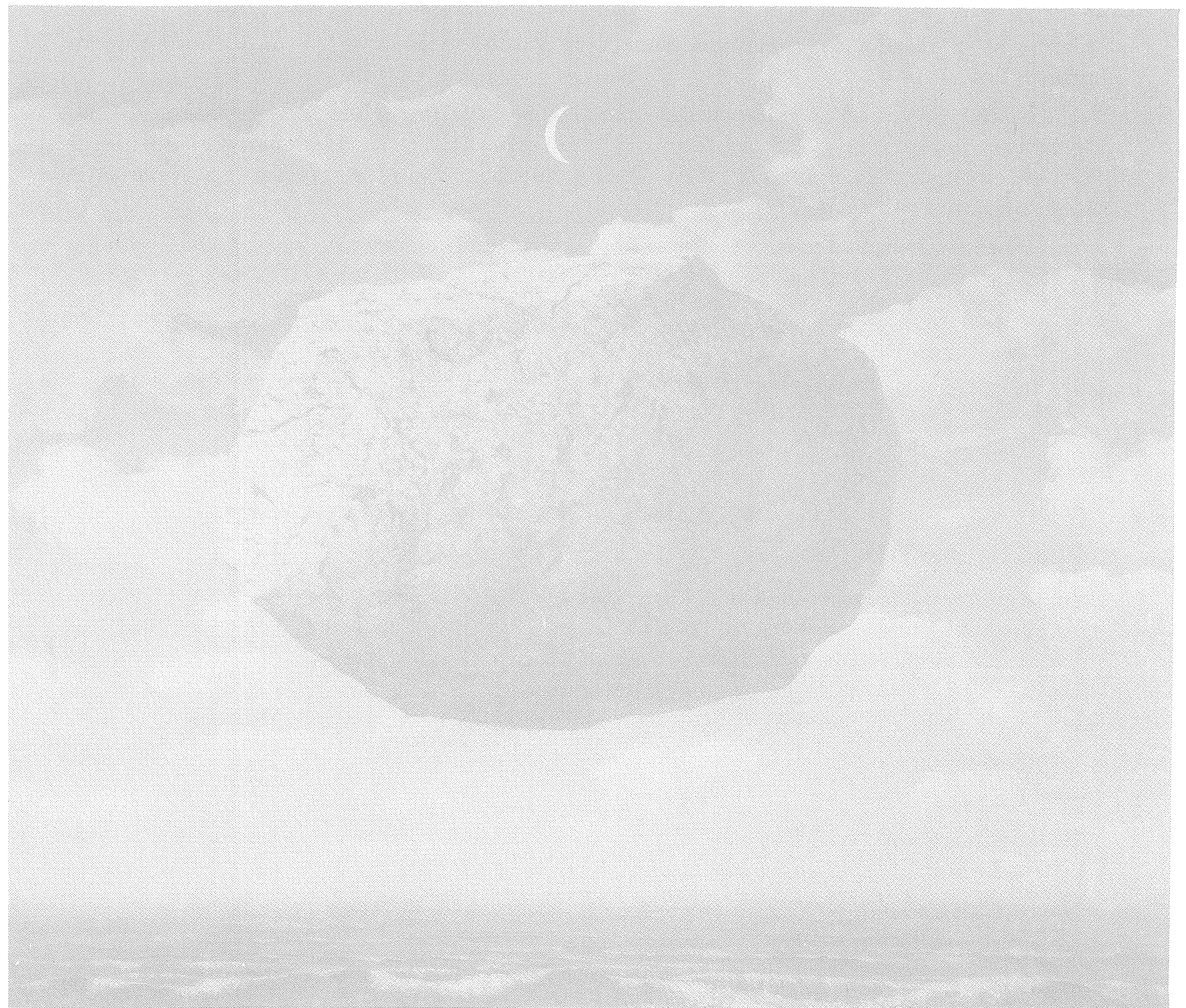


1996

Letnik 43

6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1996

letnik 43, številka 6, strani 161–192

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, žiro račun 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Bojan Magajna (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 2.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 4.600 SIT, za študente 1.150 SIT, za tujino 50 DEM. Posamezna številka za člane 440 SIT, stare številke 320 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1996 DMFA Slovenije – 1299

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

Vsote praštevil in vsote njihovih kvadratov — Sums of prime numbers and sums of their squares (Boris Lavrič)	161–167
Kvantna ravnina — Quantum plane (Bojan Magajna)	168–177
Skakanje z vrvjo — Bungee jumping (Janez Strnad)	178–182
Je mogoče učiti matematiko? — Can mathematics be taught? (Zlatan Magajna)	183–III

Vesti — News

Strokovna logika? (Ivan Kuščer)	167
Letno kazalo	III–IV

Na ovitku: Slika k članku *Je mogoče učiti matematiko*: R. Magritte, *Zenonova puščica*, 1964.

VSOTE PRAŠTEVIL IN VSOTE NJIHOVIH KVADRATOV

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (1991) 11A41, 11P32

Po Richertovem izreku je vsako naravno število, večje od 6, vsota različnih praštevil. V članku ugotovimo, da je vsako naravno število, večje od 18003, vsota kvadratov različnih praštevil, in dokažemo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $a_n \in \mathbb{N}$, da se da vsako naravno število, večje od a_n , vsaj na n različnih načinov zapisati kot vsota različnih praštevil in kot vsota kvadratov različnih praštevil.

SUMS OF PRIME NUMBERS AND SUMS OF THEIR SQUARES

By a Richert's theorem each natural number greater than 6 is a sum of different prime numbers. In this note we state that each natural number greater than 18003 is a sum of squares of different prime numbers, and show that for each $n \in \mathbb{N}$ there exists $a_n \in \mathbb{N}$ such that every natural number greater than a_n can be expressed at least on n different ways as a sum of different prime numbers and as a sum of squares of different prime numbers.

1. Obstoj razčlenitev

Med slovite nerešene probleme teorije števil sodi Goldbachova domneva, da je vsako sodo število, večje od 2, vsota dveh praštevil. Če je Goldbachova domneva pravilna, je vsako liho število, večje od 7, vsota treh lihih praštevil (zakaj?), torej so tedaj vsa naravna števila, razen 1, 2 in 3, vsote dveh ali treh praštevil. Pri tem števil 4, 6, 11 in 17 ni mogoče zapisati v obliki vsote dveh ali treh različnih praštevil. W. Sierpinski [5] je dokazal, da iz pravilnosti Goldbachove domneve sledi, da je vsako sodo število, večje od 6, vsota dveh različnih praštevil, A. Schinzel [4] pa (z isto predpostavko), da je vsako liho število, večje od 17, vsota treh različnih praštevil. Od tod brez težav sledi, da je Goldbachova domneva enakovredna naslednji:

Vsako naravno število, večje od 6, je vsota treh ali manj različnih praštevil (pri čemer tudi en sam sumand šteje za vsoto).

Tej domnevi je zelo soroden naslednji rezultat H. E. Richerta [3].

Izrek 1. *Vsako naravno število $n > 6$ je vsota različnih praštevil.*

Dokaz izreka 1 je Richert zasnoval na znamenitem izreku P. L. Čebiševa, po katerem se med poljubnim naravnim številom $n > 1$ in njegovim dvakratnikom $2n$ nahaja vsaj eno praštevilo (elementaren dokaz tega izreka lahko najde bralec v knjigi [6]), in na naslednjem pomožnem rezultatu.

Lema 2. Naj bo $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Za vsak $j \in \mathbb{N}$ naj bo S_j množica vseh števil, ki se dajo zapisati kot vsote različnih elementov množice $\{m_1, \dots, m_j\}$, torej

$$S_j = \left\{ \sum_{i \in J} m_i : J \subseteq \{1, \dots, j\} \right\}.$$

Če obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da za vsak indeks $i > k$ velja $m_{i+1} \leq 2m_i$ in S_k vsebuje m_{k+1} zaporednih naravnih števil $a+1, \dots, a+m_{k+1}$, potem je vsako naravno število $n > a$ vsota različnih členov zaporedja $(m_i)_{i=1}^{\infty}$.

Dokaz. Očitno zadošča ugotoviti, da za vsak $i \geq k$ velja inkluzija

$$I_i = \{a+1, a+2, \dots, a+m_{i+1}\} \subseteq S_i. \quad (1)$$

Dokazujemo z matematično indukcijo. Za $i = k$ je (1) predpostavka v lemi. Naj zdaj velja (1) za dani indeks $i \geq k$. Potem je

$$I_i \cup (I_i + m_{i+1}) \subseteq S_i \cup (S_i + m_{i+1}) \subseteq S_{i+1},$$

kjer zadnjo inkluzijo dobimo neposredno iz opredelitve množic S_j . Ker množico $I_i \cup (I_i + m_{i+1})$ sestavljajo natanko vsa zaporedna naravna števila od $a+1$ do vključno $a+2m_{i+1}$ in je po predpostavki $m_{i+2} \leq 2m_{i+1}$, množica S_{i+1} vsebuje $\{a+1, a+2, \dots, a+m_{i+2}\}$. Indukcijski korak je dokazan, dokaz leme pa s tem sklenjen. ■

Dokaz izreka 1. Naj bo $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ naraščajoče zaporedje vseh praštevil. Potem po izreku Čebiševa za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja $m_{i+1} < 2m_i$ (zakaj?). Ker poleg tega množica S_5 vsebuje $m_6 = 13$ zaporednih naravnih števil, začnši s 7, so izpolnjeni pogoji leme 2. ■

V izreku 1 tudi en sam sumand štejemo kot vsoto. Tako je na primer število 11 vsota različnih praštevil ($11 = 11$), čeprav se ga ne da razčleniti na vsoto dveh ali več različnih praštevil. Dokazali bomo, da je 11 edina izjema te vrste v izreku 1.

Izrek 3. Vsako naravno število $n > 6$, različno od 11, je vsota dveh ali več različnih praštevil.

Dokaz. Naj bo $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ naraščajoče zaporedje vseh lihih praštevil. Po izreku Čebiševa za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja $m_{i+1} < 2m_i$, poleg tega pa se lahko brez težav prepričamo, da množica S_6 vsebuje $m_7 = 19$ zaporednih naravnih števil, začnši z 10. Torej so izpolnjeni pogoji leme 2. Iz te sledi, da je vsako naravno število $n > 9$ vsota različnih lihih praštevil. Če tem vsotam dodamo še sumand 2, vidimo, da je vsako naravno število $n > 11$ vsota dveh ali več različnih praštevil. Dokaz izreka sklenemo tako, da števila 7, 8, 9 in 10 zapišemo kot vsote dveh različnih praštevil: $7 = 2 + 5$, $8 = 3 + 5$, $9 = 2 + 7$, $10 = 3 + 7$. ■

Opomba. Pravilnost Goldbachove domneve ni niti dokazana niti ovržena, vendar pa je doseženih nekaj globokih rezultatov, povezanih z domnevo. Med najpomembnejše prav gotovo sodi izrek I. M. Vinogradova iz leta 1937, po katerem obstaja tako število $a \in \mathbb{N}$, da je vsako liho število, večje od a , vsota treh praštevil, vsako sodo število, večje od a , pa vsota štirih praštevil. Dokaz tega izreka je zapleten in neelementaren. K. G. Borozdkinu je uspelo za število a najti oceno $a < 3^{3^{15}}$, ki pa je previsoka, da bi lahko s preskušanjem (npr. s pomočjo računalnika) ugotovili, kako je z razčlenitvijo manjših števil na vsoto treh oziroma štirih praštevil. Iz izreka Vinogradova lahko dobimo naslednji rezultat, ki ga lahko primerjamo z izrekom 1.

Vsako dovolj veliko naravno število se da zapisati kot vsota štirih ali manj kot štirih različnih praštevil.

Izrek 1 ponuja tudi naslednje vprašanje: Ali obstaja tako število a , da je vsako naravno število $n > a$ vsota kvadratov različnih praštevil? Kvadrati praštevil so mnogo redkeje posejani v množici $\mathbb{N}$ kot praštevila, pa vendar dovolj gosto in (ne)pravilno, da je odgovor na postavljeno vprašanje pritr-dilen. To bomo dokazali podobno kot izrek 1, vendar bomo pri tem uporabili krepkejšo različico izreka Čebiševa, pa še računalniškemu programu Mathematica bomo zaupali.

Čebišev je v Liouvillovi reviji objavil članek *Mémoire sur les nombres premiers*, v katerem je dokazal vrsto pomembnih izrekov o porazdelitvi praštevil. Ukvarjal se je predvsem z rastjo realne funkcije $x \mapsto \pi(x)$, kjer je $\pi(x)$ število vseh praštevil, ki ne presegajo x . Ugotovil je, da za vsak $x \geq 5$ velja ocena

$$a \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln x}, \quad (2)$$

kjer je $a = 0,92129 \dots$ in $b = 1,10555 \dots$. Če v (2) postavimo za x n -to praštevilo p_n , vidimo, da za vsako naravno število n velja

$$b^{-1} n \ln p_n < p_n < a^{-1} n \ln p_n.$$

Od tod sledi

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} < \frac{b}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\ln p_{n+1}}{\ln p_n}. \quad (3)$$

Ker zaradi $p_{n+1} < 2p_n$ velja

$$\frac{\ln p_{n+1}}{\ln p_n} < 1 + \frac{\ln 2}{\ln p_n},$$

iz (3) sledi

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} < q_n = \frac{b}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln p_n}\right). \quad (4)$$

Zdaj smo dovolj pripravljeni za osrednji del dokaza naslednjega izreka.

Izrek 4. Vsako naravno število $n > 18003$ je vsota kvadratov različnih praštevil.

Dokaz. Pomagali si bomo z lemo 2. Naj bo $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ naraščajoče zaporedje vseh kvadratov praštevil. Ker je zaporedje $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ iz (4) padajoče in ker je $q_{32} < \sqrt{2}$, za vsak indeks $i > 31$ velja $m_{i+1} < 2m_i$. S pomočjo programa Mathematica lahko ugotovimo, da poleg tega množica S_{31} (iz leme 2) vsebuje $m_{32} = 131^2$ zaporednih naravnih števil, začnši z 18004. Zdaj z uporabo leme 2 lahko sklenemo dokaz. ■

Že s pomočjo žepnega računalnika lahko ugotovimo, da se števila 18003 ne da zapisati v obliki vsote kvadratov različnih praštevil, torej se meje 18003 v izreku 4 ne da zmanjšati.

2. Število razčlenitev

Kako se število razčlenitev števila $n \in \mathbb{N}$ na vsoto različnih praštevil oziroma na vsoto njihovih kvadratov spreminja z večanjem n (pri tem razčlenitvi razlikujemo, kadar sta množici sumandov, ki ju tvorita, različni)? Za dokaz grobe ocene, povezane s tem vprašanjem, bomo potrebovali nekaj priprave.

Najprej naj spomnimo bralca na slavni *izrek o praštevilih*, po katerem velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x \ln^{-1} x} = 1.$$

To Gaussovo domnevo sta leta 1896 neodvisno drug od drugega s sredstvi teorije analitičnih funkcij dokazala J. Hadamard in C. de la Vallée Poussin. Več o tem lahko bralec izve na primer v knjižicah [1] in [7], v monografiji [2] pa najde sorazmerno elementaren (vendar zelo zahteven) dokaz izreka o praštevilih. Navedeni izrek bomo uporabili pri dokazu enega od naslednjih pomožnih rezultatov.

Lema 5. Naj bo $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil, ki izpolnjuje pogoje leme 2. Če za $b \in \mathbb{N}$ obstajata taka indeksa p in r , da velja $k \leq p < r$ in

$$a + m_{r+1} + 1 \leq b \leq a + m_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{p+1} m_j,$$

potem se da b zapisati vsaj na $r - p + 1$ način kot vsota različnih členov zaporedja $(m_i)_{i=1}^{\infty}$.

Dokaz. Za vsak indeks $t \geq k$ naj bo

$$J_t = \{a + 1, a + 2, \dots, a + m_{k+1} + \sum_{j=k+1}^t m_j\},$$

$$K_t = \{a + m_{t+1} + 1, a + m_{t+1} + 2, \dots, a + m_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{t+1} m_j\}.$$

Pri $t = k$ vsote pod sumacijskim znakom v definiciji množice J_k ni, torej se J_k ujema z množico I_k iz leme 2. Po predpostavki je tedaj $J_k \subseteq S_k$. Dokažimo z matematično indukcijo, da za vsak $t \geq k$ velja

$$J_{t+1} = J_t \cup K_t \subseteq S_{t+1}. \quad (5)$$

Ker je $J_k \subseteq S_k \subseteq S_{k+1}$ in ker iz definicije množice S_{k+1} ter dejstva $K_k = J_k + m_{k+1}$ sledi $K_k \subseteq S_{k+1}$, velja $J_k \cup K_k \subseteq S_{k+1}$. Enakost $J_k \cup K_k = J_{k+1}$ je očitna, torej (5) velja za $t = k$. Za dokaz indukcijskega koraka vzemimo poljuben indeks $s > k$ in predpostavimo, da (5) velja za $t = s - 1$. Potem podobno kot pri $t = k$ vidimo, da je $J_s \cup K_s \subseteq S_{s+1}$. Zaradi predpostavke $J_{s-1} \cup K_{s-1} = J_s$ velja

$$a + m_s + 1 \leq a + m_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{s-1} m_j + 1.$$

Od tod z uporabo neenakosti $m_{s+1} \leq 2m_s$ dobimo

$$a + m_{s+1} + 1 \leq a + m_{k+1} + \sum_{j=k+1}^s m_j + 1,$$

torej velja tudi enakost $J_{s+1} = J_s \cup K_s$.

Naj bo zdaj q poljuben indeks, ki ustreza pogoju $p \leq q \leq r$. Potem je $m_{q+1} \leq m_{r+1}$ in $\sum_{j=k+1}^{p+1} m_j \leq \sum_{j=k+1}^{q+1} m_j$, zato iz pogoja za b sledi

$$a + m_{q+1} + 1 \leq b \leq a + m_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{q+1} m_j.$$

Torej velja $b \in K_q$. Ker je zaradi (5) $J_q \subseteq S_q$ in ker poleg tega velja $K_q = J_q + m_{q+1}$, je b vsota različnih sumandov iz množice $\{m_1, \dots, m_q\}$ in sumanda m_{q+1} . Od tod pa že sledi, da se da b zapisati vsaj na $r - p + 1$ način kot vsota različnih členov zaporedja $(m_i)_{i=1}^{\infty}$. ■

Lema 6. Naj bo $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil, ki izpolnjuje pogoj $\lim_{i \rightarrow \infty} m_{i+1}/m_i = 1$. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $p_n \in \mathbb{N}$, da za vsak indeks $p \geq p_n$ velja $m_{p+n+1} < m_p + m_{p+1}$.

Dokaz. Pri danem $n \in \mathbb{N}$ postavimo $\alpha = 1 + \frac{1}{2^n}$ in izberimo p_n tako, da velja

$$m_{s+1} \leq \alpha m_s \quad \text{za vsak } s \geq p_n. \quad (6)$$

Vzemimo poljuben indeks $p \geq p_n$ in z uporabo ocene (6) dobimo

$$m_{p+n+1} \leq \alpha m_{p+n} \leq \dots \leq \alpha^n m_{p+1}. \quad (7)$$

Ker je $\alpha^{2n} < e$, velja

$$\alpha(\alpha^n - 1) < \alpha(e^{1/2} - 1) \leq (3/2)(e^{1/2} - 1) < 1.$$

Od tod zaradi (6) sledi

$$\begin{aligned} \alpha^n m_{p+1} &= (\alpha^n - 1)m_{p+1} + m_{p+1} < \\ &< \alpha(\alpha^n - 1)m_p + m_{p+1} < m_p + m_{p+1}, \end{aligned}$$

kar skupaj z neenakostjo (7) dokazuje lemo. ■

Lema 7. *Naj bo $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil, ki izpolnjuje pogoje leme 5 in leme 6. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $a_n \in \mathbb{N}$, da vsako naravno število $b > a_n$ lahko zapišemo vsaj na n različnih načinov kot vsoto različnih členov zaporedja $(m_i)_{i=1}^{\infty}$.*

Dokaz. Vzemimo poljuben $n \in \mathbb{N}$ in postavimo

$$a_n = a + m_{p_n+n},$$

kjer je p_n število iz leme 6, ki izpolnjuje še pogoj $p_n > k$. Naj bo $b \in \mathbb{N}$ in $b > a_n$. Potem obstaja tak indeks $p \geq p_n$, da velja

$$a + m_{p+n} < b \leq a + m_{p+n+1}.$$

Če uporabimo lemo 6, dobimo

$$a + m_{p+n+1} < a + m_p + m_{p+1} < a + m_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{p+1} m_j,$$

torej velja

$$a + m_{p+n} < b < a + m_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{p+1} m_j.$$

Po lemi 5 se tedaj b da zapisati vsaj na $(p + n - 1) - p + 1 = n$ načinov kot vsoto različnih členov zaporedja $(m_i)_{i=1}^{\infty}$. ■

Če upoštevamo, da za naraščajoče zaporedje vseh praštevil $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ po izreku o praštevilih velja $\lim_{i \rightarrow \infty} m_{i+1}/m_i = 1$, in ponovimo dokaz izreka 1, z uporabo leme 7 dobimo naslednji rezultat:

Izrek 8. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $a_n \in \mathbb{N}$, da vsako naravno število, večje od a_n , lahko zapišemo vsaj na n različnih načinov kot vsoto različnih praštevil.*

Podobno kot izrek 8 lahko z uporabo leme 6 in dokaza izreka 4 pokažemo, da velja

Izrek 9. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $a_n \in \mathbb{N}$, da vsako naravno število, večje od a_n , lahko zapišemo vsaj na n različnih načinov kot vsoto kvadratov različnih praštevil.

S pomočjo ocene za hitrost konvergence v izreku o praštevilih lahko iz dokaza izrekov 8 in 9 dobimo grobo oceno za število a_n . Sklenimo prispevek z vprašanjem: Ali veljajo obravnavane lastnosti tudi za višje potence praštevil?

LITERATURA

- [1] K. Devlin, *Nova zlata doba matematike*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1993.
- [2] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford 1975.
- [3] H. E. Richert, *Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlen*, Math. Z. **52** (1950), 342–343.
- [4] A. Schinzel, *Sur une conséquence de l'hypothèse de Goldbach*, Bulgar. Akad. Nauk. Izv. Mat. Inst. **4** (1959), 35–38.
- [5] W. Sierpiński, *Sur l'équivalence de deux hypothèses concernant les nombres premiers*, Bulgar. Akad. Nauk. Izv. Mat. Inst. **4** (1959), 3–6.
- [6] W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, PWN, Warszawa 1964.
- [7] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi iz matematike*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1972.

KRITIKA

Strokovna logika?

Curek svetlobe, ki se razcepi v mavrico, se v kapljici dvakrat lomi in enkrat odbije ... Ker je lomni kot odvisen od valovne dolžine, izstopa rdeči curek pod kotom 42° glede na vpadajočo svetlobo, modri pa pod kotom $40,6^\circ$.

Lomni količnik ... je pri diamantu enak $n = 2,4$ in torej veliko večji kot pri steklu ($n = 1,5$). Posledica je večja in boljša cepitev barv.

Pri sipanju se elektromagnetni valovi najprej za kratek čas absorbirajo v atomih in molekulah, nato pa jih ti izsevajo v glavnem pravokotno na smer vpadajoče svetlobe.

Molekule mleka so centri, na katerih se lahko siplje svetloba.

Pri zvočnem valovanju pa se delci določene zračne plasti gibljejo skupaj v isto smer. Čeprav to gibanje napreduje z razmeroma majhnimi koraki, nastane zaradi številnih enakih premikov vseeno dovolj velik tlak, ki presega tlak zaradi termičnega gibanja.

L. Mathelitsch, *Natur und Physik*, Holder-Pichler-Tempsky, Dunaj, 1992.

Prevod: *Narava in fizika*, DZS, Ljubljana 1995, strani 5, 7, 8, 24.
Strokovno pregledal J. Ferbar.

Citate prepisal Ivan Kuščer

Math. Subj. Class. (1991): 16S36, 05A30.

Ogledali si bomo nekaj osnovnih lastnosti algebre $\mathbb{F}_q[x, y]$, generirane nad poljem $\mathbb{F}$ s spremenljivkama, ki zadoščata pogoju $yx = qxy$, kjer je $q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

QUANTUM PLANE

This is an exposition on some basic properties of the algebra $\mathbb{F}_q[x, y]$ generated over a field $\mathbb{F}$ by two variables satisfying $yx = qxy$, where $q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

1. Uvod in osnovne definicije ter zgledi

Klasične spremenljivke v matematiki in fiziki imajo številske vrednosti in zato med seboj komutirajo. V kvantni mehaniki imajo vlogo spremenljivk operatorji, ki ne komutirajo vedno. S konkretnimi zgledi nekomutativnih operacij so se bralci verjetno prvič srečali pri množenju matrik ali pa pri splošnih grupah. V tem sestavku si bomo ogledali sorazmerno preprosto algebro $\mathbb{F}_q[x, y]$, generirano nad poljubnim poljem (komutativnim obsegom) $\mathbb{F}$ z dvema spremenljivkama x in y , ki zadoščata relaciji

$$yx = qxy, \quad (1)$$

kjer je q neničelni element iz $\mathbb{F}$. (Če bralec želi, lahko privzame, da je $\mathbb{F}$ kar $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{R}$.) V primeru $q = 1$ je $\mathbb{F}_q[x, y]$ komutativna algebra $\mathbb{F}[x, y]$ vseh polinomov dveh spremenljivk nad $\mathbb{F}$. V tem primeru si spremenljivki x in y lahko zamišljamo kot koordinati v afini ravnini nad $\mathbb{F}$. Če je polje $\mathbb{F}$ algebraično zaprto, je mogoče točke ravnine poistiti z maksimalnimi ideali v $\mathbb{F}[x, y]$. (To je znani poseben primer Hilbertovega izreka o ničlah, glej npr [5]; tega dejstva kasneje ne bomo uporabljali.) Zato bi lahko algebro $\mathbb{F}[x, y]$ imenovali kar „afina ravnina“. Spremenljivki x in y v $\mathbb{F}_q[x, y]$ smeta zadoščati le zvezi (1) in zvezam, ki iz nje sledijo.

Natančneje lahko definiramo $\mathbb{F}_q[x, y]$ s pomočjo pojma proste algebre. Po definiciji je *prosta algebra* $\mathbb{F}\{X, Y\}$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, katerega bazo tvorijo vse končne besede (ali monomi) v črkah X in Y . Pri tem je vrstni red črk pomemben: na primer XY , YX , X^2Y , XYX in YX^2 so različne besede. Produkt dveh besed definiramo s spojitvijo:

$$(X_{i_1} \dots X_{i_m})(X_{i_{m+1}} \dots X_{i_n}) = X_{i_1} \dots X_{i_m} \dots X_{i_n} \quad (X_{i_j} \in \{X, Y\}).$$

Za ta produkt je množica vseh besed (iz črk X in Y) polgrupa, katere enota je prazna beseda $\emptyset$. Elementi prostora $\mathbb{F}\{X, Y\}$ so vse možne formalne linearne kombinacije besed s koeficienti v $\mathbb{F}$, torej vsi polinomi v nekomutativnih spremenljivkah X in Y . Z zahtevo, da je distributivno, lahko množenje enolično razširimo iz množice besed na vse elemente prostora $\mathbb{F}\{X, Y\}$, s čimer postane $\mathbb{F}\{X, Y\}$ algebra nad $\mathbb{F}$.

Algebra $\mathbb{F}\{X, Y\}$ ima naslednjo univerzalno lastnost: za vsako algebro A nad $\mathbb{F}$ in za poljubna elementa $a, b \in A$ obstaja natanko en tak homomorfizem $\mathbb{F}$ -algeber $\varphi : \mathbb{F}\{X, Y\} \rightarrow A$, da je $\varphi(X) = a$ in $\varphi(Y) = b$. Če je pri tem algebra A komutativna, potem jedro homomorfizma φ gotovo vsebuje ideal I v $\mathbb{F}\{X, Y\}$, generiran z elementom $XY - YX$. Ker je kvocienčna algebra $\mathbb{F}\{X, Y\}/I$ komutativna, je lahko videti, da ta homomorfizem $\varphi : \mathbb{F}\{X, Y\} \rightarrow A$ porodi izomorfizem iz $\mathbb{F}\{X, Y\}/I$ na algebro $\mathbb{F}[x, y]$ običajnih polinomov dveh spremenljivk.

Formalno lahko sedaj algebro $\mathbb{F}_q[x, y]$ definiramo kot kvocient $\mathbb{F}\{X, Y\}/I_q$, kjer je I_q ideal v $\mathbb{F}\{X, Y\}$, generiran z elementom $YX - qXY$. Pri tem je $x = X + I_q$ in $y = Y + I_q$.

Neposredno iz definicije sledi naslednja univerzalna lastnost algebre $\mathbb{F}_q[x, y]$:

Trditev 1. Za vsako $\mathbb{F}$ -algebro A in elementa $a, b \in A$, ki zadoščata pogoju $ba = qab$, obstaja natanko en tak homomorfizem $\mathbb{F}$ -algeber $\varphi : \mathbb{F}_q[x, y] \rightarrow A$, da je $\varphi(x) = a$ in $\varphi(y) = b$.

Opozorilo: Beseda *algebra* v tem sestavku vedno pomeni asociativno algebro z enoto $1 \in \mathbb{F}$. Z znakom q bomo vedno označili neničelni element iz $\mathbb{F}$.

Par $(a, b) \in A \times A$, ki zadošča pogoju $ba = qab$, imenujemo *A-točka kvantne ravnine*. Tedaj lahko za vsak $g \in \mathbb{F}_q[x, y]$ definiramo $g(a, b)$ na naraven način, namreč kot sliko elementa g s homomorfizmom $\varphi : \mathbb{F}_q[x, y] \rightarrow A$, določenim s $\varphi(x) = a$ in $\varphi(y) = b$.

Iz zveze $yx = qxy$ sledi z indukcijo

$$y^n x^m = q^{mn} x^m y^n \quad (m, n \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Poljuben element algebre $\mathbb{F}_q[x, y]$ lahko izrazimo kot končno vsoto oblike

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x^i y^j \quad (c_{ij} \in \mathbb{F}).$$

Na koncu razdelka bomo pokazali, da je ta zapis enoličen.

Zgled 2. Naj bo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $q = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ n -ti koren enote, a in b pa $n \times n$ matriki

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q^{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

(Matriki a in b delujeta na standardne bazne vektorje e_i prostora $\mathbb{C}^n$ takole: $ae_i = e_{i+1}$ in $be_i = q^{i-1}e_i$, kjer je $i \in \mathbb{Z}_n$.) Preprost račun pove, da je $ba = qab$ in enakemu pogoju zadoščata tudi matriki za in wb za poljubna $z, w \in \mathbb{C}$.

Če je $g = \sum c_{ij}x^iy^j \in \mathbb{F}_q[x, y]$ kak tak element, da je $g(za, wb) = 0$ za vse $z, w \in \mathbb{C}$, potem je $c_{ij}a^ib^j = 0$ za vse i, j , torej $c_{ij} = 0$, ker sta matriki a in b obrnljivi. To pomeni, da $M_n(\mathbb{C})$ -točke kvantne ravnine ločijo elemente algebre $\mathbb{C}_q[x, y]$.

Če $q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ni koren enote, potem je $(cd)^n = 0$ za poljubni matriki $c, d \in M_n(\mathbb{C})$, ki zadoščata pogoju $dc = qcd$. Znano je namreč, da imata matriki cd in dc iste lastne vrednosti (glej npr. rešitev naloge 538 v [2]). Če je λ kaka lastna vrednost za cd , sledi potem iz enakosti $dc = qcd$, da so tudi $q\lambda, q^2\lambda, \dots$ lastne vrednosti za cd . Ker ima matrika lahko le končno mnogo različnih lastnih vrednosti, mora biti $\lambda = 0$, če q ni koren enote. Torej so tedaj vse lastne vrednosti matrike cd enake 0, od koder sledi, da je $(cd)^n = 0$. V tem primeru $M_n(\mathbb{C})$ -točke kvantne ravnine ne ločijo elementov algebre $\mathbb{F}_q[x, y]$, saj se element $(xy)^n$ preslika v 0 pri vsakem homomorfizmu iz $\mathbb{F}_q[x, y]$ v $M_n(\mathbb{C})$.

Naj bo sedaj q primitivni n -ti koren enote, $c, d \in M_n(\mathbb{C})$ pa poljuben tak par matrik, da je $dc = qcd$ in matrika cd ni nilpotentna. Pokazali bomo, da potem obstajajo taki števili $z, w \in \mathbb{C}$ in taka obrnljiva matrika $s \in M_n(\mathbb{C})$, da je $s^{-1}cs = za$ in $s^{-1}ds = wb$, kjer sta a in b zgoraj definirani konkretni matriki. Naj bo $\lambda \neq 0$ kaka lastna vrednost matrike cd . Potem so $\lambda, q\lambda, \dots, q^{n-1}\lambda$ različne lastne vrednosti matrike cd ; ker so vse različne od 0 in jih je n , je matrika cd obrnljiva. Zato sta obrnljivi tudi matriki c in d , zvezo med njima pa lahko napišemo v obliki $c^{-1}dc = qd$. Naj bo w kaka lastna vrednost za d . Ker imajo podobne matrike iste lastne vrednosti, sledi iz $c^{-1}dc = qd$, da so $w, qw, \dots, q^{n-1}w$ lastne vrednosti za d . Ker ima torej matrika d same različne lastne vrednosti, se da diagonalizirati in brez izgube splošnosti smemo vzeti, da je kar $d = wb$. Označimo z γ_{ij} elemente matrike c . Iz $dcd^{-1} = qc$ sledi $q^{i-j}\gamma_{ij} = q\gamma_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$). Torej je $\gamma_{ij} = 0$, če je $i - j \neq 1 \pmod{n}$ in matrika c je oblike

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \gamma_n \\ \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \dots & \dots & \gamma_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

za primerne $\gamma_i \in \mathbb{C}$. Naj $z \in \mathbb{C}$ zadošča pogoju $z^n = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ in definirajmo diagonalno matriko

$$s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1 z^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \gamma_2 z^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} z^{-n+1} \end{bmatrix}.$$

Preprost račun pove, da je $s^{-1}ds = d = wb$ in $s^{-1}cs = za$.

Zgled 3. Naj bo $\mathbb{F}[[z]]$ algebra vseh formalnih potenčnih vrst s koeficienti v polju $\mathbb{F}$, $\text{End}(\mathbb{F}[[z]])$ pa algebra vseh linearnih preslikav na vektorskem

prostoru $\mathbb{F}[[z]]$ nad $\mathbb{F}$. Naj bo $q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ in definirajmo $Z, \tau_q \in \text{End}(\mathbb{F}[[z]])$ s predpisoma

$$(Zf)(z) = zf(z) \quad \text{in} \quad (\tau_q f)(z) = f(qz) \quad (f \in \mathbb{F}[[z]]).$$

Par (Z, τ_q) je $\text{End}(\mathbb{F}[[z]])$ -točka kvantne ravnine, saj za vsako vrsto $f \in \mathbb{F}[[z]]$ velja

$$(\tau_q Zf)(z) = (Zf)(qz) = qzf(qz) = qz\tau_q(f)(z) = q(Z\tau_q f)(z),$$

torej $\tau_q Z = qZ\tau_q$.

Trditev 4. *Elementi $x^i y^j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) v $\mathbb{F}_q[x, y]$ so linearno neodvisni, torej tvorijo bazo prostora $\mathbb{F}_q[x, y]$.*

Dokaz. Naj bo V direktna vsota števno mnogo primerkov prostora $\mathbb{F}[[z]]$; elementi prostora V so torej vsa zaporedja $(f_0, f_1, f_2, \dots)$, kjer je le končno mnogo komponent $f_i \in \mathbb{F}[[z]]$ različnih od 0. Definirajmo linearni preslikavi $\hat{Z}$ in $\hat{\tau}_q$ na V s predpisoma

$$\hat{Z}(f_0, f_1, \dots) = (Zf_0, Zf_1, \dots) \quad \text{in} \quad \hat{\tau}_q(f_0, f_1, \dots) = (0, \tau_q f_0, \tau_q f_1, \dots),$$

kjer sta Z in τ_q linearni preslikavi na $\mathbb{F}[[z]]$, definirani v zgledu 3. Lahko je preveriti, da je $\hat{\tau}_q \hat{Z} = q\hat{Z}\hat{\tau}_q$.

Predpostavimo sedaj, da je kaka linearna kombinacija 1 elementov $x^i y^j$ enaka 0. Potem je tudi $\sum \sum c_{ij} \hat{Z}^i \hat{\tau}_q^j = 0$, torej tudi

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} \hat{Z}^i \hat{\tau}_q^j e_0 = 0, \quad (3)$$

kjer je $e_0 = (1, 0, 0, \dots) \in V$. Označimo z $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ vektor v V , ki ima na mestu $j+1$ element 1, povsod drugod pa 0. Ker je $\hat{\tau}_q^j e_0 = e_j$, lahko (3) preoblikujemo v

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} z^i e_j = 0.$$

Od tod najprej sledi $\sum_i c_{ij} z^i = 0$ za vsak j , nato še $c_{ij} = 0$ za vse i, j . ■

2. Nekatere lastnosti kolobarja $\mathbb{F}_q[x, y]$

Kolobar $\mathbb{F}[x, y]$ polinomov dveh spremenljivk lahko poistimo s kolobarjem $\mathbb{F}[x][y]$ polinomov ene spremenljivke s koeficienti v $\mathbb{F}[x]$ (glej npr. [8]). Tudi pri splošnem $q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ algebra $\mathbb{F}_q[x, y]$ vsebuje $\mathbb{F}[x]$ in vsak element iz $\mathbb{F}_q[x, y]$ lahko izrazimo kot končno vsoto $\sum p_j(x) y^j$, kjer so $p_j(x) \in \mathbb{F}[x]$ polinomi ene spremenljivke. Pri tem za vsak $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ velja

$$yp(x) = p(qx)y. \quad (4)$$

Če je namreč $p(x) = x^i$ monom, je to poseben primer relacije (2), za splošen polinom pa potem (4) sledi s seštetjem po monomih. Preslikava $p(x) \mapsto p(qx)$ je avtomorfizem $\mathbb{F}$ -algebre $\mathbb{F}[x]$, ki ga bomo označili s σ . Enakost (4) lahko napišemo kot

$$yc = \sigma(c)y, \quad (5)$$

kjer smo splošen polinom iz $\mathbb{F}[x]$ označili kar s c .

Naj bo sedaj R poljuben cel kolobar z enoto 1, σ avtomorfizem kolobarja R , y pa spremenljivka. Naj bo $R[y; \sigma]$ kolobar, ki vsebuje R in je kot levi modul nad R prost z bazo $\{1, y, y^2, \dots\}$, množenje v $R[y; \sigma]$ pa naj zadošča pogoju (5) za vsak $c \in R$. (Tak kolobar je poseben primer Orejeve razširitve kolobarja R ; glej npr. [4] ali [7].) Vsak element u iz $R[y; \sigma]$ torej lahko enolično izrazimo kot končno vsoto $u = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i y^i$ ($c_i \in R$) in največji tak i , da je $c_i \neq 0$, imenujemo *stopnja* elementa u . Iz (5) sledi, da je

$$\left(\sum_{i=0}^m c_i y^i\right) \left(\sum_{j=0}^n d_j y^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} c_i \sigma^i(d_j)\right) y^k.$$

Ker je po predpostavki kolobar R cel in σ injektiven endomorfizem, je stopnja produkta dveh elementov enaka vsoti stopenj faktorjev; zato je $R[y; \sigma]$ cel kolobar.

Kolobar R imenujemo noetherski z leve, če za vsako zaporedje $J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$ levih idealov v R obstaja tak n , da je $J_n = J_{n+1} = J_{n+2} = \dots$. Ta pogoj je ekvivalenten z zahtevo, da je vsak levi ideal v R končno generiran. Za poljuben levi ideal J v R namreč lahko sestavimo naslednje naraščajoče zaporedje levih idealov. Izberimo poljuben $a_0 \in J$ in naj bo J_0 levi ideal, generiran z a_0 . Če je $J_0 = J$, je J končno generiran. Če je $J_0 \neq J$, izberimo poljuben $a_1 \in J \setminus J_0$ in naj bo J_1 levi ideal, generiran z $\{a_0, a_1\}$. Če je $J_1 = J$, je J končno generiran. Če pa je $J_1 \neq J$, izberimo $a_2 \in J \setminus J_1$ in naj bo J_2 levi ideal, generiran z $\{a_0, a_1, a_2\}$. Če tako nadaljujemo in je kolobar R noetherski z leve, mora biti $J_n = J$ za kak $n \in \mathbb{N}$, sicer bi dobili neskončno naraščajoče zaporedje različnih levih idealov v R .

Za dokaz v obratno smer privzemimo, da je vsak levi ideal v R končno generiran in naj bo $J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$ poljubno zaporedje levih idealov v R . Označimo $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$ in naj bo $\{a_1, \dots, a_m\}$ kaka množica generatorjev za J . Potem obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $a_j \in J_n$ za vse $j = 1, \dots, m$. Tedaj je $J = J_n$ in zato tudi $J_n = J_{n+1} = J_{n+2} = \dots$.

Naj bo sedaj R z leve noetherski kolobar. Pokazali bomo, da je tedaj tudi kolobar $R[y; \sigma]$ noetherski z leve. Naj bo J poljuben levi ideal v $R[y; \sigma]$; pokazati je treba, da je J končno generiran. Za vsak $n \geq 0$ naj bo J_n unija $\{0\}$ in množice vseh tistih $c \in R$, za katere obstaja kak $p \in J$ stopnje n z vodilnim koeficientom c (se pravi, $p = cy^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^i$). Očitno je J_n levi ideal v R . Če je $p \in J$ element stopnje n z vodilnim koeficientom c , potem je $yp \in J$ element stopnje $n+1$ z vodilnim koeficientom $\sigma(c)$ (po (5)). To pove, da je $\sigma(J_n) \subseteq J_{n+1}$, zato imamo naraščajoče zaporedje levih idealov

$$J_0 \subseteq \sigma^{-1}(J_1) \subseteq \sigma^{-2}(J_2) \subseteq \dots$$

Ker je R z leve noetherski kolobar, obstaja tak d , da je $\sigma^{-d}(J_d) = \sigma^{-d-1}(J_{d+1}) = \sigma^{-d-2}(J_{d+2}) = \dots$, torej $J_{d+i} = \sigma^i(J_d)$ za vsak $i \in \mathbb{N}$. Naj bo $\{c_{nk} : k = 1, \dots, m_n\}$ množica generatorjev levega ideala J_n v R in naj bo $p_{nk} \in J$ element stopnje n z vodilnim koeficientom c_{nk} . Pokazali bomo, da končna množica $S = \{p_{nk} : k = 1, \dots, m_n, n = 0, \dots, d\}$ generira levi ideal J v $R[y; \sigma]$. Označimo za hip z J' levi ideal v $R[y; \sigma]$, generiran z S .

Naj bo $p \in J$ poljuben element in n njegova stopnja. Z indukcijo na n bomo pokazali, da je $p \in J'$. Če je $n = 0$, je p v levem idealu, generiranem z elementi $p_{0k} = c_{0k}$ ($k = 1, \dots, m_0$), torej je tudi v J' . Naj bo sedaj $n > 0$ in privzemimo induktivno, da so v J' vsi elementi iz J stopnje, manjše od n . Če je $n \leq d$, lahko vodilni koeficient c elementa p izrazimo kot $c = \sum_{k=1}^{m_n} a_k c_{nk}$ ($a_k \in R$), zato je stopnja elementa $f := p - \sum_{k=1}^{m_n} a_k p_{nk} \in J$ manjša od n . Po indukcijski predpostavki je $f \in J'$, torej tudi $p \in J'$. Če pa je $n > d$, je c v idealu $J_n = \sigma^{n-d}(J_d)$ in zato lahko izrazimo $c = \sum_{k=1}^{m_d} a_k \sigma^{n-d}(c_{dk})$ za primerne $a_k \in R$. Z uporabo zveze (5) vidimo, da je tedaj stopnja elementa $f := p - y^{n-d} \sum_{k=1}^{m_d} \sigma^{d-n}(a_k) p_{dk} \in J$ manjša od n . Po indukcijski predpostavki je $f \in J'$ in zato tudi $p \in J'$.

Tako smo pokazali, da je kolobar $R[y; \sigma]$ noetherski z leve. Kot poseben primer, je noetherski z leve kolobar $\mathbb{F}_q[x, y]$. Podoben razmislek pove, da je kolobar $\mathbb{F}_q[x, y]$ noetherski tudi z desne (vsak desni ideal je končno generiran). Kolobarje, ki so noetherski z leve in desne, imenujemo kar noetherski kolobarji. Gornje ugotovitve povzemimo v izrek:

Izrek 5. *Za vsako polje $\mathbb{F}$ in vsak $q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ je $\mathbb{F}_q[x, y]$ cel Noetherski kolobar. Če q ni koren enote, je center tega kolobarja kar $\mathbb{F}$. Če pa je q primitivni n -ti koren enote, se center kolobarja $\mathbb{F}_q[x, y]$ ujema z $\mathbb{F}[x^n, y^n]$ (= algebra vseh polinomov v komutirajočih spremenljivkah x^n in y^n).*

Pokazati bi morali le še trditev o centru, ki pa sledi z neposrednim računom (element $\sum c_{ij} x^i y^j$ ($c_{ij} \in \mathbb{F}$) je v centru natanko tedaj, ko komutira z x in y), zato dokaz prepuščamo bralcu.

3. q -binomska formula

Po zgledu klasičnih binomskih koeficientov definirajmo q -binomske koeficiente $\binom{n}{k}_q$ kot koeficiente v razvoju binoma

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k},$$

kjer x in y zadoščata pogoju $yx = qxy$. Če je $k < 0$ ali pa $k > n$, naj bo $\binom{n}{k}_q = 0$.

Očitno je $\binom{1}{0}_q = \binom{1}{1}_q = 1$. Da bi izračunali $\binom{n}{k}_q$ za $n > 1$, bomo najprej izpeljali analogijo Pascalove identitete za q -binomske koeficiente. Iz

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k} = (x + y)^n = (x + y)(x + y)^{n-1} = (x + y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}_q x^k y^{n-1-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}_q x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}_q q^k x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q q^k \right] x^k y^{n-k}
\end{aligned}$$

sledi (po trditvi 4)

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q q^k. \quad (6)$$

Na podoben način (v zgornjem računu bi $(x+y)^n$ zapisali kot $(x+y)^{n-1}(x+y)$) bi lahko izpeljali zvezo

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q q^{n-k} + \binom{n-1}{k}_q. \quad (7)$$

V primeru $q = 1$ se enakosti (6) in (7) zreducirata na znano Pascalovo identiteto za običajne binomske koeficiente.

Izpeljali bomo še formulo za $\binom{n}{k}_q$, ki bo posplošila znano zvezo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Najprej definirajmo

$$(n)_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1) \quad (8)$$

za vsak $n = 1, 2, \dots$. Za $q = 1$ naj bo $(n)_q = n$. Definirajmo tudi

$$n!_q = (1)_q (2)_q \dots (n)_q = \frac{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}{(q-1)^n} \quad \text{za } n > 0 \quad (9)$$

in $0!_q = 1$. (Za $q = 1$ je $n!_q = n!$.) Končno definirajmo še

$$C_k^n(q) = \frac{n!_q}{k!_q (n-k)!_q}$$

za $k = 0, 1, \dots, n$. Lahko se je prepričati, da je

$$C_0^n(q) = 1 = \binom{n}{0}_q \quad \text{in} \quad C_n^n(q) = 1 = \binom{n}{n}_q.$$

Po (8) je $(k)_q + (n-k)_q q^k = (n)_q$, torej je

$$\begin{aligned}
C_{k-1}^{n-1}(q) + C_k^{n-1}(q) q^k &= \frac{(n-1)!_q}{(k-1)!_q (n-k)!_q} + \frac{(n-1)!_q}{k!_q (n-1-k)!_q} q^k \\
&= \frac{n!_q}{k!_q (n-k)!_q} \left[\frac{(k)_q}{(n)_q} + \frac{(n-k)_q}{(n)_q} q^k \right] = C_k^n(q).
\end{aligned}$$

Od tod in iz (6) vidimo, da elementi $C_k^n(q)$ in $\binom{n}{k}_q$ zadoščajo enakim rekurzivnim relacijam (analognim zvezam med običajnimi binomskimi koeficienti

v Pascalovem trikotniku); ker imajo po 5 tudi enake robne vrednosti, mora biti $C_k^n(q) = \binom{n}{k}_q$ za vse n in k . S tem smo dokazali formulo

$$\binom{n}{k}_q = \frac{n!_q}{k!_q(n-k)!_q}. \quad (10)$$

Od tod takoj opazimo simetrijo

$$\binom{n}{n-k}_q = \binom{n}{k}_q. \quad (11)$$

Za običajne binomske koeficiente veljata zvezi $\sum_k \binom{n}{k} 2^n$ in $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. Da bi izpeljali analogne povezave za q -binomske koeficiente, bomo uporabili operatorsko metodo, vpeljana v [1] (in v [4]). Za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ naj bo $a = \alpha Z \tau_q$ in $b = \beta \tau_q$, kjer sta Z in τ_q linearna operatorja na prostoru $\mathbb{F}[[z]]$, definirana v zgledu 3. Ker je $ba = qab$, lahko $(a+b)^n$ razvijemo po formuli 5 in dobimo

$$((\alpha Z + \beta 1)\tau_q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q (\alpha Z \tau_q)^k (\beta \tau_q)^{n-k}.$$

Ko uporabimo obe strani te identitete na konstantni vrsti 1, dobimo

$$(\alpha z + \beta)(\alpha qz + \beta) \cdots (\alpha q^{n-1}z + \beta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q \alpha^k \beta^{n-k} z^k q^{\binom{k}{2}}. \quad (12)$$

Za $\alpha = -1$ in $\beta = z = 1$ se ta formula glasi

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} = 0,$$

kar je analogija zveze $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k}$ za navadne binomske koeficiente.

Če je n liho število, potem je tudi

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}_q = 0,$$

ker se zaradi (11) členi v vsoti paroma uničijo. Če pa je n sodo število, bomo vsoto

$$S_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}_q$$

izračunali s pomočjo indukcije. Ker je $n+1$ tedaj liho število, je $\sum_k (-1)^k \binom{n+1}{k}_q = 0$. Od tod sledi po formuli (6) (uporabljeni za $n+1$ namesto n)

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k}_q q^k = - \sum_k (-1)^k \binom{n}{k-1}_q. \quad (13)$$

(Tukaj in v nadaljevanju mej seštevanja ne bomo pisali, kajti lahko vzamemo, da so $-\infty$ ter $+\infty$, saj je $\binom{n}{k}_q = 0$, če je $k < 0$ ali $k > n$.) Iz (6) in (7) sledi (ko n nadomestimo z $n + 1$)

$$\binom{n}{k}_q q^k = \binom{n}{k}_q - \binom{n}{k-1}_q (1 - q^{n+1-k}). \quad (14)$$

Sedaj imamo

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= \sum_k (-1)^k \binom{n+2}{k}_q \\ &= \sum_k (-1)^k \left[\binom{n+1}{k-1}_q + \binom{n+1}{k}_q q^k \right] \quad (\text{po (6)}) \\ &= \sum_k (-1)^k \left[\binom{n}{k-1}_q + \binom{n}{k}_q q^k \right] q^k \quad (\text{ker je } n+1 \text{ lih in po (6)}) \\ &= \sum_k (-1)^k \left[\binom{n}{k}_q + \binom{n}{k-1}_q q^{n+1-k} \right] q^k \quad (\text{po (14)}) \\ &= \sum_k (-1)^{k+1} \binom{n}{k-1}_q + \sum_k (-1)^k \binom{n}{k-1}_q q^{n+1} \quad (\text{po (13)}) \\ &= \sum_k (-1)^k \binom{n}{k}_q (1 - q^{n+1}) \quad (\text{s substitucijo } k-1 \rightarrow k) \\ &= S_n (1 - q^{n+1}). \end{aligned}$$

Iz pravkar izpeljane rekurzivne zveze $S_{n+2} = S_n(1 - q^{n+1})$ (in iz $S_0 = 1$) takoj sledi formula

$$S_n = (1 - q)(1 - q^3) \cdots (1 - q^{n-1})$$

za soda števila n .

V kombinatoriki pomeni $\binom{n}{k}$ število podmnožic moči k v množici z n elementi. Ni težko dokazati (to prepuščamo bralcu), da pomeni $\binom{n}{k}_q$ tedaj, ko je q moč kakega končnega obsega $\mathbb{O}$, število vseh k -razsežnih podprostorov v n -razsežnem vektorskem prostoru nad $\mathbb{O}$.

4. q -Eksponentna funkcija in odvajanje

Za mnoge klasične funkcije, ki se dajo izraziti s potenčnimi vrstami, je mogoče definirati njihove q -variante (glej [3]; avtor je hvaležen Marku Petkovšku, ker ga je opozoril na knjigo [3]). Tukaj se bomo omejili na eksponentno funkcijo. Klasična eksponentna funkcija je podana z vrsto $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Podobno naj bo q -eksponentna funkcija formalna potenčna vrsta v $\mathbb{F}[[z]]$, definirana z

$$e_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!_q} z^n.$$

Ta definicija je smiselna le, če q ni koren enote, kajti le tedaj so vsi $n!_q \neq 0$ (po (9)). Privzemimo torej, da q ni koren enote. Na enak način kot za klasično eksponentno funkcijo (glej npr. [6], str. 509) bi lahko tudi za q -eksponentno funkcijo dokazali identiteto

$$e_q(a+b) = e_q(a)e_q(b),$$

če je $ba = qab$. V splošnem pa je $e_q(z)^{-1} \neq e_q(-z)$. Da bi izračunali $e_q(z)^{-1}$, se spomnimo, da operatorja $a = Z$ in $b = -Z\tau_q$ na prostoru $\mathbb{F}[[z]]$ zadoščata zvezi $ba = qab$, zato je

$$e_q(Z)e_q(-Z\tau_q) = e_q(Z(1 - \tau_q)). \quad (15)$$

Uporabimo obe strani te identitete na konstantni vrsti 1. Ker je $(1 - \tau_q)1 = 0$, je $e_q(Z(1 - \tau_q))1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!_q} (Z(1 - \tau_q))^n 1 = 1$, saj so vsi členi v vrsti enaki 0 za $n \geq 1$. Nadalje je $(e_q(Z)f)(z) = e_q(z)f(z)$ in

$$[(e_q(-Z\tau_q))(f)](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!_q} ((Z\tau_q)^n f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!_q} q^{\binom{n}{2}} z^n f(q^n z)$$

za vsako vrsto $f \in \mathbb{F}[[z]]$, torej je $(e_q(-Z\tau_q)1)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!_q} q^{\binom{n}{2}} z^n$. Iz (15) sedaj sledi $e_q(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!_q} q^{\binom{n}{2}} z^n = 1$, se pravi

$$e_q(z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!_q} q^{\binom{n}{2}} z^n.$$

Na prostoru $\mathbb{F}[[z]]$ lahko definiramo analogijo odvajanja s predpisom

$$(\delta_q f)(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{(q - 1)z}.$$

Preslikava $\delta_q : \mathbb{F}[[z]] \rightarrow \mathbb{F}[[z]]$ je linearna in zadošča pogoju $\delta_q(fg) = \delta_q(f)\sigma_q(g) + f\delta_q(g)$, kjer je σ_q avtomorfizem algebre $\mathbb{F}[[z]]$, definiran s $\sigma_q(g)(z) = g(qz)$. Ta pogoj je podoben pravilu za odvod produkta. Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ in se omejimo na konvergentne vrste, dobimo v limiti $q \rightarrow 1$ običajno odvajanje.

Z neposrednim primerjanjem koeficientov potenčnih vrst lahko dokažemo, da so konstante edine vrste v $\mathbb{F}[[z]]$, ki zadoščajo pogoju $\delta_q(f) = 0$, če q ni koren enote. Prav tako le konstantni večkratniki vrste e_q zadoščajo pogoju $\delta_q(f) = f$.

LITERATURA

- [1] J. Cigler, *Operatormethoden für q-identitäten*, Monatsh. Math. **88** (1979), 87–105.
- [2] M. Dobovišek, D. Kobal in B. Magajna, *Naloge iz algebre I*, DMFA, Ljubljana, 1992.
- [3] G. Gasper in M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [4] C. Kassel, *Quantum Groups*, GTM **155**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [5] T. Košir in B. Magajna, *Transformacije v geometriji*, v pripravi.
- [6] F. Križanič, *Temelji realne matematične analize*, DZS, Ljubljana, 1990.
- [7] L. H. Rowen, *Ring Theory*, Vol. I, Academic Press, London, 1988.
- [8] I. Vidav, *Algebra*, DMFA, Ljubljana, 1972.

SKAKANJE Z VRVJO

JANEZ STRNAD

PACS 03.20.+i

Prispevek obravnava gibanje skakalca, ki je privezan na dolgo prožno vrv z maso.

BUNGEE JUMPING

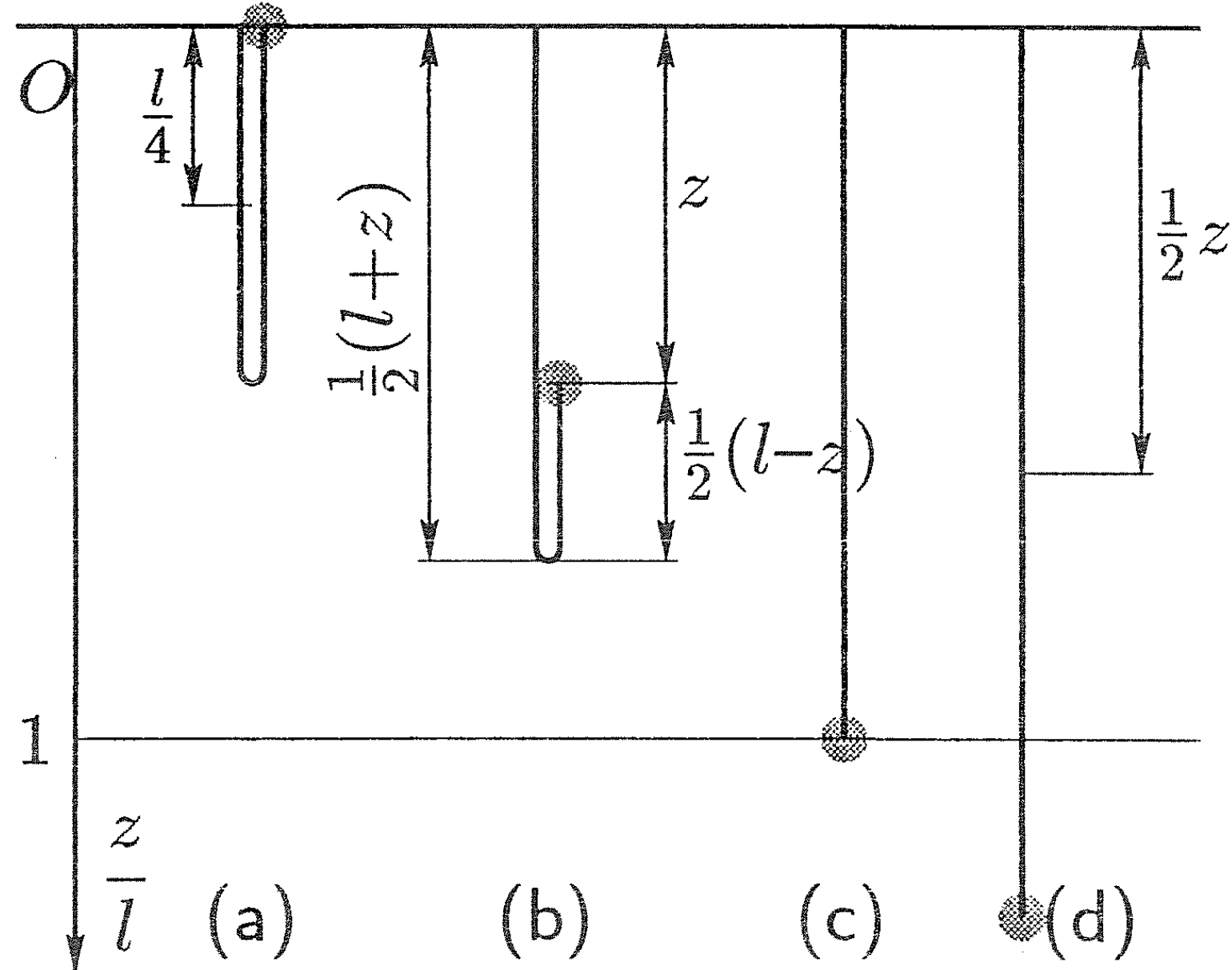
In the article the motion of a jumper tied on a long elastic massive rope is considered.

Med nevarnimi športi se je v zadnjem času v tujini in tudi že pri nas razvilo skakanje z vrvjo. Skakalec je privezan na krajišče vrvi in se ob pritrdišču vrvi odrine, da pade in ga vrv zaustavi, ko obvisi na njej. Navado so od nekdaj gojili prebivalci Binkoštnega otoka v Tihem oceanu. Mlajši moški si na noge privežejo vrvi iz trte in skočijo z lesenega ogrodja, da obvisijo tik nad tlemi. S tem bogove prosijo za obilno žetev sladkih korenin trte. Potem ko so leta 1979 člani oxfordskega društva nevarnih športov začeli skakati z nekega mostu, so dejavnost povzeli v drugih deželah. V devetdesetih letih se je posebno razširila v Združenih državah. Po nesrečah so skakanje ponekod prepovedali. Skakalci zagotavljajo, da ne počenjajo nič nevarnega in da so vseh nesreč krive napake skakalcev in neznanje fizike [1], [2].

Skok ponuja zanimivo nalogo, podobno znanim nalogam z verigo ali vrvico, na primer z bičem. Pri verigi so upoštevali maso [3], pri skakanju z vrvjo pa telo na krajišču lahke prožne vrvi [4]. Upoštevajmo oboje, maso prožne vrvi in maso telesa na njenem krajišču.

Na krajišču vrvi z dolžino l in maso M je pritrjeno majhno telo z maso m . Vzemimo, da je vrv idealno prožna s koeficientom k , popolnoma gibka in se zlahka zvije. Obravnavajmo gibanje telesa in vrvi v navpični smeri. V začetni legi je telo pri pritrdišču v višini $z = 0$, če os z usmerimo navpično navzdol. Telo spustimo v trenutku $t = 0$.

V prvem delu sledimo gibanju telesa in vrvi, dokler telo ne doseže točke $z = l$ in vrv še ni podaljšana. Na telo in vrv deluje samo teža in vrv ni podaljšana, zato se ohrani vsota kinetične in potencialne energije. Pri višini telesa z k potencialni energiji prispevajo telo, gibajoči se del vrvi z višino



Slika 1. Vrv z utežjo v začetni legi (a), med padanjem (b), v trenutku neprožnega trka (c) in potem, ko je vrv podaljšana (d).

$\frac{1}{2}(l-z)$ in težiščem pri $z + \frac{1}{4}(l-z) = \frac{1}{4}(l+3z)$ ter mirujoči del vrvi z dolžino $\frac{1}{2}(l+z)$ in težiščem pri $\frac{1}{4}(l+z)$ (sl. 1): $W_p(z) = -mgz - \frac{1}{2}[(l-z)/l]Mg \cdot \frac{1}{4}(l+3z) - \frac{1}{2}[(l+z)/l]Mg \cdot \frac{1}{4}(l+z)$. Potencialna energija je negativna, ker smo os z usmerili navzdol. H kinetični energiji prispevata telo in gibajoči se del vrvi: $W_k(z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{4}(l-z)(M/l)\dot{z}^2$. Iz izreka o kinetični in potencialni energiji $W_p(0) = W_p(z) + W_k(z)$ sledi

$$\dot{z}^2 = gz \frac{2b - z/l}{b - z/l}, \quad z \leq l \quad (1)$$

s parametrom $b = 1 + 2m/M$. Največjo hitrost doseže telo pri $z = l$ in $t = t_0$, ko velja $\dot{z}_0 = [gl(2b-1)/(b-1)]^{1/2}$.

Iz enačbe (1) z odvajanjem izračunamo pospešek telesa:

$$\frac{\ddot{z}}{g} = 1 + \frac{z(2b - z/l)}{2l(b - z/l)^2}, \quad z \leq l. \quad (2)$$

Pospešek narašča od g pri $z = 0$ do $\ddot{z}_0 = g(2b-1)/2(b-1)^2$ pri $z = l$. Pospešek preseže g , ker telo ne pada prosto, ampak ga gibajoči se del vrvi z notranjo silo dodatno vleče navzdol.

Z novo spremenljivko $\zeta = z/l \leq 1$ enačbo spravimo v brezdimenzijsko obliko $(l/g)^{1/2}\dot{\zeta} = [\zeta(2b-\zeta)/(b-\zeta)]^{1/2}$ in povežemo čas z višino:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}t = \int_0^{z/l} d\zeta \sqrt{\frac{b-\zeta}{\zeta(2b-\zeta)}}; \quad t \leq t_0.$$

Za zelo lahko vrv in $M/m \rightarrow 0$ in $b \rightarrow \infty$ integral preprosto izračunamo $t = \sqrt{2z/g}$: telo prosto pada. Pri verigi brez telesa je $m = 0$ in $b = 1$. V tem in v splošnem primeru $b > 1$ pa velja [5]:

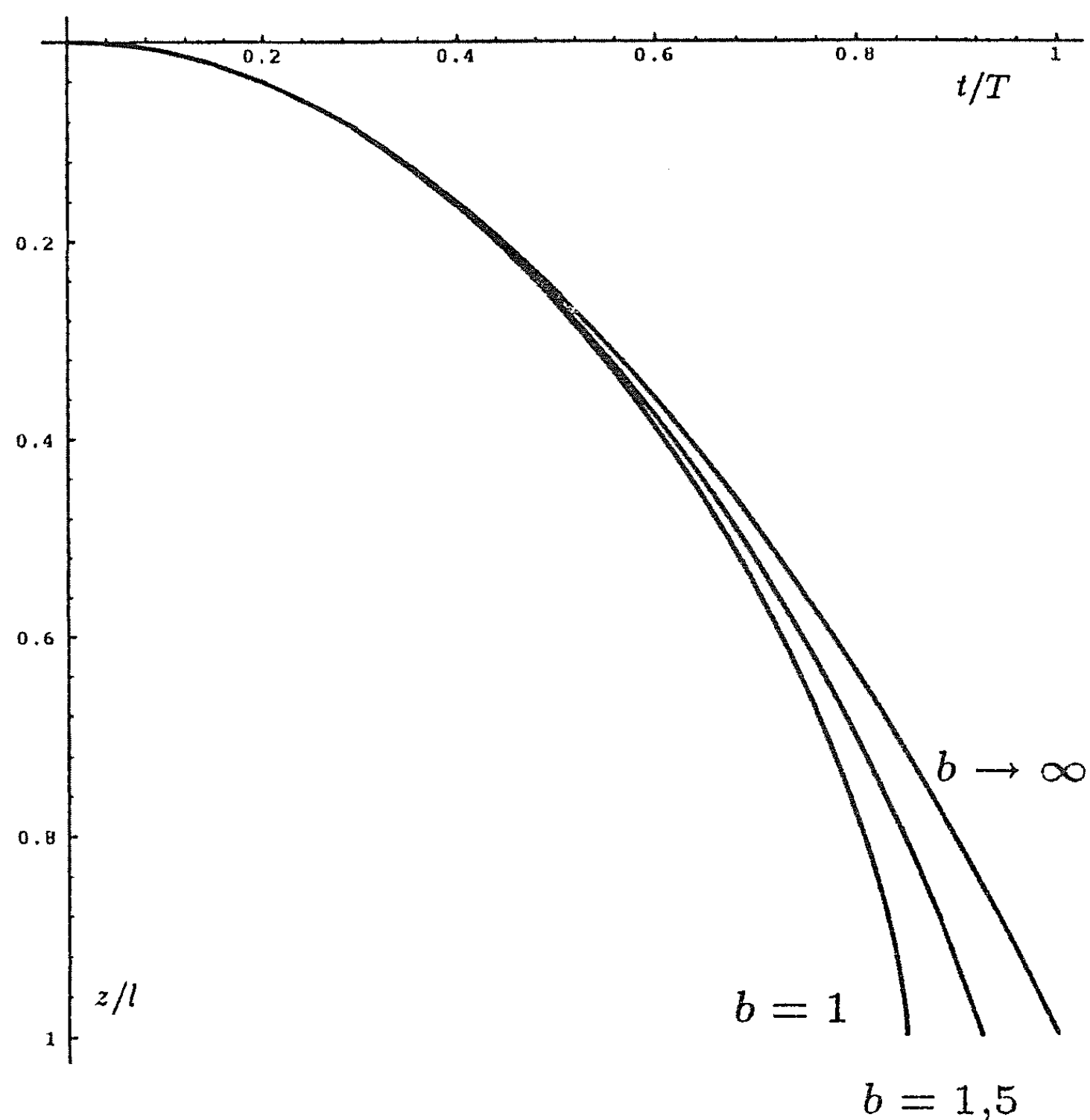
$$\frac{t}{T} = 2\sqrt{b}E[\arcsin \sqrt{z/bl}, \frac{1}{2}] - \sqrt{b}F[\arcsin \sqrt{z/bl}, \frac{1}{2}], \quad z \leq l. \quad (3)$$

$T = \sqrt{2l/g}$ je čas prostega padanja z višine l in

$$E(\varphi, \frac{1}{2}) = \int_0^\varphi (1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi \quad \text{in} \quad F(\varphi, \frac{1}{2}) = \int_0^\varphi (1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi$$

sta eliptična integrala, kot ju zaznamuje *Mathematica*. Komaj kdo bi se brez nje lotil risanja odvisnosti $t(z)$. Izračunamo čas $t = t_0$, ko vrv doseže dolžino l : pri $b = 1, 1,5$ in 3 je čas t_0 po vrsti $0,847T$, $0,924T$ in $0,969T$ (sl. 2).

V trenutku $t = t_0$, ko vrv miruje in se telo giblje s hitrostjo $\dot{z}_0$, pride do neprožnega trka telesa z vrvjo. Začetno gibalno količino $m\dot{z}_0$ telesa po trku prevzame telo in vrv: $(m + \frac{1}{2}M)\dot{z}_1$. Pri tem je $\dot{z}_1$ hitrost telesa po trku in $m\dot{z}_1$ njegova gibalna količina. Deli vrvi se gibljejo s hitrostjo, ki je



Slika 2. Razdalja telesa ali krajišča verige ali vrvi od drugega krajišča pri $b = 1$, $b = 1,5$ in $b \rightarrow \infty$ za $z/l < 1$ in $t < t_0$.

sorazmerna z razdaljo od pritrjenega krajišča: $\dot{z}_1 z/l$. H gibalni količini vrvi prispevajo vsi deli: $\int_0^l \dot{z}_1(z/l)(M/l)dz = \frac{1}{2}M\dot{z}_1$. Hitrost telesa in krajišča vrvi po trku je:

$$\dot{z}_1 = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M} \dot{z}_0 = \frac{b-1}{b} \dot{z}_0 = \sqrt{gl \frac{(b-1)(2b-1)}{b^2}}.$$

V tem trenutku je kinetična energija telesa in vrvi enaka $W_k(l) = \frac{1}{2}(m + \frac{1}{3}M)\dot{z}_1^2$. Kinetično energijo vrvi smo izračunali takole:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \dot{z}_1^2 (z/l)^2 (M/l) dz = \frac{1}{6} M \dot{z}_1^2.$$

Od trenutka $t = t_0$ se vrv podaljšuje in je treba upoštevati tudi njeno prožnostno energijo $W_{pr}(z) = \frac{1}{2}k(z-l)^2$. K potencialni energiji prispevata vrv s težiščem pri $\frac{1}{2}z$ in utež: $W_p(z) = -mgz - \frac{1}{2}Mgz$. Tudi h kinetični energiji prispevata utež in vrv: $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{6}M\dot{z}^2$. Po izreku o kinetični, potencialni in prožnostni energiji $W_k(l) + W_p(l) = W_{pr}(z) + W_p(z) + W_k(z)$ sledi:

$$\dot{z}^2 = gl \frac{-2\kappa(z/l - 1)^2 + 2b(z/l - 1) + b^{-2}(b-1)(2b-1)(b - \frac{1}{3})}{b - \frac{1}{3}}, \quad z \geq l \quad (4)$$

s parametrom $\kappa = kl/Mg = kl(b-1)/2mg$.

Najprej postavimo $\dot{z} = 0$ in izračunamo največjo dolžino vrvi l_0 :

$$l_0/l = 1 + \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 2\kappa b^{-2}(b-1)(2b-1)(b - \frac{1}{3})}}{2\kappa}.$$

Tolikšna je dolžina, do katere se podaljša vrv zaradi teže telesa in lastne teže. Vrv bi imela v ravnovesni legi zaradi teže telesa in lastne teže dolžino $l(1 + b/2\kappa)$.

Iz enačbe (4) z odvajanjem izračunamo pospešek telesa

$$\frac{\ddot{z}}{g} = \frac{b - 2\kappa(z/l - 1)}{b - \frac{1}{3}}, \quad z \geq l. \quad (5)$$

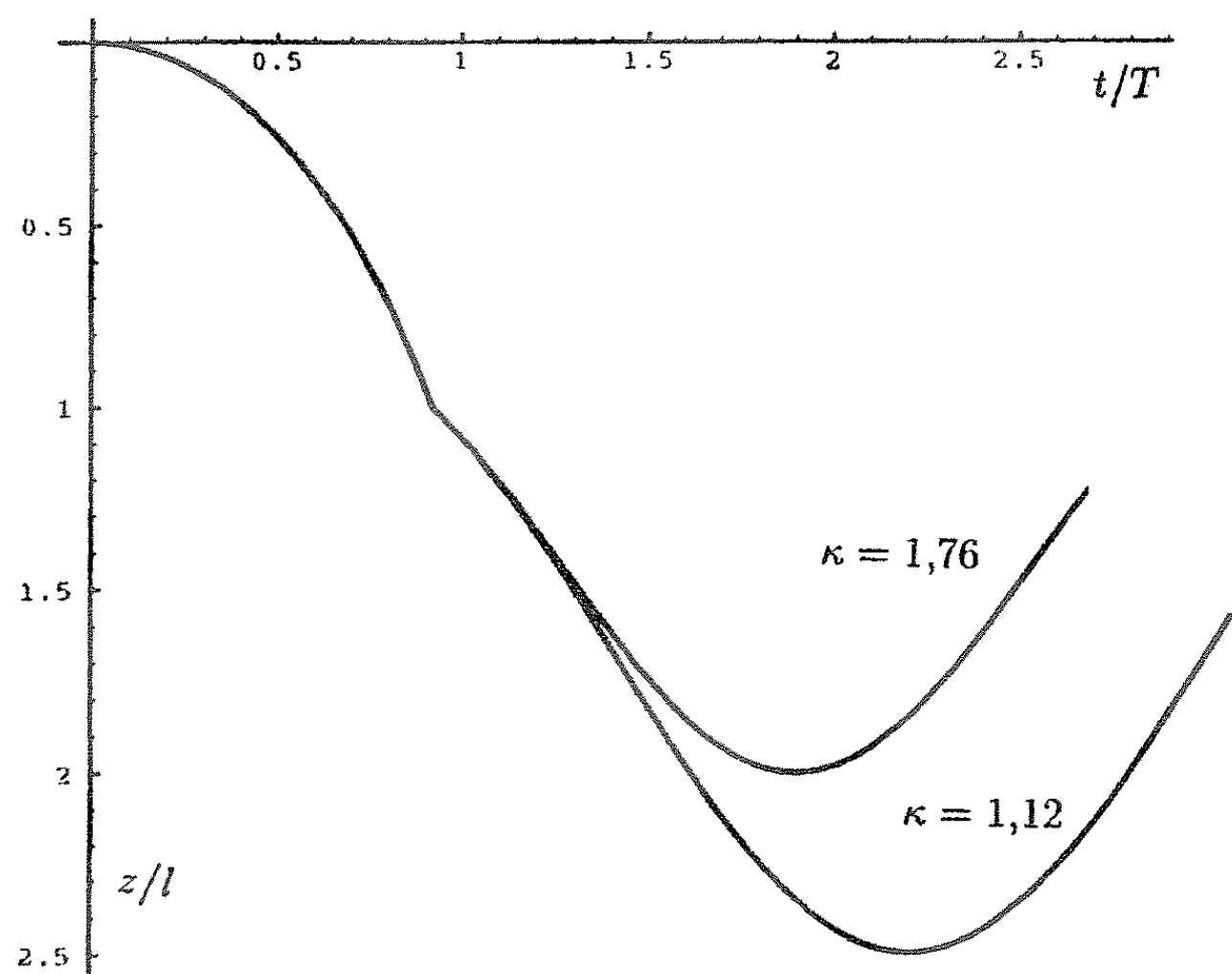
Pospešek pri največji dolžini vrvi

$$-g\sqrt{b^2 + 2\kappa b^{-2}(b-1)(2b-1)(b-\frac{1}{3})/(b-\frac{1}{3})}$$

je usmerjen navzgor. Rešitev enačbe (5) je sinusno nihanje s krožno frekvenco $\omega = \sqrt{k/(m + \frac{1}{3}M)}$:

$$\begin{aligned} z/l = & 1 + \frac{b}{2\kappa} \left[1 - \cos \sqrt{\frac{4\kappa}{b - \frac{1}{3}}} (t/T - t_0/T) \right] \\ & + \sqrt{\frac{(b-1)(2b-1)(b-\frac{1}{3})}{2b^2\kappa}} \sin \sqrt{\frac{4\kappa}{b - \frac{1}{3}}} (t/T - t_0/T), \quad t \geq t_0, \quad z > l. \end{aligned} \quad (6)$$

Koeficiente smo izbrali tako, da je $z(t = t_0) = l$ in $\dot{z}(t = t_0) = \dot{z}_1$. Enačbi (1) in (4) dasta za hitrost v trenutku $t = t_0$ različni vrednosti: pri neprožnem trku hitrost preskoči (sl. 3). Ustrezni pospešek lahko ocenimo z $\bar{a} = (\dot{z}_1 - \dot{z}_0)/\Delta t = -[gl(b-1)(2b-1)]^{1/2}/b^2\Delta t$, če je Δt čas trka. Če je velikostna stopnja tega časa desetina sekunde, doseže pospešek nekaj težnih pospeškov.



Slika 3. Razdalja telesa od krajišča vrvi za $b = 1,5$ ob $\kappa = 1,76$ in $\kappa = 1,12$ za vse območje (za $z/l > 1$ in $t > t_0$ se vrv podaljša). Zadnjima primeroma ustrezata največji dolžini vrvi $l_0 = 2l$ in $2,5l$. Koeficient κ je z največjo dolžino povezan takole: $\kappa = [2b(l_0/l - 1) + b^{-2}(b-1) \cdot (2b-1)(b-\frac{1}{3})]/2(l_0/l - 1)^2$.

Vrvi, ki jih uporabljajo skakalci, izvirajo menda iz nekega ameriškega vojaškega načrta. Na vrv so pripeti podobno kot alpinisti s karabinerjema na pasove na trupu in nogah ali na trupu in ramenih. Vrvi so v glavnem treh vrst, s koeficientom k okoli 120 N/m, 160 N/m in 200 N/m. Prve so namenjene lahkim, druge srednje težkim in tretje težkim skakalcem. Pri skoku se lahko podaljšajo na trikratno začetno dolžino in več.

Uporabljene vrvi se ne vedejo kot idealno prožne in koeficient k pojema z obremenitvijo. Pogosto uporabijo približek z dvema idealno prožnima območjema, na primer za vrv s povprečno vrednostjo 200 N/m do 5 m raztezka računajo s koeficientom 225 N/m, naprej pa s 150 N/m [1]. Podatkov o masi vrvi ni najti. Včasih računajo, da ima enako maso kot skakalec. To je sicer preprosto ($b = 3$), a najbrž precej pretirano.

Doslej so naredili več poskusov v poučne namene. Precej podrobno so raziskali gibanje verige [3]. Pri tem so merjenja primerjali z enačbo (3). Enačba je dobro veljala, iz česar sledi, da se energija ohrani. Energija se ne bi ohranila, če bi upoštevali Newtonov zakon za gibajoči se del vrvi in za mirujoči del. V tem primeru bi se napetost vrvi v pregibu nezvezno spremenila. Z razliko napetosti povezana notranja sila bi opravljala delo, ker se pregibna točka giblje, in bi se energija manjšala.

Kolikor se zdi, da se energija ne ohrani, gre to bolj na račun gibanja v vodoravni smeri, ki ga z računom nismo zajeli [1]. Pri 2 m dolgi verigi je bil celo čas padanja v okviru napake pri merjenju 2% enak izračunanemu $t_0 = 0,847$ T, četudi sta bili krajišči v začetni legi od 2 cm do 50 cm vsaksebi. Še bolje je veljala enačba, v kateri so upoštevali, da je v tem primeru navidezna začetna dolžina verige krajša.

Preskusili so, kako dobro opiše gibanje prostega krajišča enačba za $m = 0$ [2]. Za verigo in srednje debelo vrv je veljala zelo dobro, za debelo vrv slabše, za tanko vrv pa je veljala kar enačba $z = \frac{1}{2}gt^2$, ki sledi iz (3) za $b \rightarrow \infty$. Enačba (3) za $m = 0$ v točki $z = l$ skriva singularnost. Za $m \neq 0$ pa ni te nevšečnosti. Zanimivo je, da se je pri opisanih poskusih z verigo in srednje debelo vrvjo energija v zelo dobrem približku ohranila. Račun, pri katerem so upoštevali Newtonov zakon za dele sistema, v teh primerih ni dal tako dobrih rezultatov.

Z enačbami (3) in (6) ni skoka z vrvjo nihče opisal. Druga enačba je najbrž slabši približek od prve zaradi preskoka hitrosti telesa v trenutku $t = t_0$. Vendar preide v pravo enačbo gibanja za $M \rightarrow 0$, ko gre $b \rightarrow \infty$, a $b/2\kappa \rightarrow mg/kl$. Delo, pri katerem bi s snemalno kamero preizkusili, kako dobro veljata enačbi, in z merilnikom sile v pritrdišču vrvi določili sunek sile ob neprožnem trku in čas trka, se zdi kot naročeno za dijaško raziskovalno nalogo.

LITERATURA

- [1] P. G. Menz, *The physics of bungee jumping*, Phys. Teach. **31** (1993), 483.
- [2] D. Kagan, A. Kott, *The greater-than-g acceleration of a bungee jumper*, Phys. Teach. **34** (1996), 368.
- [3] M. G. Calkin, R. H. March, *The dynamics of a falling chain: I*, Am. J. Phys. **57** (1989), 154; M. G. Calkin, *The dynamics of a falling chain: II*, Am. J. Phys. **57** (1989), 157.
- [4] P. Palffy-Muhoray, *Problem: Acceleration during bungee-cord jumping, Solution to the problem ...*, Am. J. Phys. **61** (1993) 379, 381.
- [5] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego 1992, str. 231, 233.

JE MOGOČE UČITI MATEMATIKO?

ZLATAN MAGAJNA

Math. Subj. Class (1991) 00A35

V tekstu so opisani trije pojavi različnih izvorov (motivacijski, razvojno-psihološki in komunikacijski), ki pri pouku matematike lahko onemogočajo prenosa znanja, kot si ga zamišlja učitelj.

CAN MATHEMATICS BE THAUGHT?

The paper presents three phenomena of different origins (learned helplessness, developmental readiness, communication of meaning) that may make impossible the transfer of knowledge from teacher to pupil.

Vprašanje, ali je mogoče učiti matematiko, je vsekakor retorično. Matematiko uči na tisoče učiteljev po vsem svetu že desetletja in stoletja. Primerjava znanja matematike učencev ob začetku šolanja in ob njegovem koncu povsem nedvoumno kaže, da učenci v procesu šolanja pridobijo določeno znanje matematike. V zvezi s procesom šolanja sta torej nesporni dve trditvi:

1. Učitelji učijo matematiko.
2. Učenci pridobivajo znanje matematike.

Pričakovali bi, da je učitelj tisti, ki učenca nauči, in da je učenčevo znanje matematike predvsem posledica učiteljevega poučevanja (in s tem povezanega učenčevega ponavljanja in izvajanja vaj). V pričujočem tekstu ne želim zanikati te teze, temveč opozoriti, da to pogosto ne drži. Opozoriti želim, da se med poukom pogosto ne dogaja to, kar si (predvsem učitelj začetnik) naivno predstavlja kot nekaj samoumevnega, namreč da pri pouku matematike prenašamo znanje na učence in dijake. Razlogov, zakaj poučevanje v smislu prenosa znanja dostikrat ni možno, je več. Orisal bom tri razloge, ki so povezani s pojavi različnih izvorov in imajo pri pouku matematike različno težo. Upam, da bo razumevanje teh pojavov dalo učiteljem globlji vpogled v proces učenja.

1. razlog. Naučena nemočnost

Prvi razlog je motivacijske narave. Iz izkušenj vemo, da se nemotivirani ali celo demotivirani učenci slabo učijo. Posledice demotivacije pa so nemalokrat še hujše. Prikazali bomo, kako demotivacija lahko privede do stanja, ki onemogoča učenje in predvsem razumevanje matematike.

Motivacijo pri pouku matematike mnogi razumejo poenostavljeno: bodisi kot uvod v uro, kot popestritev ure z zgodovinsko ali zabavno nalogo ali kot opomin učencem na bližajoče se preverjanje znanja. Globlji vpogled v motivacijo daje nekoliko drugačno sliko: pri motivaciji gre za odločanje

učenca o njegovem ravnanju (Ali naj pozorno poslušam učitelja? Naj se trudim razumeti razlago? Koliko naj vadam?). Odločitev o ravnanju navadno sprejmemo – ne da bi se tega zavedali – predvsem na osnovi dveh informacij:

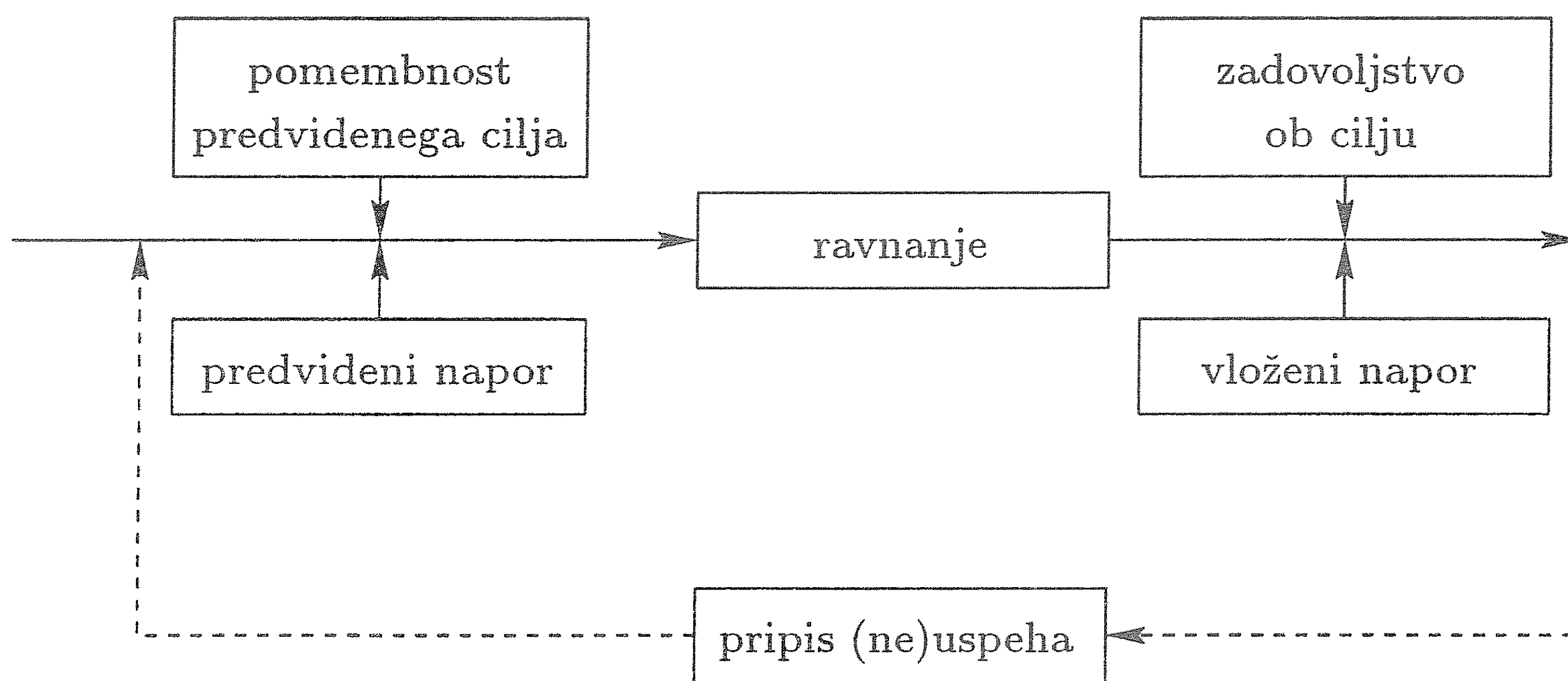
1. pomembnost predvidenega cilja,
2. predvideni potrebni napor za dosego cilja.

Če ugotovim, da je za dosego cilja dane pomembnosti vredno vložiti predvideni trud, sem motiviran in je smiselna odločitev, da svoje ravnanje usmerim za dosego cilja. Učenčev cilj ob učenju matematike ni nujno povezan z znanjem. Srednješolcu, ki se ukvarja z učenjem kompleksnih števil, ni nujno cilj novo znanje v zvezi s snovjo in zavest, da bo razumel njemu prej nedostopna področja. Prav lahko si vzame za cilj izogib kazni (slaba ocena), socialno priznanje (možnost, da se izkaže pred sošolci, starši ali učiteljem) ali pa je cilj čustvene narave (npr. možnost skupnega učenja s simpatično osebo). Da se bo učenec odločil za učenje matematike, mora torej imeti pred seboj cilj, ki je zanj pomemben in je povezan z njegovimi interesi.

Po drugi strani učenec oceni napor, ki je potreben za dosego cilja. Pri oceni si pomaga predvsem s svojimi prejšnjimi izkušnjami, nadomestnimi izkušnjami (izkušnjami prijateljev, staršev ali drugih) in s svojim pogledom na matematiko (gre za kompleksen sistem mnenj, predsodkov in stališč). Razumljivo je, da bo učenec svoje ravnanje usmeril v dosego cilja (in bo torej motiviran), če bo ocenil, da pričakovani napor odtehta pomembnost cilja. Po drugi strani pa pretirano velik pričakovan napor glede na pomembnost cilja učenca odvrača od ravnanj, ki bi vodila k cilju. Poenostavljeno bi torej lahko rekli, da o ravnanju odločamo glede na razmerje med pomembnostjo cilja in predvidenim naporom.

Ob koncu učnega procesa se naučena snov in vse, kar je z njo povezano, prav tako pa tudi dejansko vložen napor učencu prikaže v še drugačni luči. Medtem ko je pred ravnanjem primerjal pomembnost cilja in predvideni napor, po ravnanju primerja zadovoljstvo ob dosegu cilja in dejansko vložen napor. Učenec se – ne da bi se tega posebej zavedal – vpraša, ali je dosegel cilj in ali je bil vložen trud vreden zadovoljstva ob dosegu cilja. Zanimivo je, da je zadovoljstvo ob koncu učnega procesa pogostejše kot pričakovani cilj povezano z naučenim znanjem. Prav lahko se torej zgodi, da učencu, ki je med učenjem matematične snovi imel pred seboj utilitaristični cilj, ob koncu učnega procesa pomeni zadovoljstvo sposobnost uporabe naučenega. Razmerje med doseženim zadovoljstvom in dejansko vloženim naporom pa predstavlja učencu orientacijo za bodoče ravnanje pri učenju matematike. Shema motiviranja ob učenju.

Bolj kot razmerje med doseženim zadovoljstvom in vloženim naporom je za bodoče ravnanje učenca pomembno, čemu pripiše vzrok za uspeh oziroma neuspeh. Če dijak npr. pripiše neuspeh slabemu počutju ali težkim nalogam na testu, gre za slučajen faktor, ki ni pod njegovim nadzorom: dijakovo



Shema motiviranja ob učenju

učenje je bilo torej smiselno – le počakati je treba na lažje naloge oziroma boljše počutje. Če pripiše neuspeh preskromni pripravi („Premalo sem se učil.”), gre za notranji faktor, ki pa je obvladljiv („Moral se bom bolj ali bolje učiti.”). Tudi če pripiše neuspeh učiteljevemu neprimernemu pouku, gre torej za zunanji, a obvladljiv faktor: učenec se lahko pogovori z učiteljem, si pomaga sam ali pa poišče dodatno razlago pri drugi osebi, skratka nekaj ukrene, da premosti težavo. V vseh naštetih primerih je učenec doživel neuspeh, vendar ni razloga, da se v bodoče pri učenju ne bi trudil. Povsem nekaj drugega pa je, če učenec doživlja neuspehe kot posledico lastne nesposobnosti (navadno z besedami „*Nisem za matematiko.*”). V tem primeru je učenec v slepi ulici: vzrok za neuspeh najde v sebi, v svoji nesposobnosti, ki je stalna in neobvladljiva. Torej se tudi v bodočnosti ne more nič spremeniti. Temu stanju pravimo naučena nemočnost (*learned helplessness*) in je iz razumljivih razlogov daleč najpogostejša prav pri pouku matematike.

Otrok, ki se nauči neuspehe pri pouku matematike pripisovati lastni nesposobnosti, vnaprej ve, da snovi ne bo razumel. Zastavljeni cilj v zvezi z učenjem matematike je lahko še tako zanimiv in pomemben, vendar če doživlja učenec sebe kot nesposobnega, je s stališča otroka povsem nesmiseln in neekonomičen vsak trud, da bi dosegel cilj. Seveda otrokov ali dijakov položaj ni absolutno brezupen, saj si lahko zastavi cilje, ki niso povezani z znanjem matematike („Važno je, da dobim pozitivno oceno.”), doseže pa jih po poti, ki tudi ni povezana z znanjem in razumevanjem (učenje na pamet, prepisovanje ipd.). Vsekakor pa je tak otrok brez upa na razumevanje matematike in se sistematično izogiba vsakemu matematičnemu izzivu. Učenca, ki se je pri pouku matematike naučil nemočnosti, torej ne moremo učiti matematike, vsaj ne v smislu pridobivanja znanja z razumevanjem.

Učitelj matematike mora storiti vse, da se pri njegovem pouku učenec ne nauči nemočnosti. Izogibati se mora večkratnim zaporednim neuspehom učenca, pri neuspehih (ki sami po sebi niso problematični) pa mora biti pozoren na to, kako jih učenci doživljajo in čemu jih pripisujejo. Učenčev neu-

speh naj v nobenem primeru ne spremljajo niti zakriti namigi o sposobnosti učenca, ampak o vloženem trudu ali drugih obvladljivih vzrokih neuspeha. Učitelj naj niti pri sebi nikoli ne razmišlja o učencu kot o slabem matematiku. Ravnanje učitelja, ki se ob zastavljeni nalogi pomakne h kakemu učencu, da bi bolje nadzoroval njegovo reševanje, učenec prav lahko razume kot sporočilo o svoji nesposobnosti – povsem nekaj drugega pa je, če učenec sam pokliče učitelja. V svoj sistem ocenjevanja je potrebno vnesti tudi mehanizme, ki omogočajo vsakemu učencu, da s trudom doseže uspeh in pohvalo. Če pa se je učenec pri pouku matematike naučil nemočnosti, je treba s primernimi prijemi najprej spremeniti učenčevo doživljanje nemočnosti, šele nato se lahko ukvarjamo z razumevanjem matematike.

2. razlog: Razvoj kvalitete mišljenja

Naivno razumevanje procesa učenja matematike se kaže v pogosto izrečeni zvezi „*učiti matematiko*”. To, da „učitelj uči matematiko učenca”, navadno razumemo, kot da učitelj zna matematiko in svoje znanje prenese oz. razširi na učenca. Pogoji za uspešen prenos je primerno učenčevo predznanje in primerna razlaga ter sploh obravnava snovi. To je naivna shema učenja, ki jo nasploh nosimo v sebi – tako običajno poteka pouk matematike na fakultetnem, srednješolskem in nasploh tudi osnovnošolskem nivoju. V ozadju takšnega poučevanja je prepričanje, da je možno matematično vsebino „podati”, podano snov razumeti (in jo potem z vajo utrditi) in jo sprejeti.

Da je tako razumevanje poučevanja vsaj nekoliko dvomljivo, se lahko prepričamo iz naslednjega primera:

Decimalna števila pri nas obravnavamo razmeroma pozno (kot desetiške ulomke), proti koncu 6. razreda, potem ko učenci nasploh dobro obvladajo naravna števila in znajo računati z ulomki. Učenci so torej ob koncu 6. razreda ob nasploh primernem predznanju deležni razlage decimalnega zapisa in seveda tudi primerne števila vaj. V učbenikih je vpeljava decimalnih števil korektna in tudi učitelji svoje delo v zvezi s poučevanjem nasploh korektno opravijo.

In kakšen je rezultat? Na testiranju IAEP leta 1991 je 80% naših sedmošolcev znalo neoporečno izvajati pisne algoritme v zvezi z decimalnimi števili. Na istem testu so učencem zastavili tudi vprašanje:

Katero od naslednjih števil je najmanjše?

- | | | |
|----|--------|----------|
| a) | 0,625 | (1,63%) |
| b) | 0,25 | (32,25%) |
| c) | 0,3753 | (31,66%) |
| d) | 0,125 | (33,83%) |

(V oklepaju je naveden delež otrok, ki so izbrali dani odgovor.¹) Rezultat je na pogled res presenetljiv, saj kaže na to, da le tretjina sedmošolcev razume pojem decimalnega mesta. V drugih državah, ki jih je zajemala študija, so bili rezultati podobni: le 20–50% trinajstletnikov je razumelo pojem decimalnega mesta (čeprav se pri pouku srečajo z decimalnimi števili prej kot pri nas), v izvajanju pisnih algoritmov pa so bili kvečjemu slabši od naših učencev. V osmem razredu in v srednji šoli je razumevanje decimalnega mesta, kot vemo iz izkušenj, bistveno boljše.

Primer kaže, da razlaga decimalnega zapisa in številne vaje učencem niso preveč koristile pri razumevanju decimalnega mesta. Če bi učenci zares razumeli razlago v šestem razredu, je ne bi kar pozabili, saj se pogosto srečujejo z decimalno zapisanimi števili. Še eno leto po razlagi in po številnih vajah kar dve tretjini otrok ne razumeta decimalnega mesta! Po drugi strani se učenec do srednje šole nauči decimalnega zapisa sam, vsaj brez eksplicitne učiteljeve razlage in vaj. Učenec se torej med šolanjem nauči decimalnega zapisa, vendar – paradoksalno – ne takrat, ko ga učitelj uči zapisa, temveč takrat, ko ga učitelj te snovi sploh ne uči.

Podobnih primerov bi lahko našteali še več. Kako jih razložiti? Med več vzroki, ki se prepletajo ob tovrstnih pojavih, gre poglobitni razlog iskati v razvoju otrokovega mišljenja. Razvojni psihologi so ugotovili, da otrok miselno dozoreva vsaj tja do 16. leta starosti, pri razvoju pa preide razpoznavna obdobja, ki jih odlikujejo kvalitativno različne oblike mišljenja. Za razumevanje dane matematične snovi ne zadostujejo le potrebno predznanje in primerna učiteljeva razlaga in vaje, nujna je tudi ustrezna kvaliteta otrokovega mišljenja. Na razvoj otrokovega mišljenja pa ima učitelj matematike prav malo vpliva ali pa ga sploh nima.

Ker si na tem mestu ne moremo privoščiti ekskurza v razvojno psihologijo, bom problem razvoja mišljenja ilustriral le na klasičnem primeru razumevanja pojma razmerja. Ta pojem obravnavamo implicitno ob učenju ulomkov, ko so učenci stari kakih dvanajst let, eksplicitno pa, ko so leto dni starejši. Nekateri učitelji pa učencem že pri nižji starosti pokažejo razne postopke križnega množenja, kar naj bi jim omogočilo izračune v zvezi s premim in obratnim sorazmerjem. Dejansko razumevanje pojma razmerja pa poteka pri učencih po dobro preučenem vrstnem redu, seveda pri nekaterih hitreje, pri drugih počasneje. V grobem so zaporedne etape razumevanja pojma razmerja naslednje:

1. Razumevanje dejstva, da sta dve količini povezani bodisi na način, da hkrati naraščata ali pa da z naraščanjem ene količine druga pada.

¹ Odgovori, ki so jih izbrali učenci, kažejo, da je decimalni zapis za učence zelo zahteven, zato pri delu z njim iščejo interpretacije in strategije, ki so jim razumljivejše, a niso vedno pravilne. Decimalno zapisana števila interpretirajo kot par naravnih števil (celi del in decimalni del). Nekateri urejajo števila (pare) leksikografsko, torej $a, b > c, d$, če je $a > c$ ali pa $a = c$ in $b > d$. Pri takem razumevanju decimalnega zapisa je med števili, ki jih omenja naloga, najmanjše število 0,25. Nekateri pa interpretirajo zapis a, b kot $a + 1/b$. Ti učenci so izbrali odgovor 0,3753.

Praktično vsak petošolec zna identificirati primere, kjer sta količini povezani na en ali drug način oziroma nista povezani. Nasploh tudi nima težav z obravnavanjem primerov, kjer sta količini povezani aditivno (t.j. se razlikujeta za konstanto, npr. sinova in očetova starost) ali subtrahivno (t.j. imata konstantno vsoto).

2. Razumevanje razmerja $2 : 1$ in $1 : 2$ (podvajanje in razpolavljanje). Iz recepta za 8 oseb zna otrok izračunati (z razumevanjem) količine za 4 osebe (oz. 16 oseb). S ponavljanjem tega postopka obvlada tudi razmerja $4 : 1$, $1 : 4$ itn. Drugih razmerij ne obvlada ali pa jih obravnava kot aditivno razmerje.
3. Razumevanje preprostih vsot dvojiških razmerij. Otrok razume, da je $3/2 = 1 + 1/2$. To pomeni, da zna iz recepta za 8 oseb izračunati količine za 12 oseb ($= 8 + 4$). Podobno izračuna količine za 6 oseb tako, da prišteje polovico in četrtno količin, ki so potrebne za 8 oseb. Razmerij, ki se ne dajo preprosto izraziti kot vsota dvojiških razmerij, učenec ne obvlada in pri izračunih z njimi uporablja nekorektne (navadno aditivne) strategije.
4. Razumevanje razmerja $1 : n$ in $n : 1$ za poljubno naravno število n ter razmerij, ki se preprosto izražajo kot njihova vsota.
5. Razumevanje razmerja dveh poljubnih naravnih števil. Učenec operira z razmerjem kot izvedenem pojmom, ne pa kot s parom konkretnih števil, s katerim je razmerje predstavljeno.

Navedeni koraki kažejo pot, ki jo prehodi otrok pri razumevanju pojma razmerja. Vsak korak zahteva določno miselno zrelost in izkušnje – na vse to pa ima učitelj matematike, kot smo omenili, komajda kakšen vpliv. Seveda lahko učenca že razmeroma zgodaj naučimo postopkov za reševanje takšnih in drugačnih tipov nalog v zvezi z razmerji, ne moremo pa pričakovati, da jih bo otrok razumel. Posledice so neprimerna uporaba (npr. zamenjava premega in obratnega razmerja), računanje brez vpogleda in predvsem hitro pozabljanje. Povprečen šestošolec zna korektno množiti števila z ulomki, tako rekoč noben šestošolec in celo le del osmošolcev² pa bo predelal kuharski recept iz 6 na 8 ljudi tako, da bo količine množil z $8/6$, in to iz preprostega razloga, ker še ni misleno zrel za operiranje z razmerjem kot izvedenim pojmom.

Razumevanje določenih matematičnih vsebin zahteva ustrezno zrelost učenčevega mišljenja, ki je ne smemo enačiti s sposobnostjo. To velja posebej za nekatere osnovnošolske vsebine (npr. razumevanje pojma števila na razredni stopnji ter zgoraj opisani primer razmerja na predmetni stopnji). Učenca, čigar kvaliteta mišljenja še ni na primerni stopnji, učitelj

² Po nekaterih raziskavah je le kakih 30% petnajstletnikov sposobnih takega operiranja [3]. Seveda znajo tudi drugi učenci rešiti tovrstne naloge, vendar pri reševanju bodisi uporabljajo procedure, ki jih ne razumejo, ali pa njim razumljive procedure, pri katerih se izognejo operiranju z razmerjem (tipična strategije je redukcija na enoto).

matematike (še) ne more učiti z razumevanjem. V tem smislu matematike ni mogoče učiti: učitelj lahko učenca nauči postopke, razumevanje pa gre svojo pot v skladu z otrokovim razvojem.

3. razlog. Komuniciranje pomena

Na začetku naj omenim izkušnjo študentke Marije Mohorič s Pedagoške fakultete v Ljubljani, ki je preučevala sodelovalno učenje pri pouku matematike. Med drugim je opazovala učence sedmih razredov pri učenju v parih, kjer je en udeleženec igral vlogo učitelja, drugi udeleženec pa vlogo učenca. Pri reševanju nalog je moral učenec učitelju poročati, kako rešuje nalogo, učitelj pa je učenca spodbujal, nadzoroval, če je bilo potrebno tudi popravljaj in mu kaj razložil. Študentka je vse pogovore v parih snemala in jih kasneje analizirala. Pri tem je opazila zanimiv pojav: učenci so uporabljali matematične izraze na neobičajne načine, a so se kljub temu razumeli. Oglejmo si izsek enega od pogovorov.

Ivo: $-m^2 + (2m - 1) - (m^2 + 2m - 1) =$
 $-m^2 + 2m - 1 - m^2 - 2m + 1$

Jan: *Enaka člena se pokrajšata.*

Ivo: $-m^2$, m^2 se pokrajšata, $2m$, $-2m$ se pokrajšata, -1 in 1 se da pokrajšati. In kaj sedaj sploh pride?

Jan: Čakaj, bom še enkrat pogledal, ... $2m$, $-2m$ se pokrajša, m^2 , $-m^2$ se pokrajša, -1 in 1 se pokrajša...

Ivo: *Potem je to nič.*

Podobno so se pogovarjali drugi učenci. Zanimiva je uporaba izraza „krajšanje”. Malodane vsi učenci so ga uporabljali v pomenu uničevanja členov (npr. $m - m$). Gre le za terminološko nekorektnost, ali pa učenci ne razlikujejo med krajšanjem ($m/m = 1$) in uničevanjem ($m - m = 0$)? Pazljivo branje gornjega dialoga nas napelje na sum, da ne drži ne eno ne drugo. Učenci uporabljajo besedo „krajšanje” kot „operacijo, kjer dva člena prečrtamo in za njima ne ostane ničesar” — zato tudi zmeda ob primeru, kjer vsi členi „izginejo”.

Pomislimo na pouk, ki so ga deležni ti učenci. Njihova učiteljica korektno uporablja izraza „krajšanje” in „uničevanje”, skoraj vsi učenci pa eno in drugo besedo razumejo po svoje, namreč kot prečrtanje izrazov. Pri komuniciranju z učiteljico — to si lahko mislimo — učenci uporabljajo tisto besedo, ki si jo učiteljica želi slišati, pri sebi pa eno in drugo besedo razumejo kot „črtanje”.

Pri uporabi besed „krajšanje” in „uničevanje” v komuniciranju med učiteljico in učenci gre v bistvu za nesporazum. Takih primerov nesporazumov bi pri pouku matematike lahko našli še veliko, in to na vseh ravneh matematičnega izobraževanja. Po zgledu nekega visokošolskega učitelja ([3]) sem študentom zastavil vprašanje:

V neki državi se je inflacija v zadnjih 6 mesecih zmanjšala od 18% na 7%. Kaj pomeni ta podatek za vrednost valute? (Ali smo za dano količino valute dobili več zlata prej ali po šestih mesecih?)

Večina študentov je odgovorila, da se je vrednost valute povečala, da bi torej za dano količino valute dobili več zlata po šestih mesecih. (Podobno se je zgodilo učitelju, po katerem sem se zgledoval.) Pred to izkušnjo bi študentom brez vsakega pomisleka govoril o padanju inflacije (npr. v povezavi z zmanjševanjem odvoda naraščajoče funkcije), misleč, da padanje inflacije razumejo enako kot jaz, dejansko pa bi večina študentov moj stavek interpretirala povsem drugače.

Gornja primera kažeta na eno od težav pri poučevanju, namreč na problem komuniciranja pri pouku. Beseda komuniciranje izhaja iz besede *communis* (lat. skupno) oziroma iz besede *communicare* (lat. *napraviti* nekaj skupno). Pri komunikaciji (tu mislimo predvsem na razlago in pogovor pri pouku) so skupne besede. Učenec in učitelj med razlago, pisnim sporočanjem in med pogovorom izmenjujeta besede³, ne pa njihovega pomena. Oba na primer govorita o krajsanju in uničevanju, pri tem pa razumeta besede vsak po svoje. Tu ne govorimo o učencu ali študentu, ki se nauči na pamet nekaj stavkov in iz načina, kako jih pove, jasno vidimo, da nima pojma, o čem govori. Govorimo o primerih, kjer učitelj in učenec prepričljivo komunicirata besede, ki pa jih razume vsak po svoje, na bistveno različen način, a ker uporabljata iste besede, razlike v razumevanju ne opazita.

Omenjene težave pri komunikaciji niso nekaj specifično matematičnega. V filozofskem pogledu je nanje opozoril avstrijsko-angleški filozof Ludwig Wittgenstein in so temeljno preučevanje logičnih pozitivistov. Zanimivo je, da je bil Wittgenstein, ki je ustvarjal v letih 1910–1950, osnovnošolski učitelj matematike v Avstriji ter seveda predavatelj filozofije na angleških univerzah. Preučevanje komuniciranja vodi v neprijazne vode, saj na koncu ugotovimo, da načeloma sploh ni mogoče komunicirati pomena. (Ali lahko nekomu sporočim, kako mene boli zob?)

Če smo pri pouku pozorni na izvajanje (performanso), rezultate, izražanje in na reševanje, razlik v razumevanju prav lahko ne opazimo. Pri tovrstnem pouku razlike v razumevanju pravzaprav niti niso pomembne. To lahko ilustriramo z nekoliko prirejenim zgledom, ki smo si ga izposodili pri Wittgensteinu ([8], točka 151): Recimo, da učitelj piše na tablo zaporedje 1, 5, 11, 19, 29, ... Učenec v tem trenutku vzklikne: Znam nadaljevati (in nadaljuje 41, 55, 69, ...). Učitelj sklepa, da učenec razume zaporedje, saj ga zna poljubno nadaljevati. V resnici pa je učitelj razumel zaporedje kot evaluacijo izraza $n^2 + n - 1$ za naravna števila, učenec pa je členom zaporedno prišteval 4, 6, 8, 10, ... Na nivoju izvajanja je rezultat res enak, razumevanje pa prav gotovo ni enako. Kot matematiki sicer lahko govorimo

³ Izraz „beseda” v tem razdelku uporabljamo za simbolično predstavitev pojma z glasovi, črkami ali matematično simboliko.

o dveh različnih predstavitev istega zaporedja ($a_n = n^2 + n - 1$ ter $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$, $n \in \mathbb{N}$), za učitelja in učenca, recimo na razredni stopnji osnovne šole, ki še nima oblikovanega pojma spremenljivke in zaporedja, pa je vsebina razumevanja neizrekljiva. Razumevanje desetiškega zapisa – ene res težavnih tem osnovnošolske matematike – je lep in realističen primer. Razumevanje mestne vrednosti pri desetiškem zapisu se kaže s sposobnostjo učenca, da zna pravilno zapisovati zaporedje števil prek desetic, stotic ipd. in da zna pravilno izvajati pisne algoritme za naravna števila. Kaj v resnici otrok razume pod mestno vrednostjo, je neizrečeno (če ne celo neizrekljivo). Podobno velja za presenetljivo (ne)razumevanje decimalnih mest. Ali je v kontekstu poučevanja pojem decimalnega mesta sploh izrekljiv? Z razlago, vajo in spraševanjem nasploh ne morem prenesti razumevanja na učenca. Besede, ki jih izreče učitelj, učenec po svoje pomensko obarva in razume nekaj povsem svojega.

Osnovna težava komuniciranja je torej načelna nemožnost prenosa pomena. Slišano besedo ali stavek učenec in učitelj interpretirata v skladu s svojim mehanizmom določanja pomena, ki je povsem individualen. Po drugi strani je seveda očitno, da se pri sporočanju običajno razumemo. Če prosim učenca, naj mi prinese pet zvezkov, mi bo zagotovo prinesel (če bo to želel) pet zvezkov in ne deset knjig. Ko z učencem govoriva o številu pet in o knjigah, se očitno razumeva. O tem, kako je mogoče, da se sporazumemo, kljub temu da načeloma ni mogoče sporočati pomena, je bilo izdelanih več različnih teorij, ki seveda segajo na področje filozofije. Za sam pouk pa je prav gotovo najbolj zanimiva in pomembna razlaga filozofa Maturana. Po njej besede, ki jih razumemo funkcionalno enako, tvorijo *področje konsenza* (*consensual domain*). Ko govorimo o jeziku, razumemo sporočanje v okviru področja konsenza. Besedi „knjiga” in „pet” sta npr. v okviru pouka v razredu v področju konsenza (ne pa na primer v okviru skupine triletnih otrok). Kako pa je prišla beseda „knjiga” v področje konsenza? Verjetno je učencu, ko je bil še majhen otrok, kdo pokazal nekaj primerov knjig in neknjig. Tako si je ustvaril prvo razumevanje besede knjiga. Ob komuniciranju z okolico je svoje razumevanje besede „knjiga” moral še temeljito spreminjati (na primer, ko ga je kdo zelo čudno pogledal, ko je časopisu rekel „knjiga”). Ščasoma je svoje razumevanje besede „knjiga” *uskladil* z razumevanjem okolice. Beseda „knjiga” je postala del jezika in jo torej funkcionalno lahko uporablja pri sporočanju. Učenčevo razumevanje besede „knjiga” je usklajeno z okolico, vendar njegov individualni konstrukt, ki ni enak razumevanju pri drugih otrocih. Razlike se pokažejo pri mejnih primerih (nekdo bo delovni zvezek prišteval h knjigam, drugi pa ne).

Problem nemožnosti komuniciranja pomena je pri pouku matematike bolj izrazit kot pri drugih predmetih, seveda če smo pozorni na razumevanje in ne le na performanso. Na vseh nivojih pouka matematike uvajamo nove in zahtevne pojme. Njihovega pomena učitelj ne more razložiti in prenesti na učence. Lahko da neke smernice, ki jih vsak učenec po svoje

interpretira. Tvorba pomena, pravzaprav pomenov, poteka potem v samih učencih. V številnih situacijah nato učenci usklajujejo svoja razumevanja pojma z učiteljevim in razumevanjem sošolcev. Pri pouku gre torej za proces, kjer učitelj in učenci usklajujejo pomen pojma do te mere, da je možna komunikacija na nivoju jezika.

V vsakdanjem življenju in pri obravnavi dobro usvojenih matematičnih vsebin pri komuniciranju ne prihaja do bistvenih nesporazumov. Drugače pa je pri pouku matematike, kjer mrgoli mejnih pojmov, katerih pomeni še niso usklajeni. Pozorno opazovanje v razredu pri pouku matematike nam tako rekoč pri vsaki uri kaže na presenetljivo neusklajenost pomenov matematičnih izrazov. Navedel bom nekaj zgledov:

Vsak izobražen človek dobro razume, kaj je decimalno mesto. In vendar morajo celo marsikateri poklicni matematiki razmisliti ob vprašanju: Ali je $0,999999\dots$ enako 1? Na vprašanje dobimo različne odgovore in razlage.

Znano je, da veliko sedmošolcev še ne razlikuje med obsegom in ploščino ravninskega lika. Pri pouku matematike petošolcem, šestošolcem in sedmošolcem mirno govorimo o ploščini lika. Mnogo učencev enači ploščino z obsegom oziroma jo interpretira kot nekaj, kar je najtesneje povezano z dolžino črte, ki omejuje lik. Mnogi učenci tudi trdijo, da liki, ki jih omejujejo krive črte, nimajo ploščine. Ali učitelj, ki učencem govori o ploščini, sploh uči?

Srednješolski učitelj, ki vpraša svoje dijake, koliko ulomkov (racionalnih števil) je med $1/2$ in $1/4$, doživi presenečenje. Veliko dijakov trdi, da obstaja le en sam tak ulomek (namreč $1/3$) ali pa celo, da ne obstaja noben tak ulomek, ker med $1/4$ in $2/4 (=1/2)$ ni nobenega ulomka. Ti dijaki doživljajo in razumejo racionalna števila drugače kot učitelj, ta razlika pa pri običajnem pouku dostikrat sploh ni zaznavna.

Ko pri pouku operiramo z novimi, še neizoblikovanimi pojmi, je smiselno govoriti o pouku kot procesu usklajevanja pomenov. Kot kažejo gornji primeri, je usklajevanje pomenov praviloma dolgotrajen proces, ki ga je pri pouku matematike v določeni meri stalno čutiti in se ga pogosto niti ne zavedamo. V procesu usklajevanja ne moremo govoriti o poučevanju v smislu prenosa znanja ali pomena. Pri pouku matematike učiteljevo eksplisitno poučevanje učenci razumejo čisto po svoje (in tega niti ne zaznamo), dejansko učenje poteka na drugem nivoju, in sicer kot usklajevanje pomenov. Pri običajnem pouku (razlaga, pogovor, vaje) je usklajevanje pomenov relativno majhno, zato so bile razvite tehnike in prijemi, ki posebej poudarjajo ta aspekt pouka. V končni fazi učitelj in učenci dosežejo konsenz. Kot pravi Maturana, je pri pouku usvojeni pojem, pogledan od daleč, kot

mogočno drevo. Če pa si ga pogledamo od blizu, vidimo, da gre za skupek samostojnih rastlin, ki so se, ker rastejo druga ob drugi, med seboj uskladile do te mere, da so na pogled enovita rastlina. V resnici pa je morala vsaka rastlina zrasti sama in se sama vrasti v skupno krošnjo.

LITERATURA

- [1] D. Davidson, *Raziskave o resnici in interpretaciji*, ŠKUC, Ljubljana, 1988.
- [2] M. P. Driscoll, *Psychology of Learning for Instruction*, Allyn and Bacon, Boston, 1994.
- [3] K. Hart, *Children Understanding of Mathematics: 11–16*, John Murray, London, 1982.
- [4] J. Lockheah, *Making the Mean*, E. Glaserfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994), 75–87.
- [5] M. Mohorovič, *Kooperativno učenje matematike*, Diplomsko delo, PeF Ljubljana, 1995.
- [6] A. Orton, *Learning Mathematics*, Cassel, London, 1992.
- [7] J. Richards, *Mathematical Discussions*, E. Glaserfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994), 13–52.
- [8] L. Wittgenstein, *Filozofska istraživanja*, Nolit, Beograd, 1969.

Obzornik za matematiko in fiziko 43 (1996) številke 1–6, str. 1–192

Članki – matematika

Endomorfizmi obsega kompleksnih števil — Endomorphisms of the field of complex numbers (Peter Šemrl)	1–7
Popolnoma pozitivne preslikave — Completely positive maps (Aleksej Turnšek)	9–15
Rešitve Riccatijeve algebrajske enačbe — The solutions of the Riccati algebraic equations (Mirko Dobovišek)	33–38
Konstrukcija Mycielskega — Construction of Mycielski (Matej Mencinger)	39–46
Povabilo v jordanski svet — An invitation to the Jordan world (Borut Zalar)	47–53
Sebiadjungirane rešitve matričnih kvadratnih enačb — The selfadjoint solutions of matrix quadratic equations (Mirko Dobovišek)	65–72
O simbolnem računanju — On symbolic computation (Sandi Klavžar)	73–77
Novosti v programu Derive 3 — New features in Derive 3 (Matija Lokar)	78–83
Singularna števila matrik — Singular values of matrices (Aleksej Turnšek)	97–104
Stičišča in razhajanja v poučevanju osnovnošolske in srednješolske matematike — Points of connection and separation in teaching primary and secondary school mathematics (Milena Strnad)	105–115
Kriptosistem RSA leta 1873? — RSA cryptosystem in year 1873? (Janez Žerovnik)	116–118
Primerjava dolžin vzporednih sklenjenih poti — The comparison of lengths of parallel paths (Damjan Kobal)	129–138
Številski sistemi s kompleksnimi osnovami — Number systems with complex bases (Janko Bračič)	139–149
Vsote praštevil in vsote njihovih kvadratov — Sums of prime numbers and sums of their squares (Boris Lavrič)	161–167
Kvantna ravnina — Quantum plane (Bojan Magajna)	168–177
Je mogoče učiti matematiko? — Can mathematics be taught? (Zlatan Magajna)	183–XXIII

Članki – fizika

Mikroskop na atomsko silo — Atomic force microscope (Mojca Vilfan in Igor Muševič)	16–24
Nenavadni interferenčni poskusi: Korak k Heisenbergovemu mikroskopu — Unusual interference experiments: A step toward the Heisenberg microscope (Janez Strnad)	54–59
Optično inducirana difuzija — Light-induced drift (Ivan Kuščer)	84–94
Nenavadni interferenčni poskusi: Časovna interferenca z atomskim curkom — Unusual interference experiments: Interference in time with an atomic beam (Janez Strnad)	150–155
Skakanje z vrvjo — Bungee jumping (Janez Strnad)	178–182

Nove knjige

Stefanovich maps and automorphic forms (Miran Černe)	7–8
Uvod v numerične metode (Bor Plestenjak)	61–62
Matematika in denar (Zvonimir Bohte)	62
The nature of space and time (Janez Strnad)	XI
General theory of relativity (Janez Strnad)	104
Prospects of topology (Matija Cencelj)	125–127
Non-standard analysis (Niko Prijatelj)	128
Modern methods in complex geometry (Miran Černe)	XV
Angular momentum in quantum mechanics (Janez Strnad)	XV
Vektorska in tenzorska analiza – abeceda globalne analize (Pavle Šaksida)	156–157
The classical quantum 6j-symbol (Pavle Šaksida)	XIX–XX
Prispevki k poučevanju matematike (Silva Kmetič)	XX

Vesti, novice, obvestila, vabila

Mednarodno tekmovanje študentov iz matematike (Matjaž Željko)	25–26
Priznanja DMFA učiteljem matematike in fizike (Iva Mulec in Nada Razpet)	27–30
Poročilo o 47. občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Martina Koman)	31–IV
Vabilo na seminar (Ivana Mulec)	IV
Fizika v šoli (Ivan Kuščer)	63–VII
Metki Luzar-Vlachy v slovo (Zvonko Trontelj)	VII–VIII
Novi člani Društva v letu 1995 (Andreja Šafarič)	VIII
In memoriam profesorju Otonu Sajovcu (Anton Suhadolc)	95–96
Profesor dr. Tomislav Skubic – umrl (Gabrijel Tomšič)	96
Podiplomski študij za učitelje matematike (Milan Hladnik)	XI
Strokovno izpopolnjevanje učiteljev matematike (Milan Hladnik)	XII
Razpis za priznanja učiteljem (Ivana Mulec)	118
Pismo ministru za znanost in tehnologijo	119
Seznam diplomantov prve, druge in tretje stopnje ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1995 (Martina Koman)	120–125
Razpis DMFA Slovenije za posebne pohvale šolam (UO DMFA Slovenije)	127
Strokovno srečanje in 48. občni zbor društva (Egon Zakrajšek)	XVI
Tretje mednarodno tekmovanje študentov matematike v Plovdivu v Bolgariji (Marjan Jerman)	158–160
Strokovna logika? (Ivan Kuščer)	167
Utrinek (izbral Janez Strnad)	60
Popravek	30