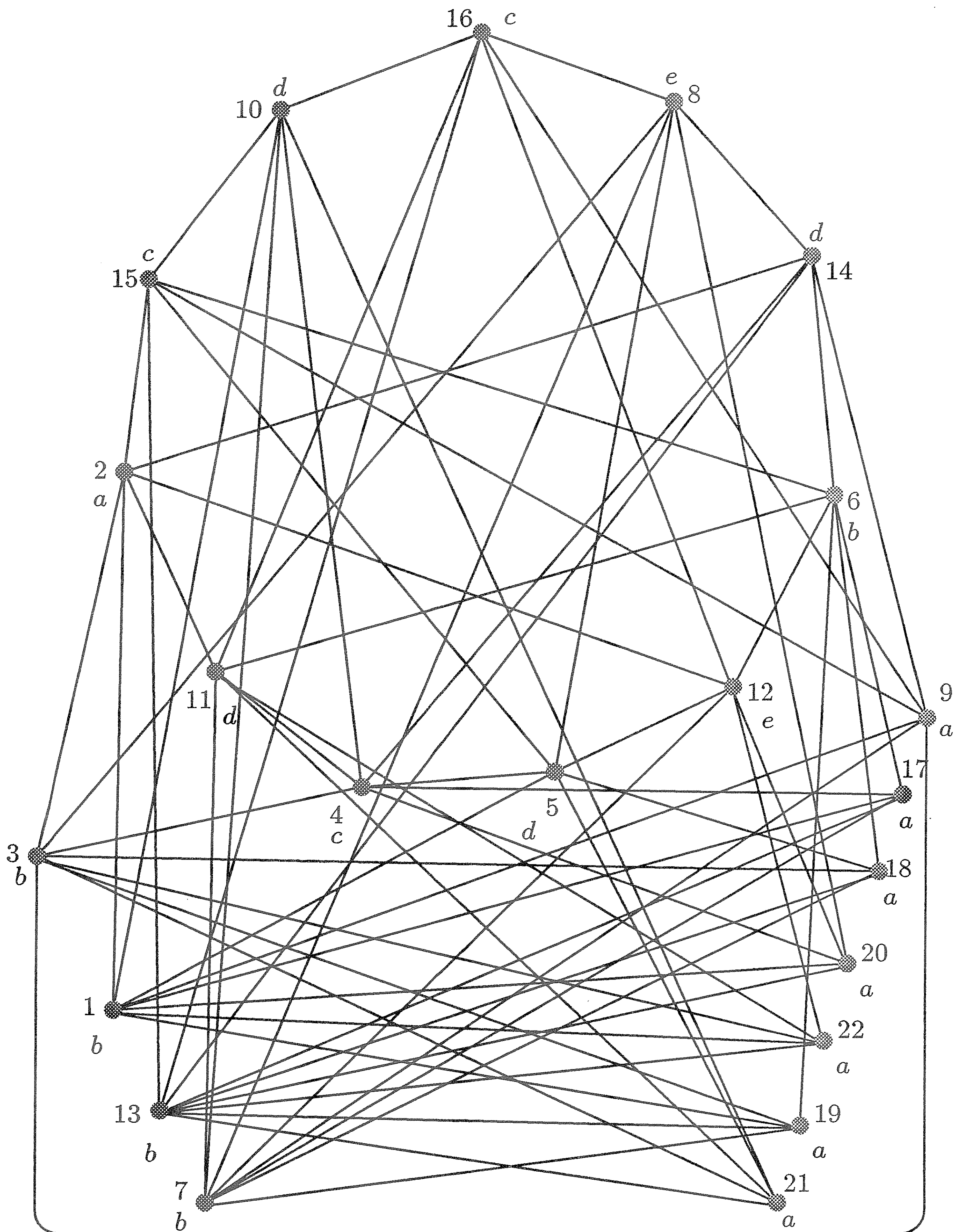
Podgraf grafa G , ki ga inducira množica B , je brez trikotnikov in je 3-kromatičen, sicer bi $B \cup \{u\}$ lahko pobarvali z dvema in A s tretjo barvo, v protislovju s $\chi(G) = 4$. Zato B vsebuje cikel dolžine 5.

Točka	Sosedne									
1	2	5	9	10	17	19	20	22		
2	1	3	11	12	14	15				
3	2	4	8	9	18	19	21	22		
4	3	5	10	11	14	17	20			
5	1	4	8	12	15	18	21			
6	11	12	14	15	17	18	19			
7	8	9	10	11	12	17	18	19		
8	3	5	7	14	16	20				
9	1	3	7	14	15	16				
10	1	4	7	15	16	21				
11	2	4	6	7	16	21	22			
12	2	5	6	7	16	20	22			
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
14	2	4	6	8	9	13				
15	2	5	6	9	10	13				
16	8	9	10	11	12	13				
17	1	4	6	7	13					
18	3	5	6	7	13					
19	1	3	6	7	13					
20	1	4	8	12	13					
21	3	5	10	11	13					
22	1	3	11	12	13					

Tabela 1. Primer 5-kromatičnega grafa brez trikotnikov na 22 točkah.

Torej je $|B| \geq 5$. Zato je $|A| = |V| - 1 - |B| \leq 5$. Označimo točke 5-cikla z u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 .

Za $|A|$ sta torej preostali le še dve možnosti:



Slika 5. 5-barvanje grafa iz tabele 1 z barvami a, b, c, d in e .

(i) $|A| = 5$

a) Privzemimo, da za vsak i obstaja točka $v \in A$, ki je sosedna s točkama u_i in u_{i+2} (seštevanje po modulu pet). Potem G vsebuje G_4 . Vendar: če dodamo grafu G_4 katerokoli povezavo, nastane v novem grafu trikotnik. Zato sklenemo: $G = G_4$.

- b) Privzemimo, da nobena točka v iz A ni sosedna ne z u_1 , kot tudi ne z u_3 . (Velja: vsaka točka $v \in A$ je lahko sosedna kvečjemu z dvema (nesosednima) točkama iz B , sicer bi G vseboval trikotnik). Toda potem lahko G pobarvamo s tremi barvami na naslednji način: u_1 z barvo 1, u_2 z barvo 3, u_3 z barvo 2, u_4 z barvo 1 in u_5 z barvo 2, poljubno točko v iz A pa lahko pobarvamo ali z barvo 2 ali 1, točko u pa lahko pobarvamo z barvo 3, kar je protislovje.
- (ii) $|A| = 4$. Množica $V - \{u\} - A - \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ vsebuje kvečjemu eno točko. Če ta točka obstaja, jo označimo z w . Najprej dokažimo, da obstaja tak i , da velja:
1. w ni sosedna z u_i ,
 2. Nobena točka v iz A ni sosedna niti z u_{i-1} niti z u_{i+1} .

Ker je $|A| = 4$, obstaja vsaj en i , ki zadošča pogoju 2. Brez škode za splošnost lahko privzamemo: $i = 2$. Če w ni sosedna z u_2 , je dokaz končan. Sicer pa $i = 1$ in $i = 3$ zadoščata pogoju 1. Če niti $i = 1$ niti $i = 3$ ne zadoščata pogoju 2, potem obstajata taki točki v' in v'' iz A , da je v' sosedna z u_2 in u_5 in da je v'' sosedna z u_2 in u_4 . Če nočemo trikotnika v', u_4, u_5 , moramo privzeti $v' \neq v''$. Toda potem je $d(u_2) = 5$ (u_2 je sosedna z u_1, u_3, w, v', v''). Protislovje z $\Delta(G) = 4$ ($|A| = \Delta(G)$).

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je za $i = 2$ zadoščeno tako pogoju 1 kot tudi pogoju 2. Pobarvajmo w z barvo 3 in preostanek grafa G tako kot v primeru (i) b). Torej je graf G 3-pobarvljiv, kar je protislovje. ■

Nazadnje si oglejmo še zanimivo domnevo. Naj bo $f(k)$ število točk najmanjšega k -kromatičnega grafa brez trikotnikov. Očitno je $f(2) = 2$, iskani graf pa G_2 . Prav tako ni težko preveriti, da je $f(3) = 5$, iskani graf pa G_3 . V izreku 5 (glej tudi [2]) smo dokazali, da je $f(4) = 11$ in G_4 iskani graf. Ker po trditvi 1 dobimo, da je $|V(G_2)| = 2$, $|V(G_3)| = 5$, $|V(G_4)| = 11$ in $|V(G_5)| = 23$, bi lahko domnevali, da je $f(5) = 23$, G_5 pa iskani graf. Toda C. M. Grinstead, M. Katinsky in D. Van Stone so dokazali, da ni tako. Velja namreč ocena $21 \leq f(5) \leq 22$, kjer je zgornja meja graf v tabeli 1, ki je prikazan na sliki 5, spodnja meja pa je bila določena z računalnikom (glej [3]).

LITERATURA

- [1] R. L. Brooks, *On Colouring the Nodes of a Network*, Proc. Camb. Phil. Soc. **37** (1941), 194–197.
- [2] V. Chvatal, *The Minimality of the Mycielski Graph*, Lecture Notes in Math. **406** (1973), 243–246.
- [3] C. M. Grinstead, M. Katinsky and D. Van Stone, *On Minimal 5-Chromatic Triangle-Free Graphs*, J. Comb. Math. Comp. **6** (1989), 189–193.
- [4] M. Mencinger, *Konstrukcija Mycielskega*, diplomsko delo, Univerza v Mariboru, 1996.
- [5] J. Mycielski, *Sur le coloriage des graphes*, Colloq. Math. **3** (1955), 161–162.

POVABILO V JORDANSKI SVET

BORUT ZALAR

Math. Subj. Class. (1991) 17C, 17C10

V članku poskušamo predstaviti nespecialistom teorijo jordanških algeber in njihovo uporabo v drugih vejah matematike.

AN INVITATION TO THE JORDAN WORLD

We try to motivate nonspecialists to appreciate the theory of Jordan algebras and its applications to other branches of mathematics.

1. Motivacija in zgodovina

Jordanske algebre so se prvič pojavile v literaturi okrog leta 1934. Njihovi tvorci, Jordan, von Neumann in Wigner, niso bili algebraiki, ampak so se ukvarjali z analizo in matematično fiziko. Njihov motiv je bil poiskati ustrezen model za formalizem kvantne mehanike. Kasneje se je izkazalo, da ta poskus dolgoročno ni bil ravno uspešen in danes za jordanške algebre ve le malokateri fizik. Kljub temu je zanimanje za jordanške algebre danes čedalje večje, razloge za to bomo nakazali v nadaljevanju.

Jordanske algebre so se pojavile v času, ko je teorija asociativnih algeber v glavnih obrisih že dobila podobo, kot jo poznamo danes. Spoznana je bila pomembnost pojmov, kot so izomorfizem, ideal, radikal, polenostavnost, dekompozicija na enostavne ideale, idempotent, nilpotent itd. S pojavom algeber novega tipa, ki so imele še privlačno fizikalno ozadje, so se nekateri algebraiki lotili izdelave vzporedne strukturne in reprezentacijske teorije k že znani teoriji asociativnih algeber. Prvi znani algebraik, ki je velik del svojega opusa med 1934 in 1960 posvetil jordanškim algebram in prispel že kar daleč s strukturno teorijo končno dimenzionalnih algeber nad algebraično zaprtim obsegom, je bil Adrian Albert. Naslednji pomembnejši jordanški algebraik, ki je sicer imel zelo široko območje raziskovanja, je bil Nathan Jacobson. Jacobson je delal v splošnejšem kontekstu kot Albert in je zato tudi uporabljal nekoliko drugačne metode, saj je obravnaval jordanške algebre kot del teorije (neasociativnih) kolobarjev, kjer metode linearne algebre in matrične analize niso vedno možne. Njemu pripadajo ideje kvadratične reprezentacije, izotopa in fundamentalne formule. Dokazal je tudi prve koordinatizacijske izreke, ki v določenih pogojih reprezentirajo jordanške algebre kot matrične algebre nad alternativnim kolobarjem. Po letu 1970 sta najvidnejša predstavnika te šole (oba sta še vedno zelo aktivna) Kevin McCrimmon in Ottmar Loos. Sintetični prikaz bistvenih rezultatov tega iz teorije kolobarjev izhajajočega pristopa je v Jacobsonovi knjigi [2].

Nekoliko drugačen pristop je nastal v Rusiji in izhaja iz idej algebraične geometrije in teorije varietet. Knjiga [7] predstavlja njihov pogled. Tam je več razdelkov namenjenih tudi alternativnim algebram in algebram s kompozicijo. Ruska šola je dosegla vrh z Efimom Zelmanovom, ki je leta

1994 dobil Fieldsovo medaljo (matematični ekvivalent Nobelove nagrade za fiziko) za rešitev omejenega Burnsideovega problema. Ta problem izvira iz teorije grup in iz obrazložitve k nagradi, ki mu je bila podeljena, izhaja napačen vtis, da se Zelmanov ukvarja s teorijo grup. V resnici sta Zelmanov in delno tudi Jurij Medvedev tvorca nečesa, kar je že omenjeni Kevin McCrimmon poimenoval v enem izmed svojih člankov „ruska revolucija v jordanškem svetu”. V drugem članku označuje štetje let v zgodovini jordanških algeber kot 5 B.Z., 3 A.Z. in podobno, kjer označujeta črki B.Z. „before Zelmanov”, črki A.Z. pa „after Zelmanov”. Ničla po tem štetju pade v leto 1983 našega štetja, ko je izšel zelo pomemben članek Efima Zelmanova v časopisu *Siberian Mathematical Journal*. Bistvo „teorije Zelmanova” je radikalno nov pristop k strukturalni teoriji. Le-ta dosega uspehe tam, kjer je na primer Jacobson dvomil, da bodo sploh kdaj možni.

Stari pristop, ki ima svoje korenine v navezi Wedderburn-Albert-Jacobson, temelji na „lokalizaciji in sintezi”. To je podobno, kot če bi želeli analizirati egiptovske piramide in bi spoznali, da jih tvorijo dve vrsti podobnih objektov, ki jih lahko imenujemo „kamni” in „vezivo”. Vzamemo torej ven en kamen, ki je zelo majhen v primerjavi s celo piramido, in ga podrobno preučimo. Potem si ogledamo še dva kamna skupaj in preučimo, na kakšen način ju vezivo povezuje. Po teh dveh korakih „razumemo” zgradbo piramide. Pri tem pristopu imajo poglobljeno vlogo projektorji (to so elementi, ki zadoščajo enačbi $p^2 = p$), razcep prostora glede na družine pravokotnih projektorjev, podalgebre oblike pAp , kjer je p projektor, in podobno. Težave nastopijo pri algebrah, kjer obstoja projektorjev ni mogoče dokazati.

Novi pristop temelji na „potopitvi piramide v neskončno vesolje”. To pomeni, da namesto takojšnjega študija „piramide” najprej studiramo globalne pojave, kot so „svetloba”, „gravitacija”, „magnetizem” in podobno. Ko nam je jasna globalna klasifikacija predmetov v „vesolju”, primerjamo „piramido” z dobljenimi razredi in jo pravilno uvrstimo. Vlogo „vesolja” v tem primeru dobijo tako imenovane varietete. Te so sicer ena od glavnih struktur, v katerih svoje rezultate izraža algebraična geometrija. Vlogo „galaksij” imajo proste algebre z neskončno generatorji. So „mnogo večje” od tistih algeber, ki nas v resnici zanimajo. Vlogo „globalnih interakcij” pa dobijo polinomi Zelmanova, požiralci tetrad in podobni skrivnostneži.

Razliko med novim in starim pristopom je mogoče ponazoriti tudi s študijem gozda. Stari pristop pomeni, da se v gozd napotimo peš, dobro napnemo oči in zapišemo, kar se nam zdi zanimivo. Po prihodu domov si iz vtisov in zapiskov poskusimo ustvariti globalno predstavo o tem, kaj je gozd. Novi pristop pomeni, da si najamemo helikopter in si gozd ogledamo od zgoraj. Ta primerjava nam pove tudi to, zakaj stare metode, kljub teoriji Zelmanova, niso za v smeti. Iz helikopterja namreč ne vidimo mnogih drobnih detajlov iz gozdnega življenja, ki pa nas včasih bolj zanimajo kot globalno razumevanje pojma „gozd”; spomnite se na primer Sneguljčice in njenih palčkov.

Jordanske algebre niso zanimive samo zato, ker porajajo nove in težke probleme. Omenili smo že, da poskus njihove uveljavitve v kvantni mehaniki ni bil ravno uspešen. Izkazalo pa se je, da je z njihovo pomočjo mogoče doseči bistven napredek pri nekaterih problemih kompleksne analize več spremenljivk, diferencialne geometrije in harmonične analize na simetričnih prostorih. V zadnjem času so jih začeli uporabljati tudi v statistiki, vendar še ni jasno, ali se bodo tu jordanske metode pokazale kot dolgoročno pomembne. Pionir teh raziskav je bil Max Koecher. Svoja glavna dela je napisal med leti 1960 in 1975. Ta smer je še vedno zelo aktivna in mnogo pomembnih problemov je še nerešenih. Koecher je žal po daljši bolezni umrl leta 1990, ko še ni bil star 70 let. S problemi, ki jih je odprl, se še vedno ukvarjajo mnogi znani matematiki, kot na primer Kaup, Upmeyer, Vigue, Dineen, Faraut, Koranyi, Stacho, Dorfmeister in Lassalle. Za ilustracijo navedimo primer problema, ki ga je v končno dimenzionalnem primeru rešil že Cartan z uporabo Liejevih grup. V enotskem disku $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ je pri poljubni izbiri točk $p, q \in D$ mogoče najti analitični avtomorfizem diska, ki točko p prenese v točko q . Ta pojav se imenuje tranzitivnost množice (ki ima naravno strukturo grupe) analitičnih avtomorfizmov. Poleg tega velja, da je vsako netrivialno enostavno povezano območje v kompleksni ravnini analitično izomorfno disku D . To ima naslednjo koristno posledico v uporabni matematiki: če želimo reševati določene enačbe ali opraviti kakšne izračune na območju G , nam diagram $G \xrightarrow{\phi} D \xrightarrow{\phi^{-1}} G$ omogoča, da s pomočjo preslikave φ prenesemo enačbe v analitično ekvivalentno obliko na disku. Tam jih poskusimo rešiti s pomočjo nam vsem dobro znanih polarnih koordinat. Rešitev nato prenesemo nazaj na prvotno območje s preslikavo φ^{-1} . Pri funkcijah več kompleksnih spremenljivk je položaj precej bolj zapleten. Že zelo dolgo je znano, da bidisk $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|, |w| \leq 1\}$ ni analitično izomorfen 4-dimenzionalni krogli $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 < 1\}$. Ta opazka poraja problem, kako določiti enostaven sistem domen $\{D_1, \dots, D_k\}$ v \mathbb{C}^n tako, da bo vsaka „lepa“ domena G analitično izomorfna eni izmed njih, ter kako prepoznati, kateri D_i je pravi. Oba problema je mogoče rešiti z uporabo jordanskih algeber, če za definicijo „lepe“ domene vzamemo take odprte množice G , na katerih grupa analitičnih avtomorfizmov deluje tranzitivno. Tedaj je mogoče s pomočjo določenih kompletno integrabilnih vektorskih polj, ki se izkažejo za kvadratična, vsaki domeni G prirediti jordansko algebro $J(G)$ na tak način, da sta G_1 in G_2 analitično izomorfna tedaj in samo tedaj, ko sta $J(G_1)$ in $J(G_2)$ algebraično izomorfni. Klasifikacija jordanskih algeber končnih dimenzij je bila znana že precej pred tem, tako da dobimo končen nabor osnovnih domen. Kateri izmed njih je izomorfna domena G , lahko zdaj načeloma preverja računalnik, saj mora zgolj primerjati tabele za množenje. Ta rezultat je mogoče posplošiti tudi na Banachove prostore z neskončno dimenzijo. Osnovne domene so povezane s kompleksnimi matrikami in sledijo štirim tipskim vzorcem skozi vse dimenzije. Izjemi, ki se ne ujemata s temi vzorčnimi tipi, sta samo dve. Ena nastopa v dimenziji 16, druga v

dimenziji 27. Zakaj sta dimenziji 16 in 27 različni od vseh drugih, končnih ali neskončnih, ni čisto jasno.

Bralec, ki ga zanimajo nadaljnji primeri uporabe jordanjskih algeber v geometriji in analizi, naj si ogleda knjige [1], [3] in [6]. Trenutno najbolj znan primer uporabe jordanjskih algeber je rešitev omejenega Burnsideovega problema. Prvotna Burnsideova domneva spada v teorijo grup. Z njo so se ukvarjali mnogi slavni matematiki dvajsetega stoletja. Ta domneva je povezana z vprašanjem o končnosti ali neskončnosti grup, ki imajo n (končno mnogo) generatorjev in končen indeks m . Te grupe $B(n, m)$ se imenujejo Burnsideove. Le-ta je domneval, da so vse grupe $B(n, m)$ končne. Po mnogih delnih rezultatih sta to domnevo ovrgla v sedemdesetih letih Adian in Novikov. Dokazala sta, da je $B(2, 665)$ neskončna. Po tem odkritju so v teoriji grup postavili nekoliko milejšo domnevo, ki je postala znana pod imenom „omejeni Burnsideov problem“. Leta 1989 ga je rešil Efim Zelmanov z uporabo jordanjskih algeber. Ta rešitev je zbudila veliko presenečenje v matematični skupnosti. Nikoli pred tem ni nihče pomislil, da ima omejeni Burnsideov problem kašno zvezo z jordanjskimi algebrami. O pomenu protiprimera za klasični Burnsideov problem in rešitvi omejenega problema za nadaljnji razvoj teorije grup in drugih vej matematiki v pričujočem članku ne bomo govorili. Vzrok ni pomanjkanje prostora, ampak avtorjevo hudo pomanjkljivo znanje v tej smeri. Upam, da bo to vrzel znal nadomestiti kdo drug.

2. Definicije, primeri in struktura

Kvantni mehaniki se zanimajo za tako imenovane *simetrične operatorje*. Le-ti navadno delujejo na neskončno dimenzionalnih prostorih, vendar se bomo zaradi enostavnosti omejili na navadne kompleksne matrike. Če je A taka matrika, potem iz linearne algebre vemo, da obstaja matrika A^* , ki jo nekateri imenujejo adjungirana, drugi pa konjugirano transponirana matrika k matriki A . Če je $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2 & -i \end{bmatrix}$, potem je

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{i} & \bar{-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

Iz linearne algebre je znana tudi zveza med produktom matrik in adjungiranjem. Če sta A in B kompleksni matriki dimenzije $n \times n$, je $(AB)^* = B^*A^*$. Matrika, ki zadošča enakosti $A = A^*$, se imenuje simetrična. Take matrike so pomembne v mnogih delih matematike, na primer v klasični analizi več spremenljivk, v numerični analizi, v statistiki in drugje. Naj bo J_n množica simetričnih matrik dimenzije $n \times n$. Če sta $A, B \in J_n$, potem je $(AB)^* = B^*A^* = BA$, torej AB ni nujno simetrična. Ideja Jordana iz leta 1930 je zelo preprosta. Definirajmo v J_n nekoliko „popravljen“ produkt $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$. Tedaj je $A \circ B$ vedno simetrična matrika in (J_n, \circ) tako postane kolobar. Seštevanje v njem je kar običajno seštevanje matrik, saj je vsota simetričnih matrik simetrična. Produkt \circ imenujemo jordanjski

produkt. Vsi kolobarji, ki smo jih navajeni iz visokošolske matematike (cela števila, realna števila, matrike, zvezne funkcije, analitične funkcije na disku itd.), so asociativni, kar pomeni, da v njih velja identiteta $a(bc) = (ab)c$. Z drugimi besedami to pomeni, da je rezultat množenja neodvisen od vrstnega reda izvajanja operacij. Toda preprost račun pokaže, da velja

$$(a \circ b) \circ c = \frac{1}{4}(abc + bac + cba + cab),$$

$$a \circ (b \circ c) = \frac{1}{4}(abc + acb + bca + cab),$$

kar pomeni, da v splošnem $(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c)$. Kolobar J_n je torej *neasociativen*, razen seveda v primeru $n = 1$, kjer je bac vedno enako acb , saj gre zgolj za množenje kompleksnih števil. Zdaj naravno naletimo na problem, s kakšnimi identitetami definirati razred jordanских kolobarjev. Očitno je $A \circ B$ vedno enako $B \circ A$. Drugo identiteto, ki jo želimo imeti v čimbolj enostavni obliki, dobimo z nekaj eksperimentiranja. Bralec se lahko sam prepriča, da velja $((A \circ A) \circ B) \circ A = (A \circ A) \circ (B \circ A)$. Ta identiteta se večkrat piše kar v obliki $(A^2 \circ B) \circ A = A^2 \circ (B \circ A)$ saj je $A \circ A = \frac{1}{2}(AA + AA) = A^2$. Tako dobimo naslednjo definicijo:

Definicija 1. Naj bo na neki množici J definirano seštevanje in naj bo dana preslikava $\circ : J \times J \rightarrow J$, ki je distributivna glede na seštevanje (to pomeni, da je $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$). Tedaj je (J, \circ) *jordanski kolobar*, če sta za vsaka $a, b \in J$ izpolnjeni identiteti

$$a \circ b = b \circ a, \tag{J1}$$

$$a^2 \circ (b \circ a) = (a^2 \circ b) \circ a, \tag{J2}$$

kjer je a^2 okrajšava za $a \circ a$.

Zgled 2. Naj bo K poljuben asociativen kolobar s produktom ab in elementom $\frac{1}{2}$. Tedaj je $J = (K, \circ)$, kjer je $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, jordanški kolobar. Večkrat ga označujejo s simbolom K^+ in imenujejo *jordanska simetrizacija* kolobarja K .

Zgled 3. Naj bo K asociativen kolobar in $*$: $K \rightarrow K$ aditivna preslikava z lastnostjo $(ab)^* = b^*a^*$ (lahko si predstavljamo, da je K kar algebra kompleksnih $n \times n$ matrik). Tedaj je podmnožica simetričnih elementov $J = \{a \in K; a = a^*\}$ jordanški kolobar. Očitno gre za podkolobar kolobarja K^+ . Včasih ga označujejo s simbolom $\text{Symm}(K)$, kar je okrajšava za angleško besedo *symmetric*. Nekateri avtorji uporabljajo namesto simetrični tudi izraz *hermitski* in skladno s tem označujejo $J = \text{Herm}(K)$.

Zgled 4. Naj bo F obseg in V vektorski prostor nad tem obsegom. Naj bo $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow F$ bilinearna forma. Na tem mestu velja poudariti, da \langle , \rangle ni nujno skalarni produkt, tudi če je $F = \mathbb{R}$ ali $F = \mathbb{C}$. Leta ima namreč pomembno dodatno lastnost, ki jo imenujemo pozitivnost.

To pomeni, da je pri skalarnem produktu $\langle x, x \rangle$ nenegativno število za vse $x \in V$. Definirajmo $J = F \oplus V$, produkt v J pa naj bo dan s formulo

$$(\alpha + x) \circ (\beta + y) = \alpha\beta + \langle x, y \rangle + \alpha y + \beta x.$$

Daljši, toda elementaren račun nas prepriča, da je J res jordanska algebra nad obsegom F . Imenuje se *spinski faktor*, ime pa so ji dali fiziki, ker zadošča kanoničnim antikomutatorskim relacijam v svojem notranjem delu V . Spinskih faktorjev je seveda neskončno, saj lahko menjamo obseg in dimenzijo prostora V . Avtorji, ki uporabljajo ednino, z izrazom spinski faktor mislijo na *napotek* za konstrukcijo take algebre, ki ni odvisen od lastnosti obsega F ali prostora V .

Zgled 5. V uvodu že omenjeni Adrian Albert je odkril, da lahko iz vsakega obsega konstruiramo jordansko algebro, ki ima vedno dimenzijo 27 in je ni mogoče dobiti na načine, opisane v zgledih 2–4. Ta konstrukcija vsebuje še tri proste konstante, zato je nad istim obsegom lahko več različnih Albertovih algeber. Različne izbire prostih konstant lahko vodijo k isti algebri, zato je število Albertovih algeber nad obsegom F odvisno od notranje strukture le-tega. Kompleksna Albertova algebra je ena sama, medtem ko sta realni Albertovi algebri dve. Dokaz, da je Albertova algebra res jordanska algebra, je kar zapleten. Skupaj s konstrukcijo ga najdemo v [2]. Še bolj zahteven je dokaz, da teh algeber ne moremo dobiti z nobeno od konstrukcij iz zgledov 2–4. Zelo lahko pa je videti, da je Albertova algebra vedno 27-dimenzionalna. Tehnične podrobnosti konstrukcije bomo opustili, bralcu, ki mu je neasociativnost vsaj nekoliko domača pa v pomoč povejmo, da v ozadju stojijo oktonioni. V zvezi z Albertovimi algebrami še vedno obstajajo nerešeni problemi. Glej na primer [3].

Zdaj smo v bistvu navedli vse najpomembnejše zglede jordanskih algeber, saj velja:

Izrek Efima Zelmanova. *Vsaka „dovolj lepa“ in „nesestavljena“ jordanska algebra je dobljena z enim izmed načinov, ki so opisani v zgledih 2–5.*

V strukturni teoriji algeber obstaja določena paralela s teorijo naravnih števil. S kombinacijami (množenjem) praštevil lahko dobimo vsako naravno število. Tako tudi pri algebrah obstajajo osnovni gradniki, ki jih ne moremo več razstaviti na kombinacije (direktne vsote) manjših algeber. Uveljavljeni tehnični izraz za take nesestavljene objekte je *praalgebra*.

Izraz „dovolj lepa“ ima svojo analogijo v teoriji zveznih funkcij. Tam bi bili „dovolj lepi“ objekti tiste funkcije, ki so odsekoma odvedljive in tako geometrijsko zadovoljivega obnašanja. Iz analize pa vemo, da obstajajo funkcije, ki so povsod zvezne, pa v nobeni točki odvedljive. Le-te so potemtakaem „premalo lepe“. Še v začetku 20. stoletja so nekateri vidni matematiki javno (in ohranjeno v pisnih virih) predavali svojim študentom, da gre pri teh funkcijah zgolj za patološke primere, ki nikomur ne koristijo ter da je

njihov študij, ki je bil takrat v precejšnjem razmahu, izgubljanje časa. Danes se je pogled nanje precej spremenil, saj so fiziki opazili, da jih nekateri pojavi spominjajo na čudne patološke funkcije, o katerih so nekoč slišali, pa po diplomi pozabili nanje. Tudi matematična teorija tega Brownovega gibanja, kot se pojav imenuje, uporablja zvezne, nikjer odvedljive funkcije. Pri jordskih algebrah je znano, da obstajajo degenerirane (nujno neskočno dimenzionalne) praalgebre. Vsakemu elementu x jordske algebre J pripada operator U_x , ki se imenuje kvadratična reprezentacija elementa x . V algebrah, ki smo jih našli v zgledih, velja, da iz $x \neq 0$ sledi $U_x \neq 0$. Z drugimi besedami: neničelni elementi imajo neničelne reprezentacije. Algebra, v kateri je $U_x = 0$ pri nekem neničelnem x , se imenuje degenerirana. Obstaja eksplicitna konstrukcija ene same take algebre, ki je nastala približno leta 1970. Struktura degeneriranih jordskih praalgeber je še povsem neraziskano področje. Nikomur še ni uspelo formulirati kake smiselne, četudi delne, domneve, ki bi jo drugi poskusili dokazati. Priznati pa je treba, da se zelo malo matematikov zanima za ta problem, saj, v nasprotju z neodvedljivimi funkcijami, ni očitno, da bodo take algebre kdaj doživele kakršnokoli uporabo.

Dokaz izreka Zelmanova, zapisan v povprečnem matematiku nespecialistu dostopni obliki, bi nedvomno obsegal vsaj 500 strani. Tudi v knjigah za specialiste tega dokaza za zdaj še ni. Preden lahko preberemo originalne članke, moramo poznati vsaj Jacobsonovo knjigo [2]. Leta je precej zajeten podiplomski učbenik, vendar so začetna poglavja razumljiva brez kakšnega posebnega predznanja, razen morda linearne algebre. Učbenik [4] je v celoti razumljiv boljšim dodiplomcem in obravnava poleg jordskih tudi alternativne algebre. Podoben, a dosti obsežnejši in zahtevnejši je učbenik [7]. Monografija [1] je zelo lepo pisana in primerna za tiste, ki so bolj analitiki kot algebraiki. Algebraični del je zožen na opis tistih tehnik, ki se kasneje dejansko uporabljajo v (harmonični) analizi. Monografija [5] je za začetnika najbrž prezahtevna, ker premalo pove o elementarnih delih jordske teorije, je pa sicer gladko berljiva. Knjigi [3] in [6] pa nista učbenika, ampak so to zapiski, ki jih je dobro prebrati zaradi motivacije in globalnega občutka o možnih uporabah jordskih algeber. V teh dveh knjigah je tudi obsežen seznam modernejše raziskovalne literature, predvsem člankov.

LITERATURA

- [1] J. Faraut in A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Science Publications 1994.
- [2] N. Jacobson, *Structure and Representation of Jordan Algebras*, Amer. Math. Soc. 1968.
- [3] *Jordan Algebras*, W. Kaup, K. McCrimmon in H. P. Pettersen: uredniki, Walter de Gruyter 1994.
- [4] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press 1966.
- [5] T. A. Springer, *Jordan Algebras and Algebraic Groups*, Springer Verlag 1973.
- [6] H. Upmeyer, *Jordan Algebras in Analysis, Operator Theory and Quantum Mechanics*, Amer. Math. Soc. 1987.
- [7] A. Zhevlakov, K. A. Slinko, A. M. Shestakov in I. P. Shirsov, *Rings that are Nearly Associative*, Academic Press 1982.

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI KORAK K HEISENBERGOVEMU MIKROSKOPU

JANEZ STRNAD

PACS 32.80.-t

Pri uklonskem poskusu s curkom helijevih atomov na stoječem elektromagnetnem valovanju so neposredno opazovali, kako učinkuje spontano sevanje na atom. Ob sevanju se zaradi odnosa zmanjša krajevna koherentnost v prečni smeri v curku atomov in postane zaradi tega interferenčna slika manj ostra. V poskusu je mogoče videti prvi korak k ureščitvi Heisenbergovega mikroskopa, s katerim se pri namišljenem poskusu prepričamo, da ne moremo hkrati ostro določiti koordinate in ustrezne komponente gibalne količine delca.

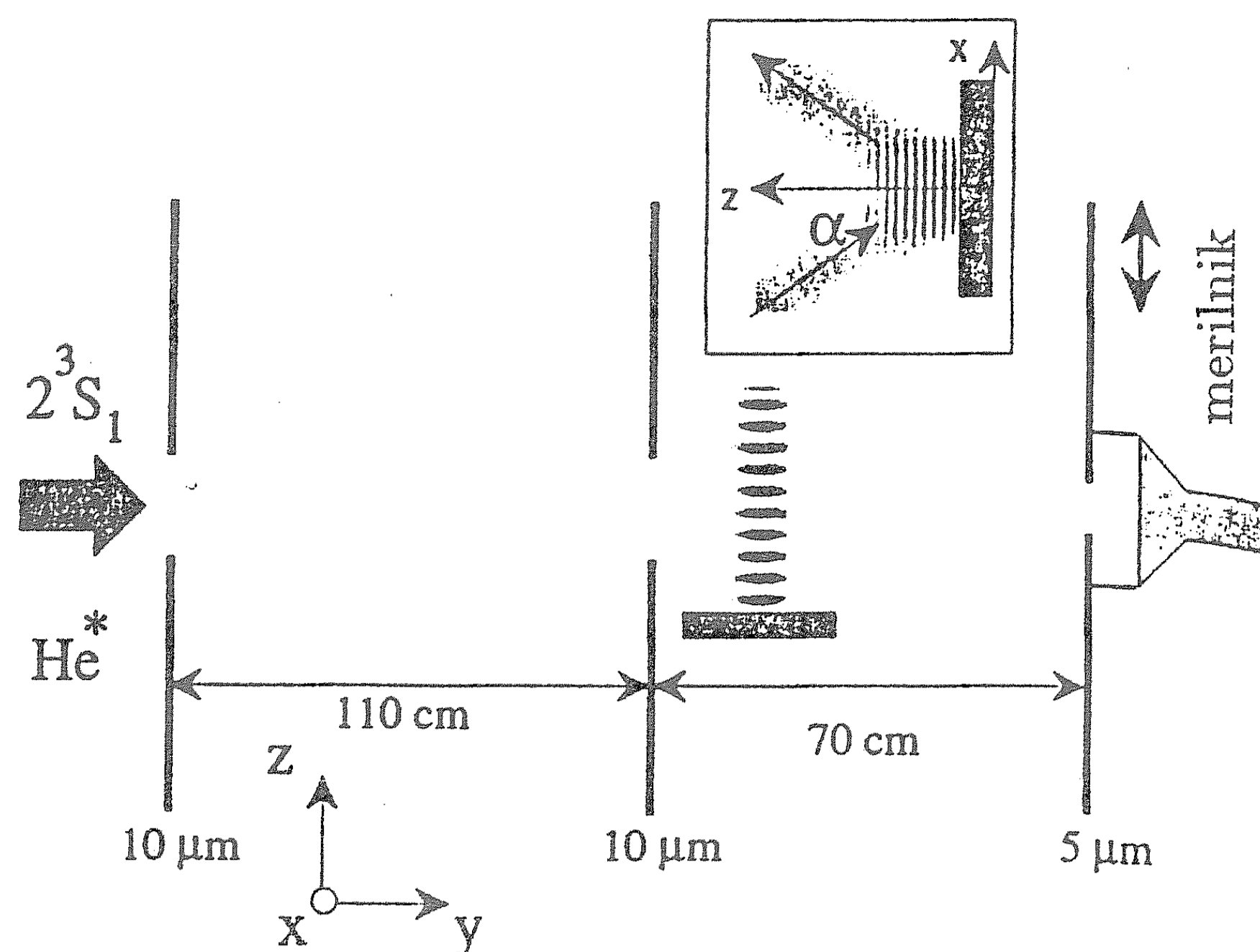
UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS A STEP TOWARD THE HEISENBERG MICROSCOPE

In a diffraction experiment with a beam of helium atoms on standing light waves the influence of spontaneous emission on an atom was shown directly. Owing to the emission the transverse coherence in the beam is diminished and the contrast of the interference pattern decreases. The experiment can be interpreted as a first step toward a Heisenberg microscope by means of which in a thought experiment it is ensured that the coordinate and the corresponding component of momentum of a particle cannot be determined simultaneously.

Fiziki z univerze v Konstanci so združili zamisli svojega atomskega interferometra [1] in interferenčnega poskusa s curkom atomov na stoječem elektromagnetnem valovanju [2], da so v podrobnosti zasledovali vpliv sevanja na atome. Pri sobni temperaturi so v celici, skozi katero so spustili enosmerni tok, helijevi atomi prešli v metastabilno tripletno stanje 2^3S_1 . Iz celice je izhajal v vakuumsko posodo curek atomov, ki sta ga določali dve po 0,01 mm široki vzporedni reži v razmiku 1,1 m. Povprečna hitrost atomov v curku je dosegla 2,15 km/s z efektivnim odmikom $\pm 0,25$ km/s. Več kot 90% atomov v curku je bilo v metastabilnem tripletnem stanju 2^3S_1 . Centimeter za drugo režo je curek atomov šel skozi območje sevanja.

To območje je sestavljalo stoječe valovanje, ki so ga naredili z infrardečo svetlobo z valovno dolžino $\lambda_0 = 1083$ nm. V ravnini, pravokotni na curek atomov, so curek te svetlobe iz laserja usmerili na ravno zrcalo [3], [4] (sl. 1). Vpadni kot α laserskega curka na zrcalo so spreminjali med 0° in 70° in s tem vplivali na razdaljo med sosednjima vozelnima ravninama v stoječem valovanju. Razdalja $\frac{1}{2}\lambda_0/\cos\alpha$, ki ustreza razmiku med sosednjima režama v uklonski mrežici pri pravokotnem vpadu valovanja, je tako segla od $\frac{1}{2}\lambda_0$ do $\frac{3}{2}\lambda_0$.

Za poskuse te vrste so razvili laser na lantanov neodimijev heksaaluminat, ki so ga napajali s polprevodniškim laserjem in mu spreminjali valovno dolžino za kak nanometer okoli λ_0 [5]. Laserski curek so speljali v vakuumsko posodo po optičnem vlaknu. Nato so curek razširili z lečo in postavili



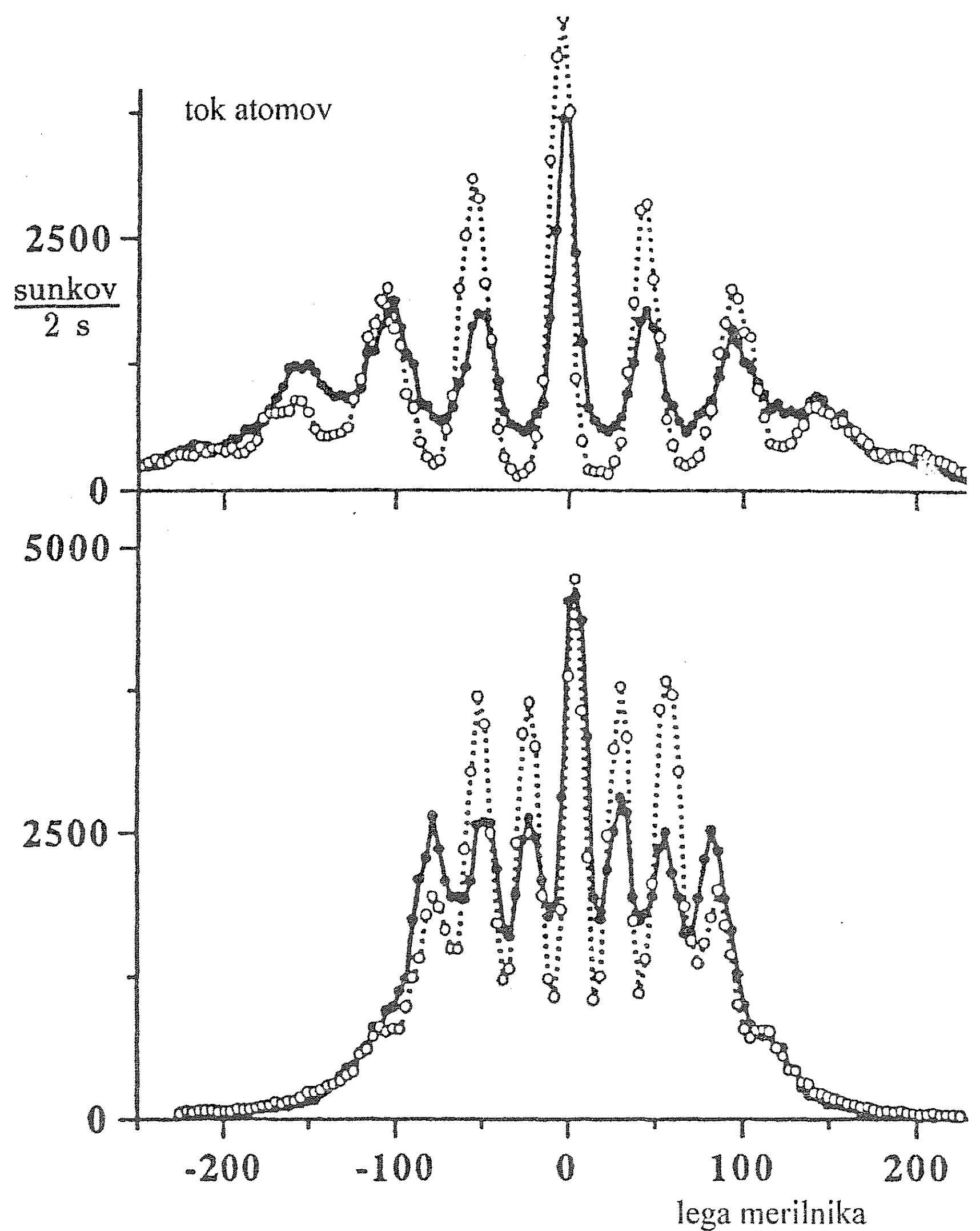
Slika 1. Poenostavljena risba naprave pri merjenju. Curek infrardeče svetlobe, ki po odboju na zrcalu da stoječe valovanje (na vstavljeni majhni risbi), je pravokoten na ravnino risbe [3].

vanj valjasto lečo ter omenjeno ravno zrcalo v goriščno ravnino valjaste leče. Curek atomov je šel skozi 0,038 mm široko območje stoječega valovanja v razdalji 0,05 mm od zrcala. V razdalji 69 cm za to "uklonsko mrežico" so z merilnikom otipali interferenčno sliko.

Pri poskusu je bilo novo to, da stoječega elektromagnetnega valovanja niso uporabili samo kot uklonsko mrežico, ampak so z njim lahko tudi vzbudili atome v curku iz metastabilnega tripletnega stanja 2^3S_1 v vzbujeno tripletno stanje 2^3P_2 . Pri vsaki od izbranih vrednosti vpadnega kota α so poskus naredili dvakrat. Najprej so naravnali valovno dolžino laserja na λ_0 , ki je ustrezala resonanci, to je prehodu iz metastabilnega tripletnega stanja 2^3S_1 v vzbujeno tripletno stanje 2^3P_2 . V tem primeru je polovica atomov v curku prešla v vzbujeno stanje in se do merilnika s spontanem sevanjem vrnila v metastabilno stanje. Razpadni čas za prehod meri namreč $\tau = 99,5$ ns, čemur ustreza razpolovna širina črte v frekvenčnem merilu $1/2\pi\tau = 1,6$ MHz. V razpadnem času so preleteli atomi komaj 0,22 mm. Nato so premaknili frekvenco laserja od resonančne za stokratno razpolovno širino, to je za 160 MHz. V tem primeru so atomi v curku ostali v metastabilnem stanju, se pravi, da niso prešli v vzbujeno tripletno stanje in niso spontano sevali. Razmik med sosednjima vozelnima ravninama v stojećem valovanju se zaradi zelo majhne spremembe valovne dolžine za 0,0006 nm ni zaznavno spremenil. Podrobnejša primerjava interferenčnih slik pa je pokazala, da so bile slike v resonanci vselej nekoliko bolj zabrisane, kot zunaj nje (sl. 2). To je bilo mogoče pojasniti z vplivom spontanega sevanja atomov, ki so v resonanci prešli v vzbujeno tripletno stanje in so se s spontanem sevanjem vrnila v metastabilno tripletno stanje.

Nekoliko podrobneje raziščimo sodelovanje atoma s sevanjem. Atome helija v curku smemo obravnavati tako, kot da sta zanje dostopni samo dve stanji: metastabilno in vzbujeno tripletno stanje. Os y postavimo v smer atomskega curka in os z pravokotno na zrcalo, na katerem se odbije laserski curek. V polklasičnem dipolnem približku opišemo sodelovanje atoma z elektromagnetnim valovanjem z energijo, ki jo sestavimo kot negativni produkt jakosti električnega polja s komponento matričnega elementa električnega dipolnega momenta v smeri polja $(\mu_e)_y$ za prehod med obema stanjema. Elektromagnetno valovanje v smeri osi z stoji in v smeri osi x potuje, tako da nastavimo jakost električnega polja kot $E_0(x, y) \cos(k_z z) \cos(k_x + \omega t)$ (sl. 1). Pri tem sta $k_x = k \sin \alpha$ in $k_z = k \cos \alpha$ komponenti valovnega vektorja v smeri osi x in osi z . Stoječi del valovanja vtisne periodično fazno odvisnost valovni funkciji atoma v smeri osi z , ki določa porazdelitev atomov v curku po komponenti gibalne količine v smeri osi z in s tem interferenčno sliko¹. Na curek atomov deluje stoječe elektromagnetno valovanje torej kot fazna mrežica. Kako močno je atom sklopljen z elektromagnetnim poljem, pove Rabijeva krožna frekvenca ω_R iz enačbe $\hbar\omega_R = (\mu_e)_y E_0$.

Najprej vzemimo, da je frekvenca valovanja daleč od resonančne frekvence. V tem primeru atomi helija priletijo v območje valovanja v metastabilnem tripletnem stanju in ga v tem stanju zapustijo. Med preletom območja lahko absorbira kvant s komponento gibalne količine $k \cos \alpha$ v smeri osi z , a ta kvant tudi odda. Komponenta gibalne količine atoma se ne spremeni, če kažeta komponenti gibalne količine absorbiranega in oddanega



Slika 2. Interferenčna slika kaže število sunkov, ki jih zazna merilnik, v odvisnosti od lege pri kotu $\alpha = 20^\circ$ (zgoraj) in 60° (spodaj). Pike ustrezajo valovanju v resonanci in krožci valovanju, katerega frekvenca se za 160 MHz razlikuje od resonančne frekvence [3].

¹ Odvisnosti faze $\theta(z)$ ustreza interferenčna slika, ki jo dobimo kot kvadrat absolutne vrednosti Fourierove transformacije funkcije $e^{i\theta(z)}$.

kvanta na nasprotni strani; v tem primeru atom prispeva k interferenčnemu vrhu reda 0. Komponenta gibalne količine atoma se spremeni za $2k \cos \alpha$ na eno ali drugo stran, če kažeta komponenti gibalne količine obeh kvantov na isto stran; v tem primeru atom prispeva k interferenčnemu vrhu reda 2 na eni ali drugi strani. Podobno lahko atom izmenja s sevanjem katero koli sodo število kvantov in prispeva k interferenčnemu vrhu z ustreznim sodim redom, če kažejo komponente vseh kvantov na isto stran. Tako pojasnimo interferenčno sliko, ko je frekvenca valovanja daleč od resonančne frekvence. Včasih so to obravnavali kot *stimulirani Comptonov pojav*, ker atom absorbira kvant in ga potem stimulirano izseva [2].

V resonanci je drugače; atomi helija priletijo v območje sevanja v metastabilnem tripletnem stanju in polovica jih absorbira kvant in območje zapusti v vzbujenem tripletnem stanju. Tudi pri tem pride do pojavov, ki smo jih omenili zunaj resonance. Zato atom v tem primeru s sevanjem izmenja liho število kvantov. Red interference je odvisen od tega, na katero stran kažejo komponente gibalne količine teh kvantov, a je v vsakem primeru lih. To pomeni, da se v resonanci atomi pojavijo tudi pri lihih interferenčnih redih, ki ležijo med sodimi redi. Nazadnje atom spontano izseva kvant v kateri koli smeri, preide iz vzbujenega tripletnega stanja v metastabilno in prevzame odzivno gibalno količino v nasprotni smeri. Zaradi obojega se interferenčni vrhovi, ki so daleč od resonance samo sodi, v resonanci znižajo in se izpolnijo doline med njimi (sl. 2). Interferenčna slika postane v resonanci bolj zabrisana.

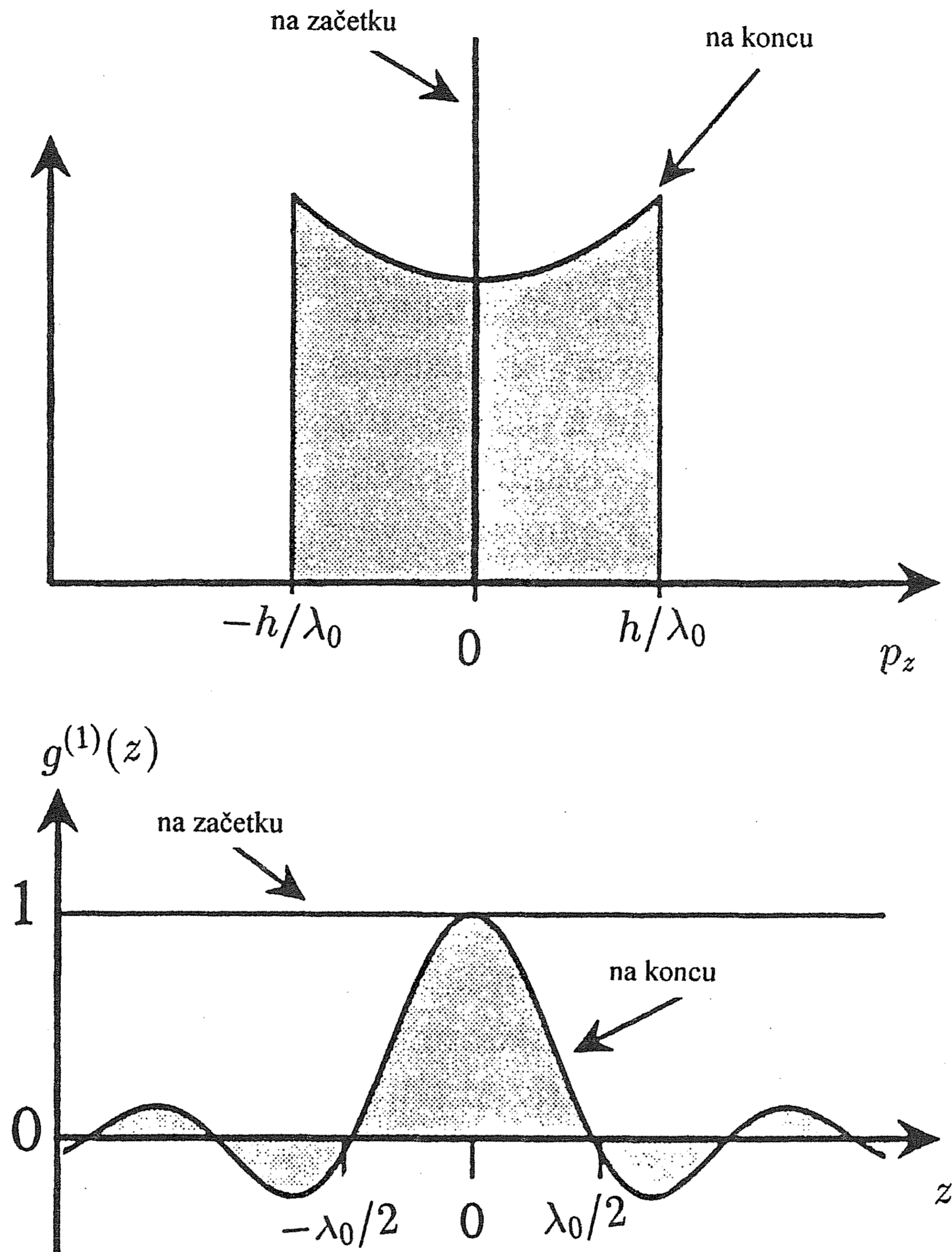
Podrobnejši opis začnemo s porazdelitvijo atomov po prečni komponenti gibalne količine. V curku atomov pred prehodom skozi območje valovanja imajo vsi atomi gibalno količino v smeri curka, tako da je komponenta gibalne količine p_z v prečni smeri, to je v smeri osi z , enaka nič. Porazdelitev atomov po prečni komponenti gibalne količine ima zelo oster in visok vrh pri $p_z = 0$. Po prehodu skozi območje valovanja v resonanci preide polovica atomov v curku iz metastabilnega tripletnega stanja v vzbujeno tripletno stanje in se s sevanjem v vse mogoče smeri vrne v metastabilno stanje. Ti atomi imajo zaradi odriva pri sevanju komponente gibalne količine p_z skoraj enakomerno porazdeljene med $-h/\lambda_0$ in h/λ_0 .

Porazdelitev atomov po prečni komponenti gibalne količine določa verjetnostna gostota $\sigma(p_z) = \phi(p_z)^* \phi(p_z)$ z valovno funkcijo v reprezentaciji gibalne količine $\phi(p_z)$, ki jo da Fourierova transformacija valovne funkcije $\psi(z)$ v koordinatni reprezentaciji: $\phi(p_z) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int \psi(z) e^{-ip_z z/\hbar} dz$ [6]. Porazdelitvi atomov po gibalni količini priredimo *prečno koherenčno funkcijo* v eni razsežnosti:

$$g^{(1)}(z) = \int \psi^*(z') \psi(z' - z) dz' = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int \sigma(p_z) e^{ip_z z/\hbar} dp_z.$$

V vpadnem curku dobimo z valovno funkcijo $\psi(z) \propto e^{ip_z z/\hbar}$ koherenčno funkcijo $g^{(1)}(z) \propto \delta(p_z = 0)$. Za curek atomov po prehodu skozi

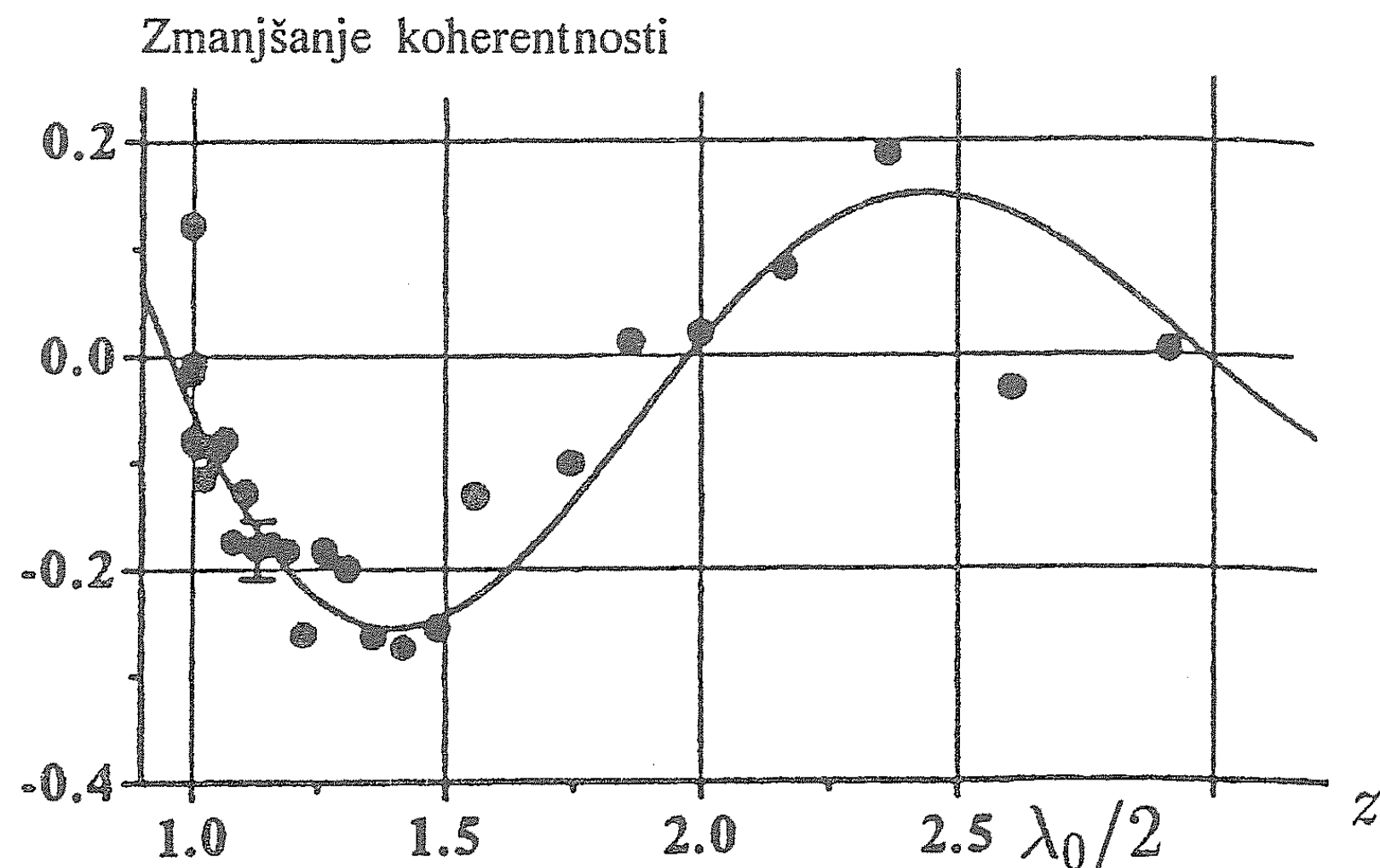
stoječe valovanje po resonančni absorpciji in sevanju pa sledi $g^{(1)}(z) \propto \sin(2\pi z/\lambda_0)$, če vzamemo približno $\sigma(p_z) = \text{konst.}$ med $-h/\lambda_0$ in h/λ_0 (sl. 3).



Slika 3. Porazdelitvi atomov v curku po prečni komponenti gibalne količine. Na začetku je prečna komponenta atomov v usmerjenem curku enaka nič. Po prehodu skozi stoječe valovanje z resonančno frekvenco preide polovica atomov iz metastabilnega stanja v vzbujeno stanje in se s sevanjem v vseh mogočih smereh vrne v metastabilno stanje. Zaradi odziva pri sevanju imajo ti atomi prečno komponento gibalne količine na območju med $-h/\lambda_0$ in h/λ_0 (zgoraj). Prečna koherenčna funkcija je za začetno porazdelitev neodvisna od prečne lege, za končno pa ima značilno odvisnost z vrhom pri $z = 0$ (spodaj) [3].

Curka nikoli ne sestavljajo samo atomi v vzbujenem tripletnem stanju, ampak jih je v tem stanju v resonanci samo polovica. Zaradi tega je nekoliko težje iz izmerjenih interferenčnih slik v resonanci in daleč od resonance neposredno izluščiti izgubo prečne koherentnosti. Kot mero za izgubo te koherentnosti uporabimo Fourierovo transformacijo porazdelitve $P(p_z)$. Porazdelitev $P(p_z) = -P(p_z)$ podaja verjetnost, da atom pri spontanem sevanju v smeri osi z dobi komponentno odzivne gibalne količine p_z . Račun – tukaj mu ne kaže slediti – pripelje do krivulje $g^{(1)}(z)$, ki se dokaj dobro prilega Fourierovi transformaciji porazdelitve $P(p_z)$, izluščene iz merjenj (sl. 4).

Ob poskusu si ne moremo kaj, da se ne bi spomnili Heisenbergovega mikroskopa. Pri namišljenem poskusu določamo lego delca na osi z in ga v ta namen osvetlimo s curkom svetlobe z valovno dolžino λ v smeri te osi. Delec zaznamo, če se svetloba sipa na njem v objektiv, ki je postavljen pravokotno na os z . Nedoločenost koordinate delca se ujema z ločljivostjo mikroskopa $\delta z \approx \lambda / \sin \vartheta$, če je $\sin \vartheta$ numerična apertura. Svetloba se sipa pod neznanim kotom med $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ in $\frac{1}{2}\pi + \vartheta$ proti osi z , zato je komponenta gibalne količine delca v smeri te osi po sipanju nedoločena za $\delta p_z \approx h \sin \vartheta / \lambda$. Tako je spodnja meja za produkt nedoločenosti $\delta z \delta p \approx h$. Pri sipanju ostane atom v začetnem stanju.



Slika 4. Fourierova transformacija porazdelitve $P(p_z)$, ki so jo izluščili iz izmerjenih interferenčnih slik, se dokaj dobro ujema z izračunano korelacijsko funkcijo prvega reda s Sl.3. Na vodoravno os je nanesena koordinata z v enotah $\frac{1}{2}\lambda_0$, torej $2z/\lambda_0 = 1/\cos \alpha$ [3].

Opisani poskus bi se približal poskusu s Heisenbergovim mikroskopom, če bi ga dopolnili, tako da bi zaznavali spontano sevanje. Z lečo in merilnikom fotonov bi lahko dosegli, da bi prispevali k interferenčni sliki samo atomi, ki so sevali v prostorski kot leče z odprtino 2ϑ . Tako dobljena interferenčna slika naj bi se zopet izostrila, saj bi zmanjšali nedoločenost gibalne količine. V duhu namišljenega poskusa bi se povečala nedoločenost koordinate z in zmanjšala nedoločenost komponente gibalne količine, če bi zmanjšali odprtino 2ϑ . Morda bodo poskušali to uresničiti, čeprav naloga ne bo lahka. Že zdaj so pri poskusu prvič naravnost izmerili vpliv sevanja atoma na prečno koherentno funkcijo.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Atomski interferometer*, Obzornik mat. fiz. **38** (1991), 151.
- [2] J. Strnad, *Interferenčni poskusi s curkom atomov na svetlobi*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987), 87.
- [3] T. Pfau, S. Spälter, Ch. Kurtsiefer, C. R. Ekstrom, J. Mlynek, *Loss of spatial coherence by a single spontaneous emission*, Phys. Rev. Lett. **73** (1994), 1223.
- [4] S. Ulbig, *Ein Gedankenexperiment wird Wirklichkeit*, Phys. Bl. **51** (1995), 6.
- [5] S. C. Adams, J. Vorberg, J. Mlynek, *Single-frequency operation of a diode-pumped lanthanum-neodymium-hexaaluminate laser using a twisted-mode cavity*, Optics Letters **18** (1993), 420.
- [6] J. Strnad, *Fizika, 3.del*, DZS, Ljubljana 1988, str. 189.

Diracov slavni rek o interferenci: foton ali dva?

Kar naprej trajajo prepiri o tem, ali lahko rečemo, da dva fotona interferirata drug z drugim ali ne. Težava izvira iz Diracove izjave, ki velja zdaj za sveto pismo. Dirac je v razpravi o interferenci, na primer v Michelsonovem interferometru, pripomnil, da „Vsak foton interferira potemtakem samo s samim seboj. Dva različna fotona ne moreta interferirati.” S trditvijo je nastopil proti absurdni sliki dveh fotonov, ki požreta ali ojačita drug drugega. Tedaj si ni mislil, do kakšnih strašnih neprilik lahko pripelje tako naivna trditev.

Loradour in sodelavci so pokazali, da interferirata curka iz dveh laserjev, kar ne preseneti nikogar, ki pozna klasični elektromagnetizem. Kot so zapisali, so vsaj od leta 1963 dalje opazovali interferenco iz dveh ločenih optičnih izvirov. Čeprav je poskus Loradoura in sodelavcev klasičen, ne kvanten, ga pojasnijo pravilno, ko pravijo, da je Diracova trditev napačna. Toda to povedo takole: “Dva različna fotona lahko interferirata.” Zopet je način izražanja enako poenostavljen (in brez pomena) kot Diracov. Wallace ter Davis in Parigger so jim očitali to poenostavljeno trditev na dokaj zapleteni osnovi, ki ni nepravilna, vendar pa se mi zopet zdi, da zgreši najpomembnejšo točko.

V kvantni mehaniki ne interferirajo delci, ampak verjetnostne amplitude za določene dogodke. Dejstvo, da se verjetnostne amplitude seštevajo kot kompleksna števila, je odgovorno za vse interference v kvantni mehaniki. Ko nas zanima, ali zaznamo en sam foton, zlahka zdrsnemo v trditev, da foton interferira s samim seboj. Če na drugi strani obravnavamo dvofotonska stanja, še vedno srečamo mnogovrstne interferenčne pojave, toda povzročili bi neznosno zmešnjavo, če bi jih hoteli pojasniti s fotoni, ki interferirajo drug z drugim. S prijemi nelinearne optike ni težko, na primer, ustvariti razmer, v katerih interferirata amplituda za stanje z enim samim modrim fotonom in amplituda za drugo stanje z dvema rdečima fotonoma. Kvantna mehanika dopušča tako interferenco in še veliko drugih, toda v tej zvezi ni smiselno govoriti o fotonih, ki interferirajo s samim seboj ali drug z drugim.

Če povzamemo: omenjeni trije članki in Diracov rek ležijo na zapuščenem polju. Čas je, da pustimo počivati slavni rek v miru, da se spominjamo Diraca in ga častimo za njegove čudovite prispevke k fiziki in da mu odpuščamo, da je v zgodnjih dneh kvantne mehanike zapisal zelo poenostavljeno pripombo, ki je odtlej zasejala zmedo med fiziki.

Roy Glauber¹

¹ R. Glauber je uvedel koherentna stanja v kvantno optiko. Sestavek je izšel kot pismo uredniku *American Journal of Physics* **63** (1995) 12. Članki, na katere se sklicuje, so bili omenjeni v sestavku *Interferenčni poskus z laserjema*, *Obzornik mat. fiz.* **41** (1994) 187. Utrinek je izbral in prevedel Janez Strnad.

NOVE KNJIGE

BOHTE Z., Uvod v numerične metode, DMFA Slovenije, Ljubljana 1995, 138 str.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je leta 1995 v Knjižnici Sigma izdalo knjigo *Uvod v numerično računanje*, ki jo je napisal profesor Zvonimir Bohte.

Glavni problem numeričnega računanja je, da v računalniku ne moremo predstaviti vseh števil, ampak le končno mnogo. Tako pri numeričnem računanju vedno računamo s približki, pri vsaki računski operaciji pa moramo rezultat ponovno aproksimirati s predstavljenim številom. Zaradi tega se pri računanju pojavijo zaokrožitvene napake, ki lahko na koncu pripeljejo do tega, da se rezultat popolnoma razlikuje od pričakovanega.

Če želimo z numeričnim računanjem priti do spodobnih rezultatov, moramo poznati ozadje nastanka zaokrožitvenih napak in račune preoblikovati tako, da napake ostanejo znotraj zelenih mej. S tem se ukvarja analiza zaokrožitvenih napak, katere osnove so predstavljene v knjigi *Uvod v numerične metode*.

Knjiga je razdeljena na tri poglavja. Prvo obravnava pojem aproksimacije s predstavljenimi števili. Tu zvemo, kaj je aproksimacijska funkcija, ki številu priredi predstavljen približek. Predstavljeno je več najpogostejših aproksimacijskih funkcij, kot so zaokrožanje, rezanje, dodajanje in druge.

V drugem poglavju je podrobneje predstavljena predstavitev števil s stalno piko, v tretjem pa predstavitev s premično piko, ki se uporablja v veliki večini današnjih računalnikov. V obeh primerih sta obravnavani aproksimaciji z zaokrožanjem in rezanjem. Vsako poglavje vsebuje obravnavo zaokrožitvenih napak, ki nastanejo pri osnovnih štirih računskih operacijah. Tu zvemo, da pri seštevanju in odštevanju v stalni piki nimamo težav, imamo pa jih pri množenju in deljenju. V nasprotju s tem pri računanju s premično piko nastopijo zaokrožitvene napake pri vseh štirih osnovnih operacijah.

V nadaljevanju avtor pokaže, kaj se pri numeričnem računanju dogaja z osnovnimi računskimi zakoni za seštevanje in množenje. Vedno lahko računamo le na komutativnost, medtem ko zakona asociativnosti in distributivnosti v splošnem ne držita. To že pomeni, da je pri numeričnem računanju vrstni red operacij zelo pomemben.

Glavni del obeh poglavij pa je namenjen analizi zaokrožitvenih napak, kjer zvemo vse o direktni in obratni analizi. Obakrat gre za analizo, ki jo naredimo pred računanjem ali po njem, po možnosti neodvisno od konkretnih podatkov. Ko vnesemo naše podatke, lahko potem izračunamo oceno za napako dobljenega rezultata. Bolje bi seveda bilo, če bi vedno hkrati z izračunanim približkom dobili tudi oceno za njegovo napako. S tem se ukvarja sprotna analiza. Pri sprotni analizi moramo znati sprotno oceniti napako za vsako računsko operacijo, v knjigi pa so izpeljane ocene za osnovne aritmetične operacije.

Na koncu je s številnimi zgledi predstavljeno, kako se lahko s preoblikovanjem računskih procesov izognemo numerični nestabilnosti. Glavna krivca za numerično nestabilnost sta deljenje z majhnimi števili in pa odštevanje približno enakih števil, zato se moramo temu po možnosti izogniti.

Knjiga je nastala kot razširitev razdelka Računanje s približki v učbeniku Petra Legiše Matematika: prvi letnik. Pojmi iz tega razdelka so poglobljeni in posodobljeni, zato je knjiga med drugim dobrodošla tudi za vse srednješolske učitelje.

Knjiga je napisana v jasnem slogu, vsebuje pa tudi veliko numeričnih zgledov, ki še dodatno pripomorejo k razumevanju snovi.

Bor Plestenjak

OMLADIČ M. in OMLADIČ V., MATEMATIKA IN DENAR, knjižnica Sigma, DMFA Slovenije, Ljubljana 1995, 142 strani

Ob koncu preteklega leta je izšla v knjižnici Sigma kot 58. po vrsti zelo zanimiva knjižica *Matematika in denar*. V to zbirko je bila uvrščena zaradi nezahtevnega predznanja, dostopnosti podajanja in tudi zaradi zanimivosti za širši krog bralcev. Knjižica obravnava snov, ki spada na široko področje uporabe matematike v ekonomiji, posebej pa na tisti del, ki je povezan z denarjem in ustreznimi poslovnimi odločitvami.

Vsebina knjižice je razdeljena na 9 poglavij, ki so med seboj le malo odvisna. V prvem poglavju *Najprej o starih časih* avtorja preletita zgodovino zapisovanja števil in razvoj računanja obresti. Naslednji dve poglavji *Kaj so obresti* in *Kje pride prav obrestni račun* sta še najbolj povezani s šolsko obravnavo obrestnega in obrestnoobrestnega računa. Z ugotovitvami in primeri uporabe bi moral biti seznanjen vsakdo, ki želi razumeti, kako banke obračunavajo obresti in kakšne so razlike med različnimi kreditnimi pogoji. *O problemih ujemanja* je naslov četrtega poglavja. To obravnava osnovne probleme ponudbe in povpraševanja, ki so rešljivi s sistemi linearnih enačb. Naslednji dve poglavji *Optimalnost* in *Nelinearnost* nas vpeljeta v osnove linearnega in nelinearnega programiranja pri reševanju raznih optimizacijskih problemov. Poglavje *Markovske verige* nas seznanja z osnovami stohastičnih procesov, zadnji dve poglavji *Odločanje* in *Skupinsko odločanje* pa nas prepričata, da se da tudi v različnih življenjskih situacijah uporabiti matematični način mišljenja.

Avtorjema je zelo dobro uspelo podajati zanimivo in koristno snov na živahen način v slogu, ki je zasnovan na številnih primerih iz življenja. Tudi zahtevnejša razmišljanja so podana na naraven način, tako da lahko tudi bralec, ki nima dovolj predznanja, sledi toku misli in verjame izpeljanim sklepom. Za tiste bralce, ki čutijo potrebo po izpopolnitvi potrebnega predznanja iz nekaterih poglavij linearne algebre in analize, sta avtorja v dodatku razložila najnujnejše.

Knjižico, ki izpolnjuje precejšnjo vrzel v slovenski matematični literaturi, toplo priporočamo v branje dijakom, njihovim učiteljem, študentom in sploh vsem, ki želijo spoznati uporabo matematike na ekonomsko-poslovnem področju.

Zvonimir Bohte

FIZIKA V ŠOLI

Obzornik je svoj čas sproti komentiral, kar je bilo novega pri nas na področju matematike in fizike, zlasti nove učbenike in drugo literaturo. Poskusil bom obnoviti tradicijo ob priložnosti nedavnega rojstva nove revije *Fizika v šoli*. Izdaja jo Zavod za šolstvo, doslej pa sta izšli dve številki s skupno 130 stranmi in 35 prispevki. V uredniškem odboru so Marjan Hribar (glavni urednik), Seta Oblak, Marko Munih, Lidija Babič in Maruša Potokar.

Vsebina je dokaj pisana in vsekakor živahna. Na začetku obeh številki sta nekakšna uvodna članka, ki sta bolj v slogu kramljanja, brez izrazitega dokončnega cilja. V prvem, z naslovom „Zakaj vidimo v ‘vidnem’ delu elektromagnetnega spektra”, piše Samo Kralj na široko o čutilih. Začne z infrardečim čutilom kače klopotače in s potresomerom škorpijona, konča pa z nevrološko platjo človeškega vida. Branje pa bi bilo za fizike bolj mikavno, če bi bilo več kvantitativnih podatkov.

Članek Janeza Ferbarja v drugi številki, „Pomisli o toploti in svetlobi,” zbuja resnejše dvome, ker je v njem nekaj polovičnih pojasnil in primerov ugibanja, za povrh pa še neslanih duhovitosti. Nekaj primerov:

„Entropija nastaja v hrbtu, ki ga nastavljamu soncu. ... Zdaj torej vemo, zakaj učiteljice in modrasi oboji poiščejo isto mesto, zato da se grejejo.” – „Ekstenzivne količine so tiste, katerih vrednost v celotnem sistemu je večja kot v delu sistema.” Ali se to ne bi dalo natančneje povedati? Ali je mar površina telesa ekstenzivna količina? – „Pri izmenjavi energije z delom se med telesi pretaka poleg energije še gibalna količina.” Ko preskušamo trditev na zgledih, nas zmede kolesar, ki pospešeno vozi po ravni cesti. Gibalno količino dobiva od ceste, energije pa ne. – „Gibalna količina in entropija sta prenašalca energije pri svetlobi.” Vse kaže, da ima ta trditev samo pesniško vrednost, kajti ni je mogoče niti potrditi niti ovreči. Potemtakem je vseeno, ali ji zaupamo ali ne. Porednež bi še vprašal, ali ni morda res nasprotno, da je energija prenašalec entropije. Sploh pa pretirano govorjenje o entropiji svetlobe lahko v šoli sproži težave. Kaj naj odgovorimo, če bi učenec hotel zvedeti, koliko entropije nosi enobarven svetlobni curek? – Še primer domneve, pri kateri avtor niti ne pove, kaj bi lahko pomenila: „Po mojem lahko zaznavamo tudi hitrost nastajanja entropije.”

Glavni krivec za opisano polomijo je pravzaprav urednik Marjan Hribar, ki je prispevek nekritično sprejel, namesto da bi zahteval korenite popravke. Tudi pri raznih malenkostih se pozna nenatančno urednikovanje, npr. pri nedoslednem zapisu matematičnih izrazov. Ponekod zasledimo „pikicomanijo”, to je zapisovanje navadnih produktov s pikami, čeprav taka pisava celo v šolah že prihaja iz mode.

Slaba tretjina prispevkov se ukvarja z novimi šolskimi eksperimenti in novimi pripomočki zanje. Ostanek si delijo pedagoške razprave in razna poročila, zraven pa je še nekaj astronomije, zgodovine in novic o računalniških programih za pouk fizike. Ustavil se bom samo tam, kjer je poudarek na fiziki.

Kar trije članki obravnavajo novodobne merilnike sil, ki naj nadomestijo tiste okorne, pri katerih tulec leze iz drugega tulca. Tine Golež uporablja uporovni silomer za preizkušanje izreka o gibalni količini. Uroš Platiše in Andreja Pogačnik imata za podoben namen kapacitetni silomer. Najbolj sodobna pa sta Jože Polajnar in Miran Tratnik s svojo duhovito konstrukcijo piezoelektričnega merilnika. Zanimivo bo videti, kateri merilnik bo prodrl v naše šole. Stavil bi na piezoelektričnega.

Prav mikaven je poskus s trenjem prečke, ki jo položimo prek dvojice nasproti vrtečih se valjev (Vito Babič). Naprava se vede kot kak oscilator, pri čemer pa je „dušenje“ lahko pozitivno ali negativno. – Dosti poguma kažeta prispevka o vključitvi holografije v pouk fizike (Vito Babič) in o poskusih z ultrazvokom (Slavko Kocijančič). – Računalniška podpora pri poskusih se zdi včasih upravičena (npr. pri padanju z uporom, Tine Golež), včasih pa le bolj kot spodbuda za rabo računalnika (npr. pri Ohmovem zakonu, Polona Theuerschuh in Slavko Kocijančič). – Nekateri opisi imajo premalo navodil za izvedbo poskusov (npr. tisti o holografiji).

Pri pedagoških prispevkih se ne morem znebiti občutka (ali predsodka?), da so dolgočasni, posebno če so razvlečeni. Bom samo na hitro povedal: srečujemo se z rezultati preskusnih nalog, s problemi pri izbiri nalog, pa tudi s problemi in izkušnjami pri eksperimentalnih vajah učencev.

Posebno presenečenje je bila reviji priložena disketa s programoma URA in STEZICE, ki ju je izdelal Marko Munih. Prvi pričara na zaslonu računalnika uro stoparico, ki ob vsakem pritisku na gumb miške zapiše čas, ne da bi se ustavila. Na ta način lahko učinkovito zasledujemo potek kakega gibanja in na koncu še pripravimo tabelo in graf. STEZICE pa omogočajo simulacijo premega in enakomerno pospešenega gibanja.

Obzornik za matematiko in fiziko ter Fizika v šoli sta v znatni meri namenjena istim bralcem, če ne štejemo prispevkov, ki bi morda bolj spadali v Presek ali v Vzgojo in izobraževanje. Vprašati moramo torej, ali je bila novost res potrebna. Ali se ne bi dalo več doseči z združenimi močmi? Res, da se reviji po značaju precej razlikujeta in da je Fizika v šoli bolj življenjska in bližja temu, kar učitelji fizike potrebujejo. Vendar kot nekdanji udeleženec pri ustanovitvi Obzornika lahko povem, da je bilo takrat jasno in glasno sklenjeno, da to ne bo znanstvena revija in da bo med njenimi najpomembnejšimi nalogami tudi skrb za šolske probleme. Vse kaže, da se je Obzornik tej zaobljubi izneveril in da je prav to sprožilo ustanovitev nove revije. Obzornik smo tako osiromašili in ga naredili bolj dolgočasnega. Fizika v šoli, ki je najbrž za mnoge bralce bolj privlačna, pa se bo morala še strokovno izbrusiti, preden bo popolnoma ustrezala svojemu namenu.

Gotovo je bilo pred odločitvijo v prid Fizike v šoli nekaj takih pomislov in pravijo, da je bilo spočetka celo nekaj dogovarjanja. Lahko si mi-

slimo, da ni bilo uspeha zato, ker so bili pogoji tako z ene kot z druge strani pretrdi. Eni so morda želeli, da bi urednik vse vzel, brez odbiranja po kakih ostrih strokovnih kriterijih. Drugi pa so nemara postavljali prestroga merila. No, to so samo domneve – več bi lahko povedali tisti, ki so bili zraven. Vprašanje je samo, ali je premlevanje preteklosti sploh lahko koristno, kajti razcepitev je zagotovo dokončna, tako kot pri državah, občinah in fakultetah. Novorojena revija bo živela svoje življenje in prav je, da njenim ustanoviteljem čestitamo za njihovo energijo in pogum ter jim zaželimo veliko uspeha in dober sprejem pri bralcih.

Ivan Kuščer

METKI LUZAR-VLACHY V SLOVO

Nagovor na žalni seji sveta Fakultete za matematiko in fiziko

V preteklih tednih so se nam misli pogosto ustavljale pri pokojni kolegici dr. Metki Luzar-Vlachy, izredni profesorici na Oddelku za fiziko Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani.

Metka, spominjamo se te, ko si prišla na Oddelek kot izredno lepo dekle, ki se je odločilo, da jo bo fizika spremljala skozi življenje in da ji bo posvetila svoje najgloblje misli. To si storila temeljito in zelo uspešno že med študijem in ves čas po njem, ko si začela že zgodaj nizati uspehe. Takoj po diplomi si predstavila na konferenci v Krakovu novo metodo za meritev difuzijske konstante v tekočih kristalih: kombinacijo gradientnih in radiofrekvenčnih sunkovnih zaporedij. Delo je zbudilo veliko zanimanja med najbolj uglednimi kolegi na tem področju in je objavljeno v *Physical Review Letters*, eni najbolj priznanih fizikalnih revij. Nadaljevala si doktorski študij in tvoj doktorat o jedrski magnetni resonanci ogljika 13 za določanje mikroskopskega parametra urejenosti v feroelektričnih tekočih kristalih je bil lep nov prispevek v fiziki. Še več jih je sledilo. Zaradi teh uspehov smo te povabili, da se nam pridružiš na Oddelku za fiziko in začela si posredovati svoje znanje študentom. To delo te je zanimalo in veselilo. Pomembno je tudi tvoje delo v zadnjem času, to je jedrska magnetna resonanca tekočih kristalov v ničelnem polju, ki si ga ustvarila na univerzi v Berkeleyu in zanj prejela leta 1989 nagrado sklada



Borisa Kidriča. Nadaljevanje teh raziskav si predstavila lansko poletje na specializiranem kongresu Ampere na Krfu in dobila nagrado za najboljši poster.

Ob raziskovalnem delu si bila ves čas aktivna na pedagoškem področju. Predavala si fiziko I in II fizikom pedagogom in osnovni tečaj fizike za tekstilne oblikovalce. Sodelovala si tudi pri nastajanju naših računalniških povezav s svetom.

Vse to je dovolj težko breme za dobrega fizika, ti pa si poleg tega podpirala še tiste tri vogale družine, ki jih življenje nameni ženam in materam. Uspelo ti je skupaj s soprogom ustvariti srečno družino in prijeten dom za hčeri.

Metka, vso tvojo notranjo moč, neizmerno voljo do življenja in neustrašenost smo do konca spoznali v zadnjih letih, ko si se postavila po robu kruti usodi, ko si vztrajala pri raziskovalnem in pedagoškem delu, ko si našla morda prav v tej aktivnosti znova in znova dokazilo, da si močnejša od usode. Občudovali smo te in verjeli s teboj.

Ne bilo bi prav, da se naš spomin ne dotakne tudi plasti življenja, ki so vtakane med vsakodnevno delo in kažejo širino tvoje osebnosti: tvoj pogled na vse lepo, na vse, kar je naredila narava in človek kot njen del, tvoje veselje nad zasneženimi vrhovi kjerkoli na svetu in želja, da se preizkusiš na njihovih pobočjih in strminah. Kolikokrat smo se pogovarjali o teh doživetjih ali pa o njih nasprotjih – o modrih širjavah, ki so ti bile tako ljube, če se le Eol ni preveč poigraval z njimi.

Metka, občudujemo tvoje stremljenje po popolnosti, željo, spoznati svet fizike do njegovih vrhov in njegove današnje meje. Narediti, kar je največ mogoče povsod, kjer je življenje pokazalo izziv. Vsak od nas se je kaj naučil iz tega. Hvaležni smo ti za vse tvoje dosežke in prispevke k uspehom Oddelka za fiziko, kjer si s takim veseljem ustvarjala in sodelovala.

Nekje v teh natresenih mislih bi se morda moral vprašati: zakaj... Pa mi beseda in misel zastaneta. Raje ostanimo med spomini; so lepi.

Metka, hvala ti za vse.

Zvonko Trontelj

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 1995

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 20 novih članov, društvo je zapustilo 44 članov. Novi člani društva so:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 1755. AMBROŽIČ Milan | 1756. ANTLOGA Gregor |
| 1757. BUDJA Andreja | 1758. GABERŠEK Milan |
| 1759. HODNIK Tatjana | 1760. HVALICA Dušan |
| 1761. INDIHAR ŠTEMBERGER Mojca | 1762. IVANC MILOŠEVIČ Nadja |
| 1763. KASTELIC Sašo | 1764. LIPOVEC Alenka |
| 1765. LOGAR Bojan | 1766. MIRAI Gregor |
| 1767. OSOJNIK Leonida | 1768. POBERAJ Gorazd |
| 1769. SAMAŠTUR Marko | 1770. ŠAVORA Simona |
| 1771. TURNŠEK Lea | 1772. VAVPETIČ Aleš |
| 1773. VRATANAR Blaž | 1774. ZORNADA Tinkara |

Andreja Šafarič