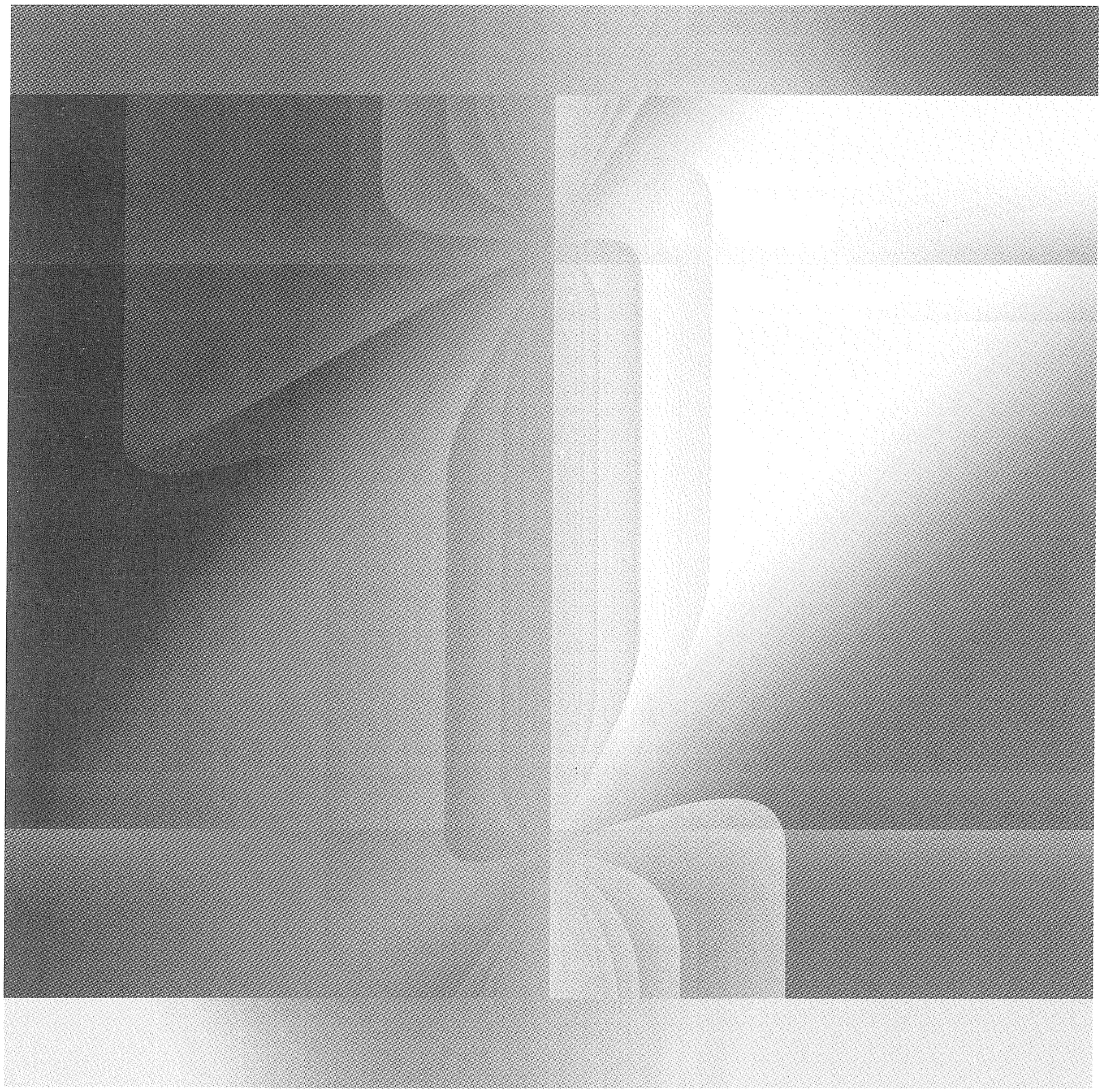
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

SSN 0473-7466

ODPISANO

2002
Letnik 49
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 2002

letnik 49, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Naslov uredništva:

DMFA – založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.

Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 Telefaks: (01) 2517 281

Devizna nakazila: SKB banka d. d., Ajdovščina 4, Ljubljana

SWIFT: SKBASI2X

Transakcijski račun: 03100-1000018787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Alenka Klokočovnik (društvene novice), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2002 DMFA Slovenije – 1494

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles Str.–Page

Električna potencialna energija osnih večpolov — Electrical potential energy of axial multipoles (Izidor Hafner in Marko Petkovšek) 65–73

Enostavni ravninski liki s pozitivno ploščino — Simple plane arcs of positive area (Irena Hrastnik) 74–84

Simetrija – v teoriji grafov in na splošno — Symmetry – in graph theory and in general (Primož Potočnik) 87–95

Digresija zvezde — Digression of a star (Marijan Prosen) 96–III

Vesti — News

In memoriam prof. Francetu Križaniču (Anton Suhadolc) 84–86

Novi člani društva v letu 2001 (Vladimir Bensa) III

Veliki slovar tujk v prednaročilu (Vladimir Bensa) IV

Na naslovnici je slika iz projekta „Naključna umetnost”, katerega avtor je Andrej Bauer. Več o projektu lahko najdemo na spletnem naslovu `http://andrej.com/art`

ELEKTRIČNA POTENCIALNA ENERGIJA OSNIH VEČPOLOV

IZIDOR HAFNER IN MARKO PETKOVŠEK

Math. Subj. Class. (2000): 33F10, 40A25, 41A58

V članku opišemo konstrukcijo osnih električnih večpolov, pri katerih je potencial v oddaljeni točki obratno sorazmeren poljubni potenci razdalje točke od izhodišča. Nato izračunamo električno potencialno energijo takšnega sistema nabojev. Pri poenostavljanju dobljene dvojne vsote si pomagamo s Chu-Vandermondovo konvolucijsko identiteto in z Zeilbergerjevim sumacijskim algoritmom.

ELECTRICAL POTENTIAL ENERGY OF AXIAL MULTIPOLES

We describe a construction of axial electric multipoles that generate a potential which is inversely proportional to any integer power of distance from the origin. The energy of this system is calculated. To simplify the resulting double sum we make use of the Chu--Vandermonde convolution identity and of Zeilberger's summation algorithm.

Uvod

Električni potencial, ki ga generira sistem točkastih nabojev $e_0, e_1, \ldots, e_m$ v točkah s krajevnimi vektorji $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$, je v točki s krajevnim vektorjem $\boldsymbol{r}$ enak

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=0}^{m} \frac{e_j}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j\|}. \tag{1}$$

Ta potencial je enak delu, ki ga moramo opraviti pri premagovanju električne sile, če enoto pozitivnega naboja prenesemo iz neskončno oddaljene točke v točko $\boldsymbol{r}$.

Potencialna energija naboja e v točki $\boldsymbol{r}$ je enaka

$$W(e, \boldsymbol{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=0}^{m} \frac{e_j}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j\|}.$$

Skupna električna potencialna energija zgornjega sistema nabojev pa je dana z naslednjo dvojno vsoto [3, str. 324]:

$$W_{ep} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{0 \le i \ne j \le m} \frac{e_i e_j}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{e_i e_j}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|}. \tag{2}$$

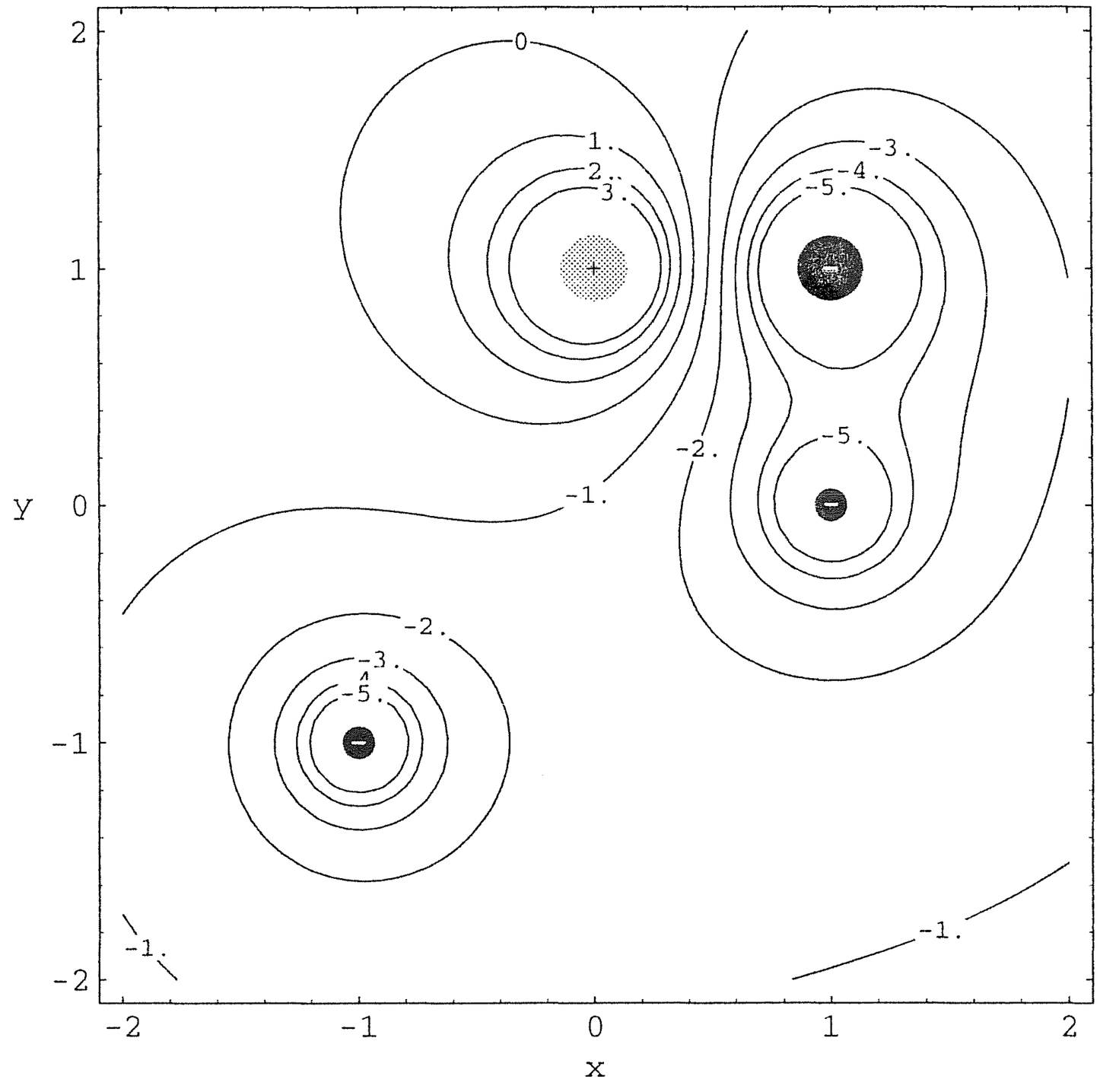
Potencialno energijo sistema lahko tolmačimo kot delo, ki je potrebno, da zgradimo ta sistem nabojev, če so prvotno naboji v neskončno oddaljeni točki.

Grafična predstavitev potenciala

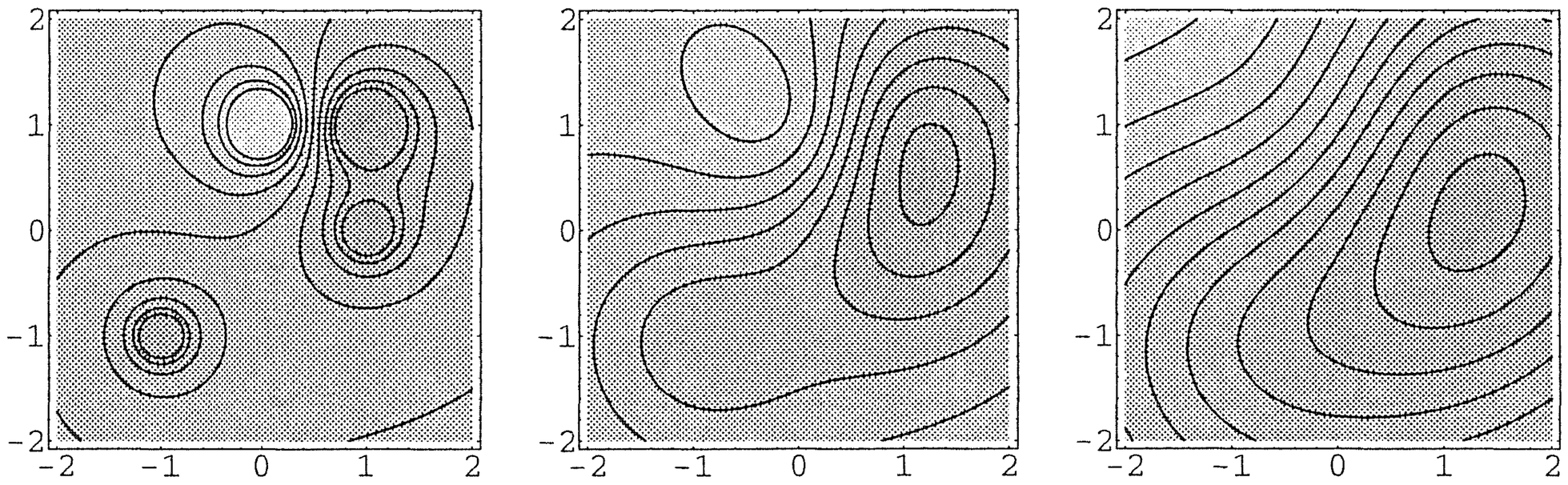
Kot zgled vzemimo sistem štirih nabojev v prostoru xyz, ki ga podaja naslednja tabela:

i	$\boldsymbol{r}_i$	e_i
0	$(1,0,0)$	-1
1	$(1,1,0)$	-2
2	$(0,1,0)$	2
3	$(-1,-1,0)$	-1

(3)



Slika 1. Preseki ekvipotencialnih ploskev sistema (3) z ravnino $z = 0$. Na nivojnicah je označena vrednost potenciala, pomnoženega s $4\pi\varepsilon_0$.



Slika 2. Preseki ekvipotencialnih ploskev sistema (3) z ravninami $z = 0, 1, 2$.

Slika 1 prikazuje presek ekvipotencialnih ploskev sistema (3) z ravnino $z = 0$, v kateri ležijo vsi štirje naboji, slika 2 pa preseke ekvipotencialnih ploskev istega sistema z ravninami $z = 0, 1, 2$. Vse slike so izdelane s programom *Mathematica*.

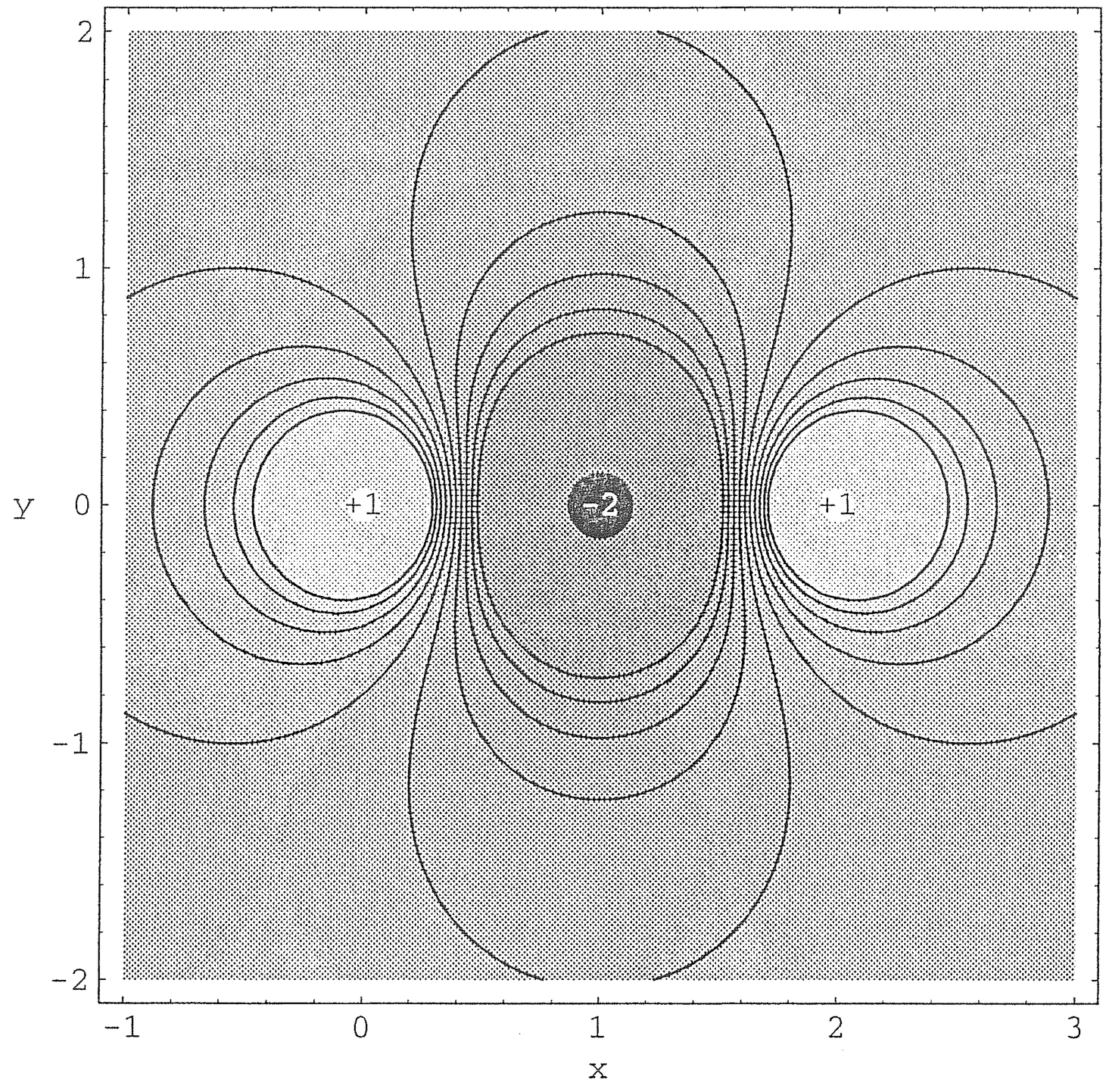
Konstrukcija osnih večpolov

Začeli bomo z enoto pozitivnega naboja v koordinatnem izhodišču (večpol reda 0). Naredimo kopijo naboja z nasprotnim predznakom in jo premaknimo za enoto v pozitivni smeri osi x. Naboja skupaj tvorita električni dipol oziroma večpol reda 1. V splošnem bo konstrukcija naslednja: večpolu reda m dodamo nasprotni večpol, premaknjen v desno za enoto razdalje. Splošno so premiki lahko v poljubni smeri, zato se število nabojev na vsakem koraku podvoji, tako da govorimo o dipolu, kvadropolu, oktopolu, ... V našem primeru pa po seštevanju dobimo le en naboj več [1].

Z indukcijo po m se lahko prepričamo, da ima večpol reda m v točki $\boldsymbol{r}_i = (i, 0, 0)$ naboj $e_i = (-1)^i \binom{m}{i}$. Električni potencial večpola reda m je po formuli (1) enak

$$U_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j \binom{m}{j}}{\|\boldsymbol{r} - (j, 0, 0)\|}. \tag{4}$$

Slika 3 prikazuje preseke ekvipotencialnih ploskev kvadropola ($m = 2$) z ravnino $z = 0$.



Slika 3. Preseki ekvipotencialnih ploskev kvadropola ($m = 2$) z ravnino $z = 0$.

Električna potencialna energija večpola reda m pa je po formuli (2) enaka

$$W_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^{i+j} \binom{m}{i} \binom{m}{j}}{i-j}.$$

V nadaljevanju nas ne bo zanimala fizikalna plat problema, zato bomo izpustili koeficient $1/(4\pi\varepsilon_0)$ in imenovali *potencial* kar količino $V_m(\boldsymbol{r}) = 4\pi\varepsilon_0\, U_m(\boldsymbol{r})$, količino $Z_m = 4\pi\varepsilon_0\, W_m$ pa *energija*.

Razvoj potenciala v potenčno vrsto

Oglejmo si potencial v zelo oddaljeni točki na osi večpola $\boldsymbol{r} = (r, 0, 0)$, kjer je $r > m$. Namesto $V_m(\boldsymbol{r})$ pišimo kar $V_m(r)$, pa iz formule (4) dobimo

$$V_m(r) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j \binom{m}{j}}{r-j}. \tag{5}$$

Za $m = 0, 1, 2, 3, 4$ napišimo prva dva člena razvoja funkcije $V_m(r)$ v potenčno vrsto pri velikem r. Izračun je narejen s programom *Mathematica*.

$$V_0(r) = \frac{1}{r}$$

$$V_1(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r-1} = -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

$$V_2(r) = \frac{1}{r} - \frac{2}{r-1} + \frac{1}{r-2} = \frac{2}{r^3} + \frac{6}{r^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right),$$

$$V_3(r) = \frac{1}{r} - \frac{3}{r-1} + \frac{3}{r-2} - \frac{1}{r-3} = -\frac{6}{r^4} - \frac{36}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right),$$

$$V_4(r) = \frac{1}{r} - \frac{4}{r-1} + \frac{6}{r-2} - \frac{4}{r-3} + \frac{1}{r-4} = \frac{24}{r^5} + \frac{240}{r^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^7}\right).$$

Vidimo, da je v omenjenih primerih potencial večpola reda m obratno sorazmeren $(m+1)$-vi potenci razdalje od izhodišča. Pokažimo, da to velja za vsako naravno število m! Razvijmo potencial $V_m(r)$ v vrsto po potencah $1/r$ pri splošnem m. Za en člen dobimo

$$\frac{1}{r-j} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1-j/r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{r^{k+1}},$$

za vsoto iz enačbe (5) pa

$$V_m(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{k+1}} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} j^k = (-1)^m m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{k,m}}{r^{k+1}}.$$

Tu je $S_{k,m}$ Stirlingovo število 2. vrste, ki šteje razdelitve množice s k elementi na m nepraznih blokov (prim. [2, str. 58]). Za $k < m$ je $S_{k,m} = 0$, medtem ko je $S_{m,m} = 1$ in $S_{m+1,m} = m(m+1)/2$, zato lahko zapišemo

$$V_m(r) = (-1)^m m! \sum_{k=m}^{\infty} \frac{S_{k,m}}{r^{k+1}} = \frac{(-1)^m m!}{r^{m+1}} + \frac{(-1)^m m\,(m+1)!}{2\,r^{m+2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{m+3}}\right).$$

Energija osnih večpolov

Tabelirajmo energijo osnega večpola reda m

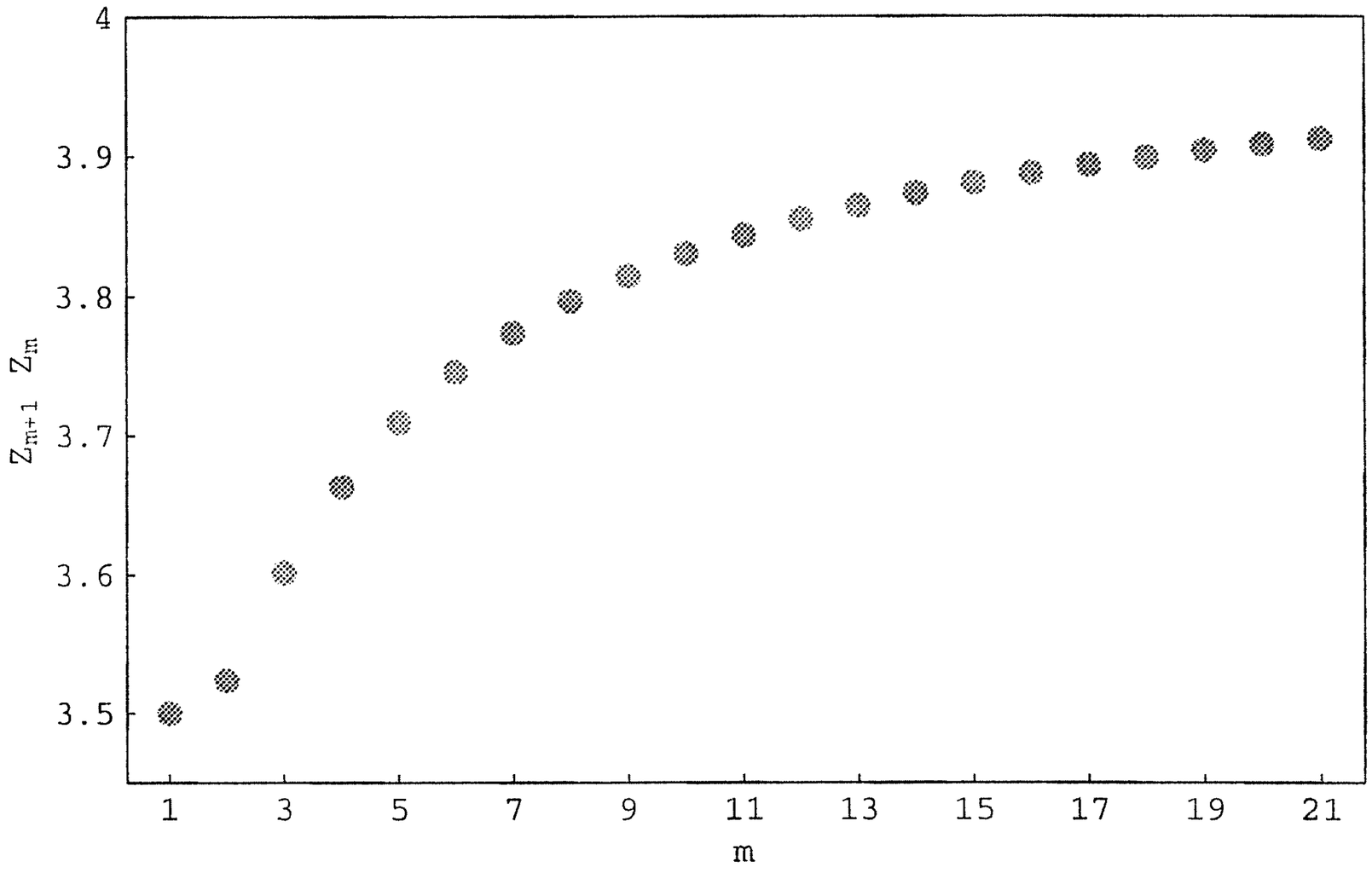
$$Z_m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^{i+j} \binom{m}{i} \binom{m}{j}}{i-j} \tag{6}$$

in po vrsti razmerja med dvema zaporednima vrednostima za $m = 1, 2, \ldots, 21$.

m	Z_m	$\frac{Z_{m+1}}{Z_m}$
1	-1.00000	3.50000
2	-3.50000	3.52381
3	-12.3333	3.60135
4	-44.4167	3.66304
5	-162.700	3.70969
6	-603.567	3.74553
7	-2260.68	3.77372
8	-8531.16	3.79640
9	-32387.7	3.81501
10	$-123560.$	3.83054
11	$-473300.$	3.84368
12	-1.81921×10^6	3.85495
13	-7.01298×10^6	3.86471
14	-2.71031×10^7	3.87325
15	-1.04977×10^8	3.88077
16	-4.07392×10^8	3.88746
17	-1.58372×10^9	3.89344
18	-6.16611×10^9	3.89881
19	-2.40405×10^{10}	3.90368
20	-9.38464×10^{10}	3.90809
21	-3.66760×10^{11}	3.91212

Števila v desnem stolpcu v odvisnosti od m prikazuje slika 4.

Izračun vrednosti pri velikih številih nam vsiljuje domnevo, da je limita kvocienta Z_{m+1}/Z_m enaka 4. Dokažimo to! Najprej poenostavimo dvojno



Slika 4. Razmerja Z_{m+1}/Z_m v odvisnosti od m.

vsoto, ki nastopa v izrazu (6). Pri tem bomo uporabili *Chu-Vandermondovo*[1] konvolucijsko identiteto

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \binom{r_1}{n_1+j}\binom{r_2}{n_2-j} = \binom{r_1+r_2}{n_1+n_2}, \tag{7}$$

ki velja za vse $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ in (ob dogovoru, da je binomski koeficient z negativnim spodnjim številom enak 0) za vse $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Preprosto jo izpeljemo s pomočjo razvoja v binomsko vrsto. Pri $|z| < 1$ je namreč

$$(1+z)^{r_1}(1+z)^{r_2} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{r_1}{i}z^i \sum_{j=0}^{\infty}\binom{r_2}{j}z^j = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{i=0}^{k}\binom{r_1}{i}\binom{r_2}{k-i},$$

pa tudi

$$(1+z)^{r_1}(1+z)^{r_2} = (1+z)^{r_1+r_2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r_1+r_2}{k}z^k,$$

od koder z izenačenjem koeficientov pri z^k sledi

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{r_1}{i}\binom{r_2}{k-i} = \binom{r_1+r_2}{k}.$$

[1] Identiteto je poznal kitajski matematik Chu Shih-Chieh že leta 1303, zahodnemu svetu pa je znana iz razprave Alexandra Vandermonda iz leta 1772.

Pišimo $i = j + n_1$ in $k = n_1 + n_2$, pa dobimo

$$\sum_{j=-n_1}^{n_2} \binom{r_1}{n_1+j} \binom{r_2}{n_2-j} = \binom{r_1+r_2}{n_1+n_2},$$

kar je ravno identiteta (7).

V vsoti (6) namesto j vpeljimo novo spremenljivko $k = i - j$ in zamenjajmo vrstni red seštevanja, pa dobimo

$$Z_m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{i} \frac{(-1)^{2i-k} \binom{m}{i} \binom{m}{i-k}}{k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{i=k}^{m} \binom{m}{m-i} \binom{m}{i-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{k} \binom{2m}{m-k},$$

kjer smo na zadnjem koraku uporabili Chu-Vandermondovo identiteto (7).

Dobljeno enojno vsoto poskusimo še nadalje poenostaviti s pomočjo *Zeilbergerjevega*[2] sumacijskega algoritma [6], ki za funkcijo oblike

$$F(m,k) = P(m,k)\, \alpha^m \beta^k \, \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma(a_i m + b_i k + u_i)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(c_i m + d_i k + v_i)},$$

kjer je $P(m,k)$ polinom s kompleksnimi koeficienti, α, β, u_i, v_i so kompleksna števila (lahko odvisna od parametrov), a_i, b_i, c_j, d_j pa konkretna cela števila, poišče takšno naravno število d, racionalne funkcije $r_0(m), r_1(m), \ldots, r_{d-1}(m)$ in funkcijo $G(m,k)$, da F in G zadoščata rekurzivni zvezi

$$F(m+d,k)+r_{d-1}(m)F(m+d-1,k)+\cdots+r_0(m)F(m,k) = G(m,k+1)-G(m,k).$$

Izvrstno implementacijo Zeilbergerjevega algoritma v programskem sistemu *Mathematica* (z imenom `fastZeil`) lahko dobimo na spletnem naslovu [7].

V našem primeru vzemimo

$$F(m,k) = \frac{(-1)^k}{k} \binom{2m}{m-k} = \frac{(-1)^k \Gamma(k) \Gamma(2m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)\Gamma(m+k+1)}.$$

Tu je torej $P(m,k) = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $p = 2$ in $q = 3$. S temi podatki nam algoritem vrne rekurzivno zvezo

$$F(m+1,k) - 2\,\frac{2m+1}{m+1} F(m,k) = G(m,k+1) - G(m,k), \qquad (8)$$

---

[2] Doron Zeilberger (izg. *zajlberger*) se je rodil 1950 v Izraelu, živi in dela v ZDA.

kjer je

$$G(m,k) = \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{(m+1)(m+k)} \binom{2m}{m-k+1}.$$

Če želimo, lahko identiteto (8) brez težav preverimo neodvisno od Zeilbergerjevega algoritma.

Seštejmo zdaj (8) za $k = 1, 2, \ldots, m+1$ in upoštevajmo $Z_m = \sum_{k=1}^{m} F(m,k)$, pa dobimo

$$Z_{m+1} - 2\,\frac{2m+1}{m+1} Z_m \;=\; G(m,m+2) - G(m,1) \;=\; -\frac{1}{(m+1)^2}\binom{2m}{m}. \quad (9)$$

Rešitev homogenega dela te enačbe je $\binom{2m}{m}$, rešitev nehomogene enačbe pa po metodi variacije konstante poiščemo z nastavkom $Z_m = \binom{2m}{m} X_m$. Za neznano zaporedje X_m, ki zadošča začetnemu pogoju $X_0 = Z_0 = 0$, dobimo preprosto enačbo

$$X_{m+1} - X_m \;=\; -\frac{1}{(2m+1)(2m+2)}$$

z rešitvijo

$$X_m \;=\; -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k\,(2k-1)} \;=\; \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} \;=\; \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^k}{k},$$

od tod pa

$$Z_m \;=\; \binom{2m}{m} \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^k}{k}. \quad (10)$$

Vsote na desni ni mogoče zapisati v zaključeni obliki, zato je gornji izraz naš končni rezultat. Interpretiramo ga lahko kot potencialno energijo naboja velikosti $\binom{2m}{m}$ v točki 0, ki se nahaja v električnem polju sistema $2m$ alternirajočih enotskih nabojev $-1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1$, postavljenih v točke $1, 2, \ldots, 2m$.

Oglejmo si zdaj asimptotsko vedenje energije Z_m pri velikih vrednostih m. Binomski koeficient $\binom{2m}{m}$ je po Stirlingovi formuli asimptotsko enak $\frac{4^m}{\sqrt{\pi\, m}}$, alternirajoča harmonična vrsta pa ima vsoto $-\ln 2$, torej je

$$Z_m \;\sim\; -\frac{4^m \ln 2}{\sqrt{\pi\, m}}.$$

Od tod med drugim sledi, da je limita kvocienta Z_{m+1}/Z_m zares enaka 4, kot smo domnevali. Konvergenca pa je (po „zaslugi" alternirajoče harmonične vrste) zelo počasna.

Na koncu omenimo še dva načina, kako poenostaviti dvojno vsoto (6) povsem algoritmično, ne da bi morali poznati primerno zamenjavo spremenljivke. Naj bo $F(m,i,j) = (-1)^{i+j}\binom{m}{i}\binom{m}{j}/(i-j)$ sumand te vsote.

1. način: Zeilbergerjev algoritem lahko uporabimo kar na sumandu $F(m,i,j)$, ki ga obravnavamo kot funkcijo spremenljivk i in j, medtem ko je m le parameter. Po krajšem računu in z upoštevanjem znane identitete $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}^2 = \binom{2m}{m}$ dobimo

$$Z_m = \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}^2\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{k-m} = \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}^2 H_i - \binom{2m}{m}H_m, \qquad (11)$$

kjer $H_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$ označuje n-to *harmonično število.* Vsota na desni strani (11) je enojna le na videz, saj se v H_i skriva še ena. Vseeno je vsota (11) preprostejša od (6), kjer sumand notranje vsote vsebuje spremenljivko i iz sumacijske meje, medtem ko je sumand v definiciji harmoničnega števila H_i neodvisen od i.

2. način: Namesto Zeilbergerjevega algoritma lahko uporabimo tudi posplošitev tega algoritma na dvojne in večkratne vsote [5,4], ki v našem primeru vrne rekurzivno zvezo

$$\begin{aligned} &F(m+1,i,j) - 2\,\frac{2m+1}{m+1}\,F(m,i,j) = \\ =&\Delta_i(u(m,i,j)F(m,i,j)) + \Delta_j(v(m,i,j)F(m,i,j)), \end{aligned} \qquad (12)$$

kjer je $\Delta_i f(m,i,j) = f(m,i+1,j) - f(m,i,j)$, $\Delta_j f(m,i,j) = f(m,i,j+1) - f(m,i,j)$, $u(m,i,j)$ in $v(m,i,j)$ pa sta znani, a precej zamotani racionalni funkciji. Ko enačbo (12) seštejemo po j in i v primernih mejah ter nastale enojne vsote na desni seštejemo s pomočjo Zeilbergerjevega algoritma, dobimo že znano rekurzivno enačbo (9) z rešitvijo (10). Tudi implementacijo omenjene posplošitve Zeilbergerjevega algoritma (z imenom `MultiSum`) lahko dobimo na spletnem naslovu [7].

LITERATURA

[1] A. Dozorov, Electric multipoles, *Quantum*, september/oktober 1999, str. 4–8.
[2] M. Juvan, P. Potočnik, *Teorija grafov in kombinatorika — primeri in rešene naloge*, DMFA — založništvo, Ljubljana 2000.
[3] J. Strnad, *Fizika — drugi del*, DZS, Ljubljana 1978.
[4] K. Wegschaider, *Computer Generated Proofs of Binomial Multi-Sum Identities*, Diploma Thesis, RISC, J. Kepler University, Linz 1997.
[5] H. S. Wilf and D. Zeilberger, *An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities*, Invent. Math. **108** (1992) 575–633.
[6] D. Zeilberger, *The method of creative telescoping*, J. Symb. Comp. **11** (1991) 195–204.
[7] `http://www.risc.uni-linz.ac.at/research/combinat/risc/software/`

ENOSTAVNI RAVNINSKI LIKI S POZITIVNO PLOŠČINO

IRENA HRASTNIK

Math. Subj. Class. (2000): 28A75

V članku bomo definirali in zatem obravnavali simetrično Cantorjevo množico P z Lebesgueovo mero β, kjer je $0 \leq \beta < 1$ poljubno izbrano število. Nato bomo konstruirali enostaven lok g, katerega zaloga vrednosti vsebuje produkt $P \times P$, njegova ploščina pa je $\alpha = \beta^2$. Lok g bo primer enostavnega ravninskega loka s pozitivno ploščino.

SIMPLE PLANE ARCS OF POSITIVE AREA

In this paper we will define and investigate a symmetric Cantor set P having Lebesgue measure β, where $0 \leq \beta < 1$ is arbitrary. Then we will construct a simple arc g whose trace contains the product set $P \times P$ and has the area $\alpha = \beta^2$. The arc g will be an example of a simple plane arc of positive area.

1. Uvod

Tako preprost matematični objekt, kot je lok, pa toliko težav, lahko rečemo. Njegove lastnosti so namreč matematiki zelo pogosto obravnavali kot nekaj očitnega. Tako so na primer dolgo časa kot „očitno resnico" obravnavali dejstvo, da enostavni sklenjeni lok separira ravnino. Šele Jordan se je zavedel, da je to trditev treba dokazati. Njegov dokaz je bil resda napačen, vemo pa, da so vsi današnji dokazi te „očitne resnice" dokaj zahtevni, npr. [2, str. 375]. Ste se že kdaj vprašali, koliko znaša ploščina enostavnega loka? Verjetno ne, saj se vam zdi očitno, da je ta ploščina 0. Pravega odgovora na to vprašanje nismo dobili do začetka 20. stoletja. Prvi primer enostavnega loka s pozitivno ploščino je podal W. F. Osgood leta 1903. Deset let kasneje, leta 1913, je enostaven lok s pozitivno ploščino z verigami trikotnikov, katerih premeri konvergirajo k 0, skonstruiral W. Sierpiński in 1914. leta na podoben način še K. Knopp.

V pričujočem članku bomo predstavili primer enostavnega ravninskega loka s pozitivno ploščino, ki sta ga opisala K. Stromberg in S. Tseng v [3]. Ta konstrukcija bo vsebovala protiprimer za še eno „očitno resnico": Lebesgueova mera Cantorjeve množice je 0. Kot začetno stopnjo konstrukcije bomo namreč opisali Cantorjevo množico s pozitivno Lebesgueovo mero, kasneje pa celo Cantorjevo množico s pozitivno ploščino. Preden pa se lotimo naše konstrukcije, poudarimo, da je za nas lok v topološkem prostoru X zvezna preslikava f kakega zaprtega intervala $[a, b] \subset \mathbb{R}$ v prostor X. Njegovo zalogo vrednosti si v geometrijskem smislu predstavljamo kot krivuljo med točkama $f(a)$ in $f(b)$. Lok f imenujemo enostaven, če je f injektivna preslikava.

2. Simetrične Cantorjeve množice P

V tem poglavju bomo pokazali, da za vsako realno število $\beta \in [0,1)$ obstaja simetrična Cantorjeva množica P z lastnostjo $\lambda(P) = \beta$, kjer je λ Lebesgueova mera na $\mathbb{R}$. Na podlagi tega bomo v drugem delu članka pokazali, da za poljubno realno število $\alpha \in [0,1)$ obstajata simetrična Cantorjeva množica P in enostaven lok $g : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, ki v svoji zalogi vrednosti vsebuje produkt $P \times P$ in za katerega velja $\lambda^2(g([0,1])) = \lambda^2(P \times P) = \alpha$, pri čemer je λ^2 Lebesgueova mera na $\mathbb{R}^2$.

Začeli bomo s konstrukcijo simetrične Cantorjeve množice P. Zakaj bomo množico P imenovali Cantorjeva, bomo utemeljili kasneje, ko bomo pokazali, da je P homeomorfna standardni Cantorjevi množici C, ki bo hkrati poseben primer naše konstrukcije. Pri tem bomo tako za P kot za standardno Cantorjevo množico C pokazali, da sta homeomorfni množici vseh neskončnih zaporedij ničel in enic D s produktno topologijo.

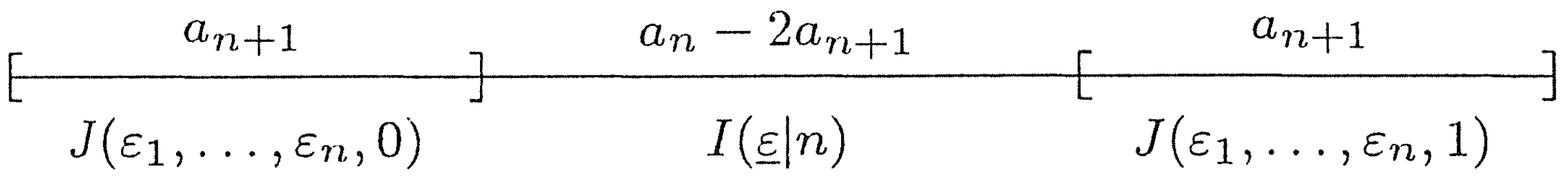
Opis konstrukcije je nekoliko zahtevnejši, vendar je le-ta dokaj naravna posplošitev standardne Cantorjeve konstrukcije. Potrebujemo tako zaporedje realnih števil, da je $a_0 = 1$ in $0 < 2a_n < a_{n-1}$ za vsako naravno število n. Bralcu, ki pozna standardno Cantorjevo množico, priporočamo, da vse korake izpelje z zaporedjem $a_n = \frac{1}{3^n}$, ki zadošča navedenim pogojem, ter preveri, da bo tako dobljena množica P standardna Cantorjeva množica.

Naj bo torej $\underline{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ tako zaporedje realnih števil, da velja $a_0 = 1$ in $0 < 2a_n < a_{n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $D = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ množica vseh neskončnih zaporedij ničel in enic, medtem ko posamezno tako zaporedje označimo z $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$. Za $n > 0$ definirajmo končno zaporedje $\underline{\varepsilon}|n$ ničel in enic kot $\underline{\varepsilon}|n = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$; za $n = 0$ naj bo $\underline{\varepsilon}|0 = \emptyset$. Podintervale intervala $[0,1]$ določimo takole: Naj bo $J(\underline{\varepsilon}|0) = J(\emptyset) = [0,1]$, $J(0) = [0, a_1]$, $J(1) = [1 - a_1, 1]$. Nadaljujemo tako, da je za vsako naravno število n interval $J(\underline{\varepsilon}|n+1)$ tak zaprt interval dolžine a_{n+1}, da imata intervala $J(\underline{\varepsilon}|n+1)$ in $J(\underline{\varepsilon}|n)$ skupno levo krajišče, če je $\varepsilon_{n+1} = 0$, in skupno desno krajišče, če je $\varepsilon_{n+1} = 1$. Za vsako naravno število n je tako $\{J(\underline{\varepsilon}|n)\}_{\underline{\varepsilon} \in D}$ množica 2^n paroma disjunktnih zaprtih intervalov dolžine a_n.

Naj bo $I(\underline{\varepsilon}|n)$ interval, ki ga dobimo, ko intervalu $J(\underline{\varepsilon}|n)$ odvzamemo intervala $J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0)$ in $J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1)$. Za $n = 0$ velja $I(\underline{\varepsilon}|0) = J(\emptyset) \setminus (J(0) \cup J(1)) = [0,1] \setminus ([0, a_1] \cup [1 - a_1, 1]) = (a_1, 1 - a_1)$. Potemtakem je $I(\underline{\varepsilon}|n)$ za vsak $n \geq 0$ odprt interval dolžine $a_n - 2a_{n+1} > 0$. Njegovo središče je hkrati središče intervala $J(\underline{\varepsilon}|n)$.

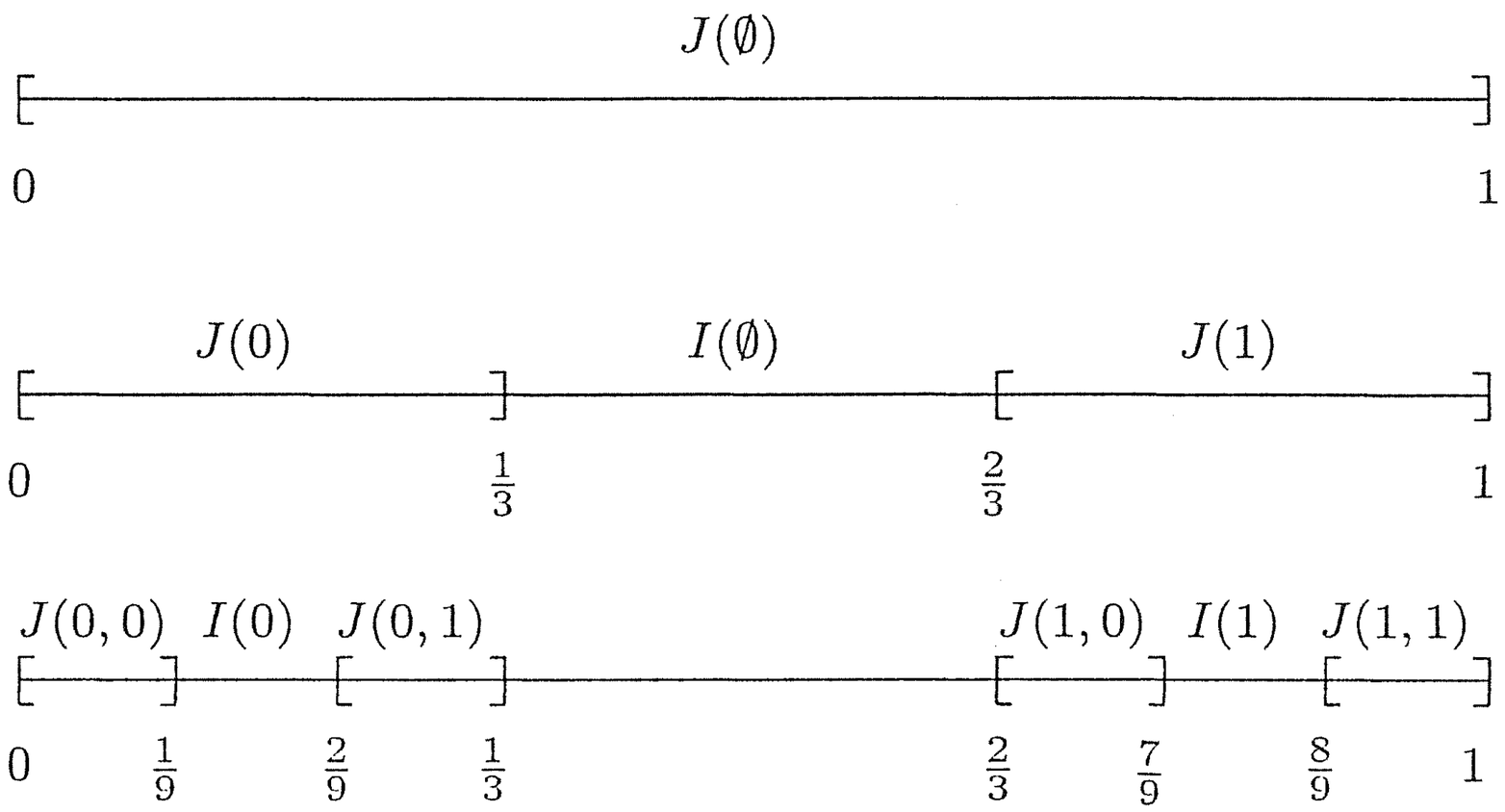
Nadalje naj bo $P_n = \bigcup_{\underline{\varepsilon} \in D} J(\underline{\varepsilon}|n)$. Ker je $J(\underline{\varepsilon}|n+1) \subseteq J(\underline{\varepsilon}|n)$, je tudi $P_{n+1} \subseteq P_n$. Končno definirajmo množico P kot

$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n.$$



Slika 1. Interval $J(\underline{\varepsilon}|n)$, razdeljen na tri podintervale.

S tem smo z zaporedjem $\underline{a}$ skonstruirali simetrično Cantorjevo množico P. Zanima nas njena Lebesgueova mera, zato da bomo lahko na podlagi tega izračunali ploščino produkta $P \times P$ in skonstruirali lok, ki bo v svoji zalogi vrednosti vseboval ta produkt — lok s pozitivno ploščino. Ploščina produkta $P \times P$ pa bo seveda pozitivna, če bo pozitivna mera množice P. V naslednji trditvi bomo izračunali Lebesgueovo mero množice P. Še več, pokazali bomo, da lahko za poljubno realno število $0 \leq \beta < 1$ najdemo tako zaporedje $\underline{a}$, da ima P, ki ga dobimo s tem zaporedjem, mero β. Preden pa to trditev zapišemo, poglejmo primera, ki nam ilustrirata nekaj začetnih korakov konstrukcije množice P.



Slika 2. Intervali $J(\underline{\varepsilon}|n)$, ko je $n = 0, 1, 2$ in $I(\underline{\varepsilon}|n)$, ko je $n = 0, 1$, za vsako naskončno zaporedje ničel in enic $\underline{\varepsilon}$. Zaporedje $\underline{a}$ je definirano z $a_n = \frac{1}{3^n}$.

Če opisani postopek izpeljemo z zaporedjem $a_n = \frac{1}{3^n}$, opazimo, da je množica P pravzaprav standardna Cantorjeva množica C z Lebesgueovo mero 0 (slika 2). O dobljeni množici P in njeni meri, kadar je $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}(1 + \frac{1}{2^n})$ (slika 3), pa za zdaj ne znamo kaj dosti povedati. Bralec lahko opazi le razliko v strukturi intervalov. V drugem primeru so daljši, videli bomo, da toliko, da je Lebesgueova mera množice P pozitivna. Trditev 2.1 nam bo povedala, da ima P, ki jo dobimo v drugem primeru, mero $\frac{1}{2}$.

Trditev 2.1. *Naj bo λ Lebesgueova mera na $\mathbb{R}$ in naj bosta P in $\underline{a}$ definirana na že opisan način. Velja:*

Slika 3. Začetni koraki konstrukcije množice P na istih intervali $J(\underline{\varepsilon}|n)$ in $I(\underline{\varepsilon}|n)$ kot na prejšnji sliki, le da z zaporedjem $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}(1 + \frac{1}{2^n})$.

(i) $\lambda(P) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot a_n$.

(ii) *Če je* $0 \leq \beta < 1$, *potem lahko izberemo* $\underline{a}$ *tako, da za* z *zaporedjem* $\underline{a}$ *dobljen* P *velja* $\lambda(P) = \beta$.

Dokaz. (i) P_n je disjunktna unija 2^n zaprtih intervalov dolžine a_n, zato je $\lambda(P_n) = 2^n \cdot a_n$. Ker je P presek padajočega zaporedja $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ in je $\lambda(P_0) = 1 < \infty$, je $\lambda(P) = \lim_{n\to\infty} \lambda(P_n) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot a_n$ po trditvi [1, Prop. 1.2.3.].

(ii) Naj bo β tako realno število, da je $0 \leq \beta < 1$. Izberimo tako padajoče zaporedje realnih števil $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, da je $u_0 = 1 - \beta$ in $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; naj bo na primer $u_n = (1 - \beta)c^n$, kjer je $0 < c < 1$. Nadalje definirajmo splošni člen zaporedja $\underline{a}$ kot $a_n = 2^{-n}(\beta + u_n)$. Potem je $a_0 = 2^0(\beta + 1 - \beta) = 1$, za $2a_{n+1} = 2^{-n}(\beta + u_{n+1})$ in $a_n = 2^{-n}(\beta + u_n)$ pa velja neenakost $0 < 2a_{n+1} < a_n$. Uporabimo točko (i) in dobimo enakost $\lambda(P) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot 2^{-n}(\beta + u_n) = \beta$. ■

Opomba. Zaporedje $\underline{a}$ iz našega drugega primera (slika 3) smo izbrali tako, kot je omenjeno v tem dokazu. Ob izbiri $\beta = c = \frac{1}{2}$ namreč dobimo $u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ in zato $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}(1 + \frac{1}{2^n})$. Lebesgueova mera množice P je tedaj res $\frac{1}{2}$.

Nekaj rezultatov, potrebnih za konstrukcijo enostavnega ravninskega loka s pozitivno ploščino, bomo navedli brez dokazov ali pa bomo opisali le idejo. Tako naj se bralec sam prepriča, da za komplement množice P velja: $[0,1] \setminus P = \bigcup\{I(\underline{\varepsilon}|m); \underline{\varepsilon} \in D, m \geq 0\}$.

Pokazati želimo tudi, da je na opisani način konstruirana množica P homeomorfna standardni Cantorjevi množici C, s čimer bomo utemeljili

našo izbiro njenega imena. To bomo storili tako, da bomo množico D vseh neskončnih zaporedij ničel in enic opremili z ustrezno topologijo, nato pa med prostoroma P in D skonstruirali homeomorfizem. Ker je standardna Cantorjeva množica C le poseben primer množice P, ima to za posledico, da je P homeomorfna C. Opišimo torej funkcijo $\varphi : D \to P$, za katero bomo dokazali, da je homeomorfizem.

Množico P želimo najprej opisati kot $\varphi(D)$ za neko bijekcijo $\varphi : D \to P$. Zato za vsak $j \geq 1$ definirajmo $r_j = a_{j-1} - a_j$. Ugotovimo lahko, da za $n \geq 0$ velja $\sum_{j=n+1}^{\infty} r_j = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=n+1}^{m} (a_{j-1} - a_j) = \lim_{m\to\infty}(a_n - a_m) = a_n$.

Nadalje definirajmo zaporedje funkcij $\varphi_n : D \to \mathbb{R}$ in funkcijo $\varphi : D \to \mathbb{R}$ z naslednjimi predpisi:

$$\varphi_n(\underline{\varepsilon}) = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \, r_j; & n \geq 1, \end{cases}$$

$$\varphi(\underline{\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \, r_j.$$

Funkcija φ je očitno dobro definirana. Da D bijektivno preslika na P, ne bo težko pokazati, če vemo, da za vsako neskončno zaporedje ničel in enic $\underline{\varepsilon}$ ter vsak $n \geq 0$ velja:

(i) $J(\underline{\varepsilon}|n) = [\varphi_n(\underline{\varepsilon}), \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + a_n]$,

(ii) $I(\underline{\varepsilon}|n) = (\varphi_n(\underline{\varepsilon}) + a_{n+1}, \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + r_{n+1})$.

Točko (i) zlahka dokažemo z matematično indukcijo, točko (ii) s sklicem na točko (i).

Izrek 2.2. *Funkcija $\varphi : D \to P$, določena s predpisom $\varphi(\underline{\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \, r_j$, je bijekcija.*

Dokaz. Napravimo ta dokaz podrobno, za vzorec, da vidimo kakšnega tipa so dokazi. Za vsak $\underline{\varepsilon} \in D$ in $n \geq 0$ velja $\varphi_n(\underline{\varepsilon}) \leq \varphi(\underline{\varepsilon}) = \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon_j \, r_j \leq \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + \sum_{j=n+1}^{\infty} r_j = \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + a_n$. Ker velja $J(\underline{\varepsilon}|n) = [\varphi_n(\underline{\varepsilon}), \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + a_n]$, je $\varphi(\underline{\varepsilon}) \in J(\underline{\varepsilon}|n) \subseteq P_n$ za vsak $n \geq 0$ in posledično $\varphi(\underline{\varepsilon}) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n = P$, $\underline{\varepsilon} \in D$.

Pokažimo, da je φ injektivna preslikava. Naj bosta $\underline{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ in $\underline{\beta} = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ poljubna različna elementa množice D in naj bo $n = \min\{j \in \mathbb{N}; \alpha_j \neq \beta_j\}$; recimo, da je $\alpha_n = 0$ in $\beta_n = 1$. Potem je $\varphi(\underline{\beta}) - \varphi(\underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, r_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \, r_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, r_j - \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \, r_j =$
$= r_n + \sum_{j=n+1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) \, r_j \geq r_n - \sum_{j=n+1}^{\infty} r_j = r_n - a_n = a_{n-1} - 2a_n > 0$.
Dobimo, da je $\varphi(\underline{\beta}) > \varphi(\underline{\alpha})$ in zato φ je injekcija.

Dokažimo še surjektivnost. Naj bo dan $x \in P$. Ker je $x \in P_1 = J(0) \cup J(1)$, lahko izberemo tak $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}$, da je $x \in J(\varepsilon_1)$. Predpostavimo sedaj, da smo za $n \geq 1$ izbrali $(\varepsilon_j)_{j=1}^{n} \in \{0, 1\}^n$ tako, da je

$x \in J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Ker je $x \in P_{n+1} \cap J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0) \cup J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1)$, lahko izberemo tudi tak $\varepsilon_{n+1} \in \{0, 1\}$, da je $x \in J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$. Na ta način lahko induktivno definiramo tak $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} \in D$, da je $x \in J(\underline{\varepsilon}|n)$ za vsak $n \geq 0$. Ker za vsak $n \geq 0$ velja $J(\underline{\varepsilon}|n) = [\varphi_n(\underline{\varepsilon}), \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + a_n]$, je $\varphi_n(\underline{\varepsilon}) \leq x \leq \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + a_n$ za vsak $n \geq 0$ in zato $x = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\underline{\varepsilon}) = \varphi(\underline{\varepsilon})$. ■

V naslednjem koraku množico $D = \prod_{j=1}^{\infty} D_j$ opremimo s produktno topologijo, kjer je vsak D_j opremljen z diskretno topologijo. Po izreku Tihonova [2, str. 232] je D s produktno topologijo kompaktna množica.

Izrek 2.3. *Funkcija $\varphi : D \to P$, določena s predpisom $\varphi(\underline{\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j r_j$, je homeomorfizem.*

Dokaz. V predhodnem izreku smo pokazali, da je φ bijekcija. Dokažimo še, da je zvezna v poljubnem $\underline{\alpha} \in D$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Izberimo tak $n \in \mathbb{N}$, da je $2^{-n} < \varepsilon$. Baza produktne topologije [2, str. 114] za $\prod_{j=1}^{\infty} D_j$ je $\mathcal{B} = \{\{x_1\} \times \ldots \times \{x_m\} \times D_{m+1} \times D_{m+2} \times \ldots;\ m \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, \ldots, m\},\ x_i \in \{0, 1\}\}$. Naj bo $U = \{\alpha_1\} \times \ldots \times \{\alpha_n\} \times D_{n+1} \times D_{n+2} \times \ldots$ okolica točke $\underline{\alpha} \in D$. Če je tudi zaporedje $\underline{\beta} \in U$, je $\alpha_j = \beta_j$ za $1 \leq j \leq n$ in dobimo $|\varphi(\underline{\alpha}) - \varphi(\underline{\beta})| = |\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j r_j - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j r_j| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j - \beta_j| r_j \leq$ $\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} r_j = a_n \leq 2^{-n} < \varepsilon$. Pri tem smo uporabili dejstvo, da za vsak $j \geq 2$ velja $a_{j-1} < \frac{a_{j-2}}{2} < \ldots < \frac{a_0}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{j-1}}$, zaradi česar je $2^{1-j} \geq a_{j-1} > 0$ za vsak $j \geq 1$. Funkcija φ je zvezna bijekcija, in ker je D kompaktna množica ter P Hausdorffov prostor, je φ homeomorfizem [2, str. 167]. ■

V naslednjem poglavju bomo definirali homeomorfizem med množico P in produktom $P \times P$ (zato bo seveda tudi $P \times P$ homeomorfen standardni Cantorjevi množici C). To bo pomemben rezultat, saj bomo ta homeomorfizem razširili do iskanega loka — enostavnega loka s pozitivno ploščino. V svoji zalogi vrednosti bo namreč vseboval produkt $P \times P$. Ker pa že vemo, da ima lahko P poljubno mero manjšo od 1, bo lahko imel $P \times P$ poljubno ploščino — tudi pozitivno, seveda pa manjšo od 1.

3. Enostavni loki, ki v svoji zalogi vrednosti vsebujejo produkt $P \times P$

Pokažimo sedaj, da sta tudi P in $P \times P$ homeomorfna prostora. Najprej iz zaporedja $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots) = (\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} \in D$ poberimo vse lihe člene in definirajmo novo zaporedje ničel in enic

$$\underline{\varepsilon}^l = (\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \ldots) = (\varepsilon_{2n-1})_{n=1}^{\infty}.$$

Nato vzemimo vse sode člene in definirajmo

$$\underline{\varepsilon}^s = (\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6, \ldots) = (\varepsilon_{2n})_{n=1}^{\infty}.$$

Potemtakem za vsako naravno število j velja $\varepsilon_j^l = \varepsilon_{2j-1}$ in $\varepsilon_j^s = \varepsilon_{2j}$.

Zlahka preverimo, da je funkcija h iz D na $D \times D$, definirana s predpisom $h(\underline{\varepsilon}) = (\underline{\varepsilon}^l, \underline{\varepsilon}^s)$, homeomorfizem, zato ne bo težko dokazati izreka, ki nam zagotavlja homeomorfnost prostorov P in $P \times P$:

Izrek 3.4. *Za $t = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j r_j$, pri čemer je $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} \in D$, definirajmo $f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ z $f_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{2j-1} r_j$ in $f_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{2j} r_j$, kar lahko zapišemo tudi kot $f(\varphi(\underline{\varepsilon})) = (\varphi(\underline{\varepsilon}^l), \varphi(\underline{\varepsilon}^s))$. Tedaj je f homeomorfizem iz P na $P \times P$.*

Dokaz. Ker je $\varphi : D \to P$ homeomorfizem, je homeomorfizem tudi $\varphi \times \varphi : D \times D \to P \times P$. In ker je $f = (\varphi \times \varphi) \circ h \circ \varphi^{-1}$, je homeomorfizem tudi f. ■

Tako definirano funkcijo f bomo razširili na cel interval $[0, 1]$, s čimer bomo dobili iskan lok g s pozitivno ploščino. Geometrijski prikaz njegove zaloge vrednosti, torej krivulje med točkama $f(0)$ in $f(1)$, med drugim tudi zaradi pozitivnosti ploščine ne bo mogoč. Narisali jo bomo lahko le za daljše intervale $I(\underline{\varepsilon}|n)$ množice $[0, 1] \setminus P$. In če kar napovemo, znotraj intervalov $I(\underline{\varepsilon}|n)$ bomo g definirali kot linearno funkcijo, medtem ko lahko slike krajišč vsakega intervala $I(\underline{\varepsilon}|n)$ geometrijsko prikažemo takole:

Naj bo $\underline{\varepsilon}$ poljubno neskončno zaporedje ničel in enic, $n \geq 0$, interval $I(\underline{\varepsilon}|n)$ pa interval (s, t). Če je n lih, potem je $f(s)$ spodnje desno oglišče in $f(t)$ zgornje levo oglišče pravokotnika $J(\underline{\varepsilon}^l|k) \times I(\underline{\varepsilon}^s|k-1)$, kjer je $n = 2k - 1$. Če je n sod, potem je $f(s)$ zgornje levo oglišče in $f(t)$ spodnje desno oglišče pravokotnika $I(\underline{\varepsilon}^l|k) \times J(\underline{\varepsilon}^s|k)$, kjer je $n = 2k$.

Pokažimo, da navedena trditev v obeh primerih drži. Vemo že, da lahko krajišči intervala $I(\underline{\varepsilon}|n) = (s, t)$ zapišemo takole: $s = \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j r_j + \sum_{j=n+2}^{\infty} r_j$, $t = \varphi_n(\underline{\varepsilon}) + r_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j r_j + r_{n+1}$.

Predpostavimo, da je $n = 2k - 1$, kjer je $k \geq 1$. Potem je $f_1(s) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{2j-1} r_j + \sum_{j=k+1}^{\infty} r_j = \varphi_k(\underline{\varepsilon}^l) + a_k$, kar je desno krajišče intervala $J(\underline{\varepsilon}^l|k)$, $f_2(s) = \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_{2j} r_j + \sum_{j=k+1}^{\infty} r_j = \varphi_{k-1}(\underline{\varepsilon}^s) + a_k$, kar je levo krajišče intervala $I(\underline{\varepsilon}^s|k-1)$, $f_1(t) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{2j-1} r_j + 0 = \varphi_k(\underline{\varepsilon}^l)$, zato je $f_1(t)$ levo krajišče intervala $J(\underline{\varepsilon}^l|k)$ in $f_2(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_{2j} r_j + r_k = \varphi_{k-1}(\underline{\varepsilon}^s) + r_k = \varphi_{k-1}(\underline{\varepsilon}^s) + a_{k-1} - a_k$, kar je desno krajišče intervala $I(\underline{\varepsilon}^s|k-1)$. S tem je dokazana trditev v primeru, ko je n lih, podobno ravnamo v primeru, ko je n sod.

Na koncu tega članka je naveden konkreten primer, kjer prikažemo del slike loka g, hkrati pa nam ta primer ilustrira pravkar zapisano lastnost.

Sam po sebi zelo zanimiv je naslednji rezultat, ki nam bo končno zagotovil vse potrebno za dokaz obstoja enostavnega ravninskega loka $g : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$, saj nam bo zagotavljal njegovo zveznost.

Lema 3.5. *Naj bo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A \subset [a, b]$, pri čemer je A zaprta množica, ki vsebuje a in b. Funkcija $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ naj zadošča naslednjim trem pogojem:*

(i) $h|A$ *je zvezna;*

(ii) za vsak interval $I = (s, t) \subseteq [a, b] \setminus A$ *je* $h|\overline{I}$ *zvezna (kjer je* $\overline{I} = [s, t]$ *zaprtje* I*);*

(iii) za vsak interval $I = (s, t) \subseteq [a, b] \setminus A$ *velja:* $x \in I \Rightarrow \min\{h(s), h(t)\} \leq \leq h(x) \leq \max\{h(s), h(t)\}$.

Potem je h zvezna na $[a, b]$.

Poglejmo idejo dokaza. Ker sta $a, b \in A$ in je A zaprta podmnožica intervala $[a, b]$, je po točki (ii) h zvezna v vsaki točki $x \in [a, b] \setminus A$. Zadostuje dokazati, kar naj poskusi bralec sam, da je funkcija h zvezna z leve v vsaki točki $x \in A \setminus \{a\}$ in zvezna z desne v vsaki točki $x \in A \setminus \{b\}$.

Na primeru poglejmo, da pogoja (iii) ne smemo izpustiti. Naj bo $[a, b] = = [0, 1]$ in $A = P$. Definirajmo $h(x) = 0$ za vsak $x \in P$, na vsakem intervalu $\overline{I(\underline{\varepsilon}|n)}$ pa naj bo h definirana na kakršenkoli način, da bo le zvezna in da bo funkcijska vrednost v krajiščih tega intervala 0, funkcijska vrednost v središču pa 1. Potem h zadošča pogojema (i) in (ii), vendar je nezvezna v vsaki točki $x \in P$.

Iskani lok g s pozitivno ploščino bomo dobili s tem, da bomo homeomorfizem $f : P \to P \times P$ razširili na cel interval $[0, 1]$. Pri tem P izberimo tako (trditev 2.1 nam zagotavlja, da to lahko storimo), da bo $\lambda(P) = \beta = \sqrt{\alpha}$, kjer je α poljubno vnaprej podano število iz intervala $[0, 1)$. Kot smo že napovedali, funkcijo g na intervalih iz $[0, 1] \setminus P$ definirajmo kot linearno funkcijo. Bolj natančno to pomeni: dobili smo funkcijo $g : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$, ki je razširitev funkcije f in je definirana s predpisoma

$$g(x) = f(x), \ x \in P$$

ter

$$g(x) = \frac{t - x}{t - s} f(s) + \frac{x - s}{t - s} f(t), \ x \in [s, t] = \overline{I(\underline{\varepsilon}|n)}.$$

Za tako definirano funkcijo g velja, da je $g(I(\underline{\varepsilon}|2k - 1)) \subseteq J(\underline{\varepsilon}^l|k) \times I(\underline{\varepsilon}^s| |k - 1)$ za vse $k \geq 1$ in $\underline{\varepsilon} \in D$ ter $g(I(\underline{\varepsilon}|2k)) \subseteq \overline{I(\underline{\varepsilon}^l|k) \times J(\underline{\varepsilon}^s|k)}$ za vse $k \geq 0$ in $\underline{\varepsilon} \in D$. Prav tako je tudi res, da je $g|\overline{I(\underline{\varepsilon}|n)}$ zvezna in injektivna za vsak $n \geq 0$ in $\underline{\varepsilon} \in D$. Še več, pokažemo lahko, da je g injektivna in zvezna na $[0, 1]$.

Preverimo, da tako definirana funkcija g slika iz intervala $[0, 1]$ v enotski kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Funkcija f preslika krajišči intervala $I(\underline{\varepsilon}|n) \subseteq [0, 1] \setminus P$ v nasprotni oglišči pravokotnika, določenega z zaporedjem ničel in enic $\underline{\varepsilon}$ ter naravnim številom n. To je pravokotnik $J(\underline{\varepsilon}^l|k) \times I(\underline{\varepsilon}^s|k - 1)$, če je n lih, in

pravokotnik $I(\underline{\varepsilon}^l|k) \times J(\underline{\varepsilon}^s|k)$, če je n sod. V obeh primerih ta pravokotnik leži v kvadratu $[0,1] \times [0,1]$.

Da je g zvezna na intervalu $[0,1]$, ni težko dokazati, če se spomnimo zgoraj navedene leme o zveznosti funkcije na zaprtem intervalu. Zapišimo $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ za $0 \leq x \leq 1$. Za $[a,b]$ in A iz že omenjene leme vzemimo interval $[0,1]$ ter množico P. Potem sta g_1 in g_2 zvezni na intervalu $[0,1]$, torej je na tem intervalu zvezna tudi funkcija g.

Dokaz injektivnosti funkcije g prepuščamo bralcu.

Ključno, kar želimo še pokazati, je, da ima tako konstruiran lok g pozitivno ploščino. Poglejmo zadnji izrek:

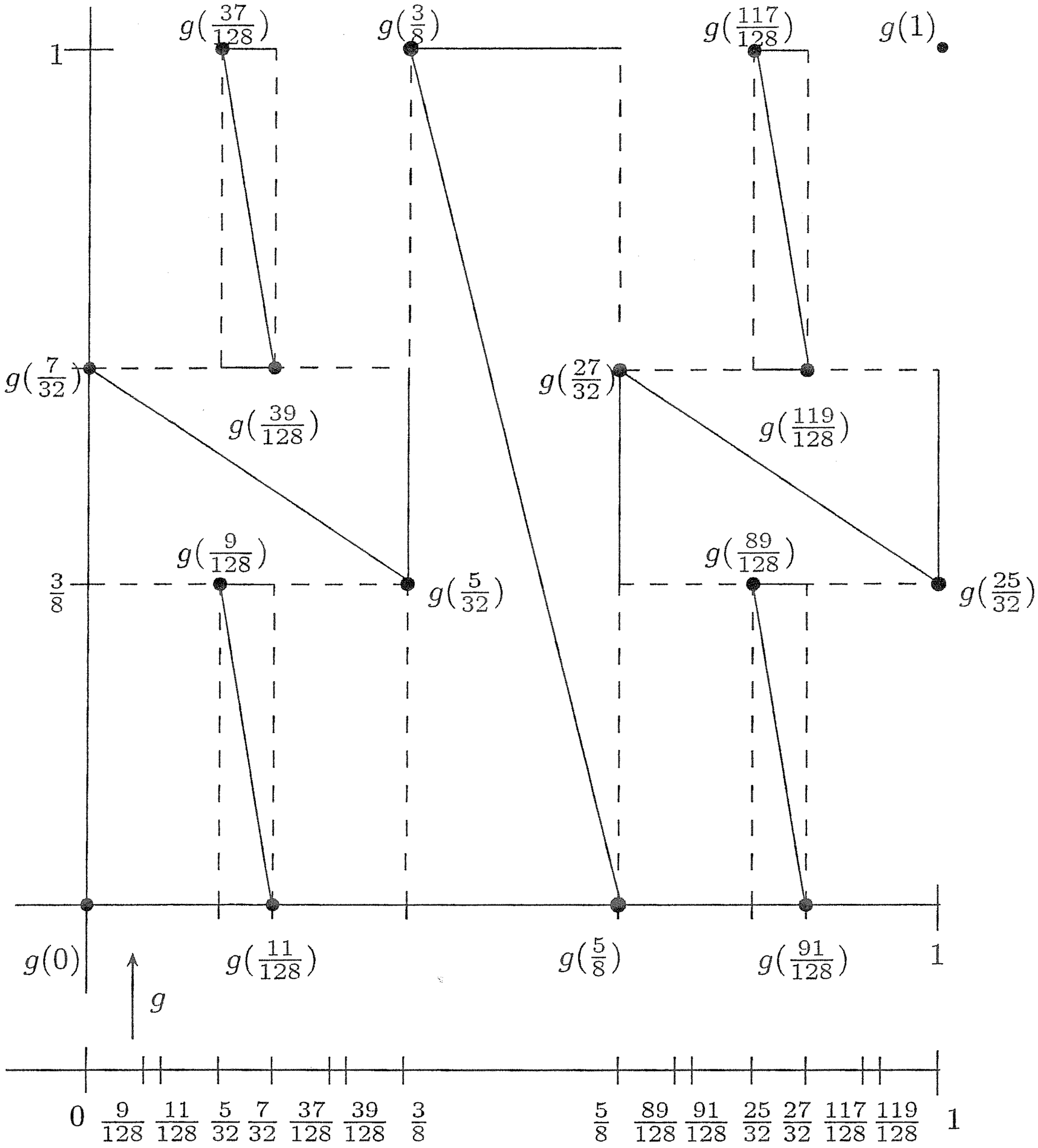
Izrek 3.6. *Naj bo $0 \leq \alpha < 1$. Potem obstajata taka simetrična Cantorjeva množica $P \subseteq [0,1]$ in tak enostaven lok $g : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, da je $g(0) = (0,0), g(1) = (1,1)$ ter da za zalogo vrednosti $C = g([0,1])$ loka g velja $P \times P \subseteq C$ in $\lambda^2(C) = \lambda^2(P \times P) = \alpha$, pri čemer je λ^2 dvodimenzionalna Lebesgueova mera na $\mathbb{R}^2$.*

Dokaz. Vemo že, da obstaja taka Cantorjeva množica P, da je $\lambda(P) = \sqrt{\alpha}$, kjer je α poljubno izbrano število iz intervala $[0,1)$. Nadalje poznamo konstrukcijo enostavnega loka $g : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. Dokažimo, da nam ta lok g preslika levo in desno krajišče intervala $[0,1]$ v spodnje levo in zgornje desno oglišče enotskega kvadrata.

Ker za vsak $x \in P$ velja $g(x) = f(x)$, je $g(0) = f(0)$ in $g(1) = f(1)$, saj sta $0, 1 \in P$. Spomnimo se, da je $f(t) = (\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{2j-1}\, r_j, \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{2j}\, r_j)$ za $t = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j\, r_j$. Če je $t = 0$, bo tudi $\varepsilon_j = 0$ za vsak $j \in \mathbb{N}$, saj je r_j za vsak $j > 0$ pozitivno število. Dobimo $f(0) = (0,0)$. Naj bo sedaj $t = 1$. Ker je $\sum_{j=1}^{\infty} r_j = 1$, je $\varepsilon_j = 1$ za vsak $j \in \mathbb{N}$ in vsoti obeh vrst $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{2j-1}\, r_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{2j}\, r_j$ sta enaki 1. Zato je $f(1) = (1,1)$, torej $g(0) = (0,0)$ in $g(1) = (1,1)$.

Naj bo sedaj (y_1, y_2) poljubna točka iz $P \times P$. Po izreku 3.1 obstaja tak x, da je $f(x) = (y_1, y_2)$. Ker je $f(x) \in P \times P$, je $f(x) = g(x) \in C$ in zato $P \times P \subseteq C$.

Dokažimo še, da je $\lambda^2(C) = \alpha$. Z našo konstrukcijo enostavnega loka g smo zagotovili, da je $\lambda^2(g(I(\underline{\varepsilon}|n))) = 0$ za vsak $n \geq 0$ in $\underline{\varepsilon} \in D$. Ker je $C \setminus (P \times P) = g([0,1]) \setminus g(P) = g([0,1] \setminus P) = g(\bigcup\{I(\underline{\varepsilon}|n);\ \underline{\varepsilon} \in D,\ n \geq 0\}) = \bigcup_{\substack{\underline{\varepsilon} \in D \\ n \geq 0}} g(I(\underline{\varepsilon}|n))$ števna unija množic z mero nič, je $\lambda^2(C \setminus (P \times P)) = \lambda^2(\bigcup_{\substack{\underline{\varepsilon} \in D \\ n \geq 0}} g(I(\underline{\varepsilon}|n))) = 0$. Ker lahko zalogo vrednosti C zapišemo kot $C = (P \times P) \cup (C \setminus (P \times P))$ in je $\lambda^2(C \setminus (P \times P)) = 0$, velja $\lambda^2(C) = \lambda^2(P \times P) = \lambda(P) \cdot \lambda(P) = \alpha$. ■



Slika 4. Del enostavnega loka g – slike intervalov $[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$, $[\frac{5}{32}, \frac{7}{32}]$, $[\frac{25}{32}, \frac{27}{32}]$, $[\frac{9}{128}, \frac{11}{128}]$, $[\frac{37}{128}, \frac{39}{128}]$, $[\frac{89}{128}, \frac{91}{128}]$ in $[\frac{117}{128}, \frac{119}{128}]$.

Primer. Sliki 2 in 3 sta nam ilustrirali nekaj začetnih korakov konstrukcije množice P. Poglejmo primer enostavnega loka, če je zaporedje $\underline{a}$, kot na sliki 3, dano s splošnim členom $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}(1 + \frac{1}{2^n})$. Tedaj je $I(\underline{\varepsilon}|0) = I(\emptyset) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$. Ker je $n = 0$ sod, je $f(\frac{3}{8})$ po že omenjeni lastnosti zgornje levo oglišče in $f(\frac{5}{8})$ spodnje desno oglišče pravokotnika $I(\underline{\varepsilon}^l|0) \times J(\underline{\varepsilon}^s|0) = I(\emptyset) \times J(\emptyset) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}) \times [0,1]$. Za $n = 1$ poglejmo interval $I(0) = (\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$. V tem primeru je $f(\frac{5}{32})$ spodnje desno in $f(\frac{7}{32})$ zgornje levo oglišče pravokotnika $J(\underline{\varepsilon}^l|1) \times I(\underline{\varepsilon}^s|0) = J(1) \times I(\emptyset) = [0, \frac{3}{8}] \times (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$. Bralec naj sam ugotovi, kam se preslikajo krajišča intervalov $I(1) = (\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$, $I(0,0) = (\frac{9}{128}, \frac{11}{128})$, $I(0,1) = (\frac{37}{128}, \frac{39}{128})$, $I(1,0) = (\frac{89}{128}, \frac{91}{128})$ in $I(1,1) = (\frac{117}{128}, \frac{119}{128})$. In kako definirati lok v notra-

njosti navedenih intervalov? Funkcija g je na omenjenih intervalih linearna funkcija. Več korakov konstrukcije enostavnega loka g žal ne moremo prikazati, če želimo ohraniti preglednost. Nam pa že ta slika dobro ponazarja njeno nadaljevanje.

In zakaj bo imel tako konstruiran lok g pozitivno ploščino? Lebesgueova mera množice P, dobljene z zaporedjem $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}(1 + \frac{1}{2^n})$, je $\frac{1}{2}$. Zato je ploščina opisanega loka $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Slika bi bila zelo podobna, če množico P dobimo z zaporedjem $a_n = \frac{1}{3^n}$ kot na sliki 2, saj rišemo le linearni del zaloge vrednosti. Vendar v tem primeru ploščina loka ne bo pozitivna, pač pa 0.

Naj se na koncu zahvalim še prof. U. Milutinoviču za nasvete pri pisanju tega članka.

LITERATURA

[1] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1980.
[2] J. R. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1975.
[3] K. Stromberg in S. Tseng, *Simple plane arcs of positive area*, Expositiones Mathematicae **12** (1994), 31–52.

VESTI

IN MEMORIAM PROF. FRANCETU KRIŽANIČU

Letos januarja je nenadoma preminil dr. France Križanič, redni profesor matematike v pokoju. Rodil se je 3. 3. 1928 v Mariboru, v Ljubljani je študiral matematiko in fiziko in diplomiral 16. 10. 1951. Istega leta je postal asistent za matematiko na Prirodoslovno-matematični fakulteti. Bil je drugi asistent za matematiko na matematičnem oddelku sploh, prvi je bil tri leta v začetku dvajsetih let profesor Anton Vakselj. Doktorsko disertacijo pod vodstvom profesorja Ivana Vidava o posplošitvi osnovnega lema variacijskega računa je obranil 23. 12. 1955. Od aprila 1959 do januarja 1960 je bil na strokovnem izpopolnjevanju v Moskvi pri profesorju Geljfandu. Med tem je 11. 4. 1959 postal docent za matematiko. Za izrednega profesorja je bil izvoljen 26. 11. 1964, za rednega pa 1. 7. 1975. Upokojil se je 1. 10. 1996.

Profesor Križanič je veliko svojega časa in energije posvetil poučevanju matematike. Krajši čas je honorarno poučeval na srednjih šolah, več let je predaval matematične predmete na Fakulteti za agronomijo. Ob ustanovitvi tehnične smeri študija matematike, za katero ima velike zasluge, je predaval tudi računalniške predmete, programiranje in numerično matematiko. Študentom matematike in nekaj let tudi študentom fizike je predaval navadne in parcialne diferencialne enačbe. Več let je predaval analizo I in II študentom matematike, pozneje pa študentom fizike. Poleg teh osnovnih kurzov je predaval študentom matematike, fizike, elektrotehnike, sodelavcem Instituta J. Stefan in drugim specialna poglavja matematike na 2. in

3. stopnji. Nepopoln seznam kurzov vsebuje: topološke grupe, teorijo grup, Liejeve grupe, Liejeve algebre, analitične funkcije več kompleksnih spremenljivk, upodobitve grup, linearno algebro, osnove programiranja, zgodovino matematike, teorijo nelinearnih nihanj. Značilno za profesorja Križaniča je, da se ni izogibal uporabe matematike v fiziki, poznal je pomembnost te povezave za obe stroki.

Poleg predavanj na univerzi je v okviru DMFA rad prirejal predavanja za srednješolce, pogosto je sodeloval pri predavanjih za srednješolske in osnovnošolske učitelje matematike.

Še kot asistent je organiziral neformalne seminarje o nekaterih poglavjih matematike, ki so bila tedaj za skoraj vse slovenske matematike nova; večji del predavanj je opravil sam. Ker tedaj druge primerne literature iz funkcionalne analize ni bilo v naši knjižnici, je podal osnove funkcionalne analize po dveh romunskih skriptah. Za to področje matematike je med drugimi navdušil tudi mene. Vodil je seminar o linearnih diferencialnih operatorjih, o Banachovih algebrah, o reprezentaciji grup in gotovo še o čem. Žal se tem ne spominjam več. O teh njegovih pionirskih dejavnostih ni natančnejših podatkov. Med njegove pomembne zasluge sodi gotovo tudi ta, da je uvajal v slovenski prostor nova, moderna področja matematike.

Pedagoško delo profesorja Križaniča je poleg predavanj obsegalo tudi mentorstvo pri doktoratu, pri dveh magistrskih nalogah in pri okoli 40 diplomskih delih študentov matematike.

Bibliografija profesorja Križaniča je izredno bogata, saj je najplodovitejši slovenski pisec matematičnih knjig. Nepopolni seznam njegovih publikacij v sistemu COBISS navaja 79 postavk. Poleg znanstvenih, strokovnih in poljudnih člankov, ki jih je okoli 25, je napisal več kot 25 recenzij matematičnih monografij. Po njegovem prihodu iz Moskve sem videl, da je imel prof. Križanič pripravljena v rokopisu dva znanstvena članka, mislim, da iz reprezentacije grup, ki pa ju ni nikoli objavil. Med več kot desetimi univerzitetnimi učbeniki naj omenim Linearno algebro in analizo, Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun, Vektorsko in tenzorsko analizo. Posebno ugodno je odmevala knjiga Križem po matematiki, ki je bila napisana že okoli leta 1952, izšla pa je leta 1960, in ki je mnoge navdušila za matematiko ali celo za študij matematike.

Med matematičnimi knjigami zavzemajo posebno mesto njegovi učbeniki za srednjo šolo. Od leta 1963 do leta 1970 je spisal srednješolske učbenike za vse štiri razrede srednjih šol. Učbeniki so se lepo uveljavili. Profesor Ivan Vidav je rekel, „da so to v jugoslovanskem merilu prvi sodobni matematični učbeniki za srednje šole". Z njimi se je profesor Križanič uvrstil med glavne pisce srednješolskih učbenikov slovenskega rodu, kot so: vitez Franc Močnik, Franc Hočevar, Rihard Zupančič, če navedem le najpomembnejše. V času od leta 1980 do 1994 je izšla druga verzija štirih srednješolskih učbenikov, zelo moderna in strokovno zahtevna. V njih je večino snovi podal na povsem nov način. Taka je npr. izpeljava ravninske

in prostorske geometrije iz linearne algebre, ki jo je uvedel aksiomatično, in aksiomatična vpeljava realnih števil.

Kot pisec matematičnih tekstov z mnogih področij, o katerih v slovenščini ni pred njim še nihče pisal, je seveda naletel na problem uvajanja matematičnih izrazov v slovenščino. Tudi na tem področju je opravil ogromno delo. Tu je do polnega izraza prišlo njegovo jezikovno znanje in literarni talent.

S prihodom elektronskih računalnikov se je odprla možnost pisanja matematičnih tekstov v urejevalcu LaTeX. Profesor Križanič je postal že v zrelih letih zanj pravi ekspert in je mnoge svoje knjige napisal v LaTeX-u, vključno s slikami, v obliki za direktni natis!

Profesor Križanič je opravljal mnoge vodstvene funkcije na fakulteti in zunaj nje. Navedem naj le najpomembnejše: v letih 1977–79 je bil predstojnik Oddelka za matematiko in mehaniko, bil je član univerzitetnega sveta, sodeloval z Zavodom za šolstvo, od leta 1967 do leta 1969 je bil dekan Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, od leta 1972 do leta 1973 je bil predsednik DMFA. Tedaj je tudi organiziral znanstveno srečanje na Bledu ob 100-letnici rojstva profesorja Josipa Plemlja. Za delovanje v društvu in za publicistično delovanje je bil odlikovan z redom dela z zlatim vencem; dvakrat je prejel Levstikovo nagrado. Med drugim je bil urednik zbirk, ki jih izdaja DMFA, sodeloval v svetu za znanost, v upravnem odboru sklada Borisa Kidriča, v založniškem svetu Mladinske knjige in ČZP Dela. Danes bi rekli, da je nastopal v javnosti kot član civilne družbe. Ni se ustrašil kritizirati. Lep primer je tale: Ko je samoupravna oblast odvzela univerzi prav vso avtonomijo, kar je bil edinstven primer v Evropi, saj univerza ni smela voliti niti svojega rektorja, je bil prof. Križanič eden redkih, ki se je javno oglasil. V prispevku v Delu je zapisal znameniti stavek „Klečeča univerza je sramota zanjo in za tistega, pred katerim kleči."

Profesor Križanič je bil vse to, kar sem doslej zapisal, in še mnogo več. Njegova širina intelektualnih interesov in delovanja, področij študija je bila izredna. Čeprav sem ga kot njegov prvi asistent in udeleženec večine njegovih seminarjev v petdesetih in šestdesetih letih razmeroma dobro poznal, se zavedam, da nisem sposoben navesti vseh njegovih udejstvovanj. Znano je, da je v mladosti pisal poezijo in prozo, da je bil velik poznavalec in ljubitelj ruske kulture in literature, poznal je literaturo vzhodnih kultur. Poleg glavnih evropskih jezikov se je ukvarjal tudi z orientalskimi; vem za arabščino, za perzijski in turški jezik. Vem pa tudi, da mi je marsikatera njegova aktivnost neznana. Dandanes, v dobi hiperspecializacij, so ljudje širokega pogleda in vizije redki. Med učitelji matematikov mu je bil v nekaterih pogledih podoben le pokojni astronom profesor Fran Dominko. Praznina, ki je ostala za profesorjem Križaničem, bo zevala še dolgo. Morda kolegi nismo dovolj cenili tega, kar nam je profesor Križanič dajal.

Anton Suhadolc

SIMETRIJA – V TEORIJI GRAFOV IN NA SPLOŠNO

PRIMOŽ POTOČNIK

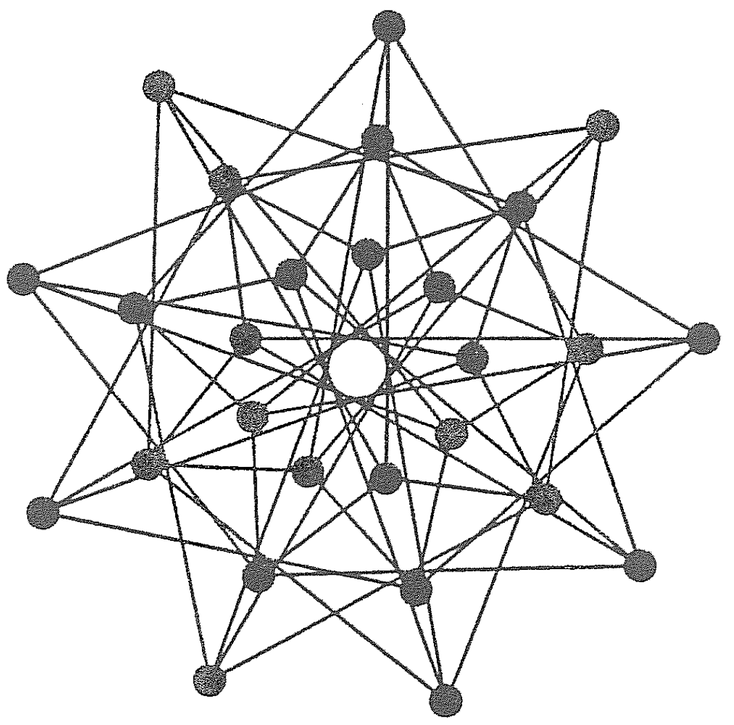
Math. Subj. Class. (2000) 05C25

Članek umesti matematično razumevanje simetrije v širši kontekst človekovega dojemanja sveta. Različne pojavne oblike simetrije ponazori z zgledi iz teorije grafov.

SYMMETRY – IN GRAPH THEORY AND IN GENERAL

Mathematical understanding of symmetry is placed in a more general setting of human perception of the Universe. Different forms of symmetry are illustrated with examples from graph theory.

Simetrija pomeni, preprosto povedano, ujemanje delov neke celote bodisi po obliki, velikosti, barvi ali kakšni drugi lastnosti. Nanjo naletimo na vseh področjih človekovega udejstvovanja, v filozofiji, umetnosti, tehniki in seveda znanosti. Ljudje jo dojemamo kot nekaj skladnega in lepega, če pa je simetrije preveč, pa tudi kot nekaj pustega, hladnega, neustvarjalnega. V literaturi se simetrija zrcali v skladnih pesniških oblikah ali zgradbi dramskih del. V arhitekturi in urbanizmu jo najdemo po eni strani zaradi zahteve po funkcionalnosti, po drugi strani pa kot estetski imperativ. Razne oblike simetrije se pojavljajo v različnih filozofijah in religijah ter skoraj vedno ponazarjajo harmonijo različnih vidikov stvarstva.



Slika 1. Tloris mesta Palmanove zgoraj kaže pretanjeno geometrijsko podobo s prevladujočo devetkotno simetrijo obrambnega oboda. Osupne nas podobnost s sliko Holtovega grafa – najmanjšega poltranzitivnega grafa.

Kako pomembno vlogo igra simetrija v sodobni fiziki, kažejo tako imenovana *simetrijska načela*: načelo o homogenosti časa, načelo o homogenosti prostora in načelo o izotropnosti prostora. Ta načela izražajo naše globoko prepričanje, da se vesolje vedno, povsod in v vseh smereh podreja istim fizikalnim zakonom. Med simetrijskimi načeli gre posebno mesto znamenitemu

načelu relativnosti, ki ga je prvi jasno izrazil Galileo Galilei, vse njegove posledice pa uvidel šele Albert Einstein. Pojem simetrije se je v moderni fiziki razširil daleč prek meja neposrednega izkustva in različni abstraktni vidiki simetrije igrajo v razvijanju novih fizikalnih teorij pomembno vlogo. Danes izide le malo člankov o osnovnih vprašanjih fizike, ki se ne sklicujejo na osnovne postulate simetrije in invariantnosti (bralec lahko več o simetrijskih načelih prebere v odličnem članku E. P. Wignerja *Symmetry and Conservation Laws* [7], ki je preveden izšel tudi v Obzorniku).

Simetrija v matematiki

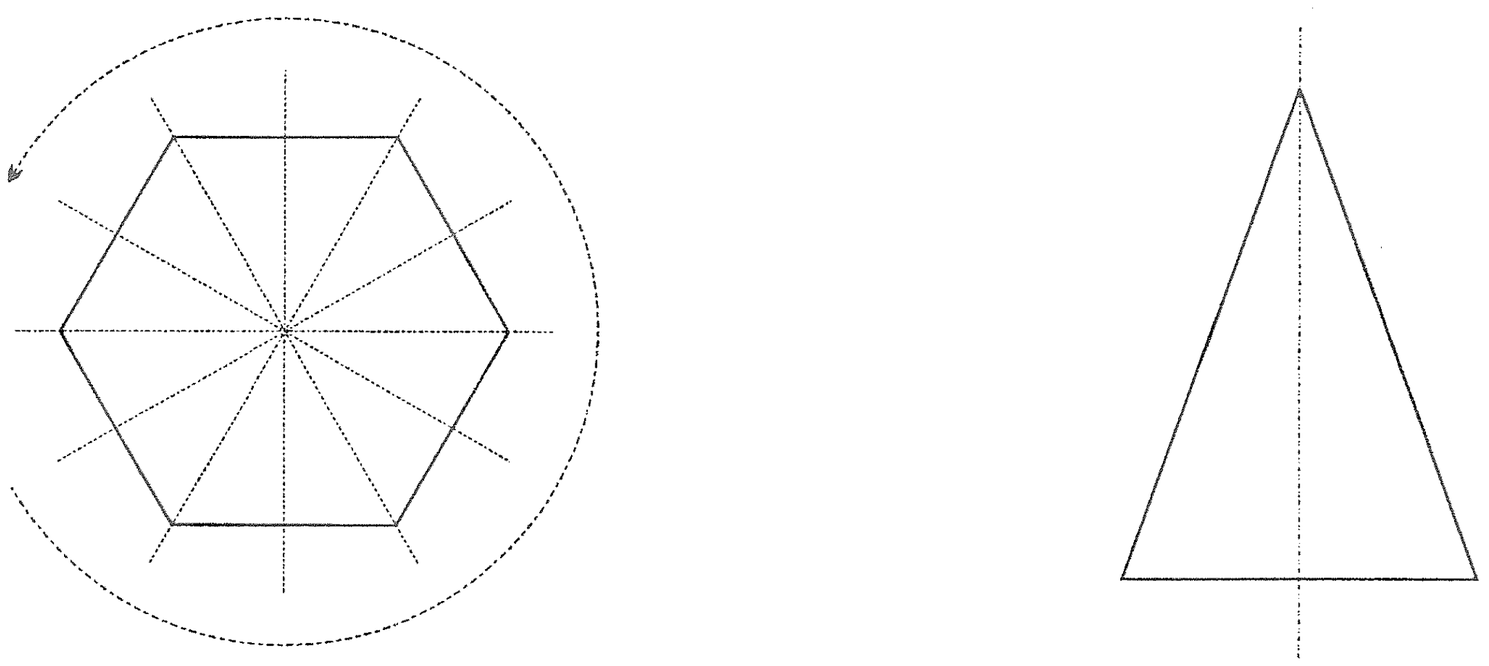
Če želimo z matematičnimi orodji raziskovati kakšen pojem, ga moramo najprej natančno in nedvoumno definirati. Ohlapna definicija simetrije za matematično obravnavo ni primerna. Kaj je torej *simetrija* v matematiki? Na to vprašanje najlažje odgovorimo, če najprej vpeljemo pojem *kategorije*.

Mislimo si, da imamo neko družino matematičnih objektov (denimo družino vektorskih prostorov, družino topoloških prostorov, družino grup ...). Za poljubna objekta X in Y te družine imejmo množico *morfizmov* $M_{X,Y}$ iz X v Y. Pri vektorskih prostorih navadno vzamemo množico vseh linearnih preslikav med dvema vektorskima prostoroma, pri topoloških prostorih zvezne preslikave, pri grupah pa homomorfizme. Za poljubne tri objekte X, Y in Z ter za poljubna morfizma f iz X v Y in g iz Y v Z naj obstaja enolično določen morfizem $g \circ f$ iz X v Z. Pri tem naj operacija $\circ$ za poljubne morfizme f, g, h, za katere je naslednja formula smiselna, zadošča asociacijskemu zakonu: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Vsak objekt X naj premore *identiteto* $\mathrm{id}_X \in M_{X,X}$, ki pri poljubnem morfizmu f iz X v neki Y in pri poljubnem morfizmu g iz nekega Z v X zadošča pogoju $\mathrm{id}_X \circ g = g$ in $f \circ \mathrm{id}_X = f$. Zgoraj opisani družini objektov skupaj s pripadajočimi morfizmi pravimo *kategorija*.

Če za morfizem $f \in M_{X,Y}$ obstaja takšen morfizem $g \in M_{Y,X}$, da velja $g \circ f = \mathrm{id}_X$ in $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, pravimo, da je morfizem f *izomorfizem* in morfizem g njegov *inverz*. Izomorfizmom iz X v X pravimo *avtomorfizmi objekta* X in družino vseh avtomorfizmov objekta X označimo z $\mathrm{Aut}\, X$. Ni težko videti, da množica $\mathrm{Aut}\, X$ z operacijo $\circ$ zadošča aksiomom grupe, zato grupi $\mathrm{Aut}\, X$ pravimo *grupa avtomorfizmov objekta* X ali tudi *grupa simetrij objekta* X. *Simetrija objekta* X za matematika torej ni nič drugega kot avtomorfizem objekta X. Večja je grupa simetrij, bolj je objekt X simetričen.

Povedano ponazorimo z zgledom. Definirajmo *kategorijo ravninskih likov*. Objekti te kategorije Liki naj bodo poljubne podmnožice evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$, morfizem iz lika A v lik B pa naj bo poljubna preslikava $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki lik A preslika v neko podmnožico lika B, dobimo pa jo lahko z zaporedno uporabo vrtenj in zrcaljenj ravnine. Grupa simetrij danega lika

je tedaj generirana s tistimi zrcaljenji in vrtenji ravnine, ki dani lik ohranjajo. Tako grupa simetrij pravilnega n-kotnika vsebuje natanko vsa zrcaljenja prek simetral njegovih kotov in stranic ter vsa vrtenja okoli njegovega središča za večkratnike kota $2\pi/n$. Grupa simetrij n-kotnikov, ki niso pravilni, je seveda manjša. Tako grupa simetrij enakokrakega trikotnika, ki ni enakostraničen, vsebuje poleg identitete le eno simetrijo, namreč zrcaljenje prek simetrale osnovnice.



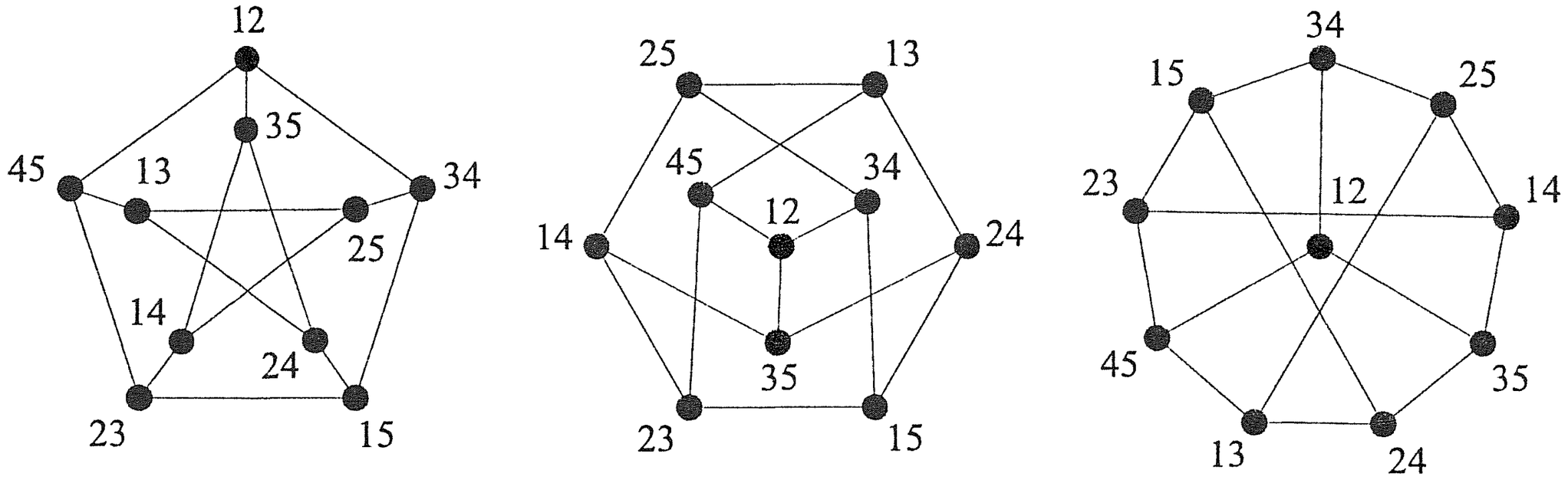
Slika 2. Simetrije pravilnega šestkotnika in enakokrakega trikotnika.

Kot smo videli, je simetrija v matematiki tesno povezana s pojmom grupe. Če želimo raziskovati simetrijo z matematičnimi orodji, moramo proučevati grupe. To lahko počnemo na dva načina. Lahko se lotimo študija abstraktne teorije grup, ločene od konkretnih objektov, katerih simetrijske lastnosti raziskujemo. V tem primeru raziskujemo pojem simetrije sam po sebi, neodvisen od svojih pojavnih oblik. Lahko pa si izberemo kategorijo objektov, po možnosti dovolj splošno in enostavno, ter odnos med lastnostmi objektov in njihovimi grupami simetrij proučujemo na konkretnem modelu. Na ta način raziskujemo, kako se abstraktni pojem simetrije udejanja na konkretnih zgledih. Seveda sta oba načina pomembna in se dopolnjujeta.

Simetrije grafov

Ena preprostejših matematičnih kategorij je kategorija grafov. Graf je določen s končno *množico točk* in podatkom, kateri pari točk so v grafu *sosednji*. Formalno povedano, graf je urejen par (V, E), kjer je V neka končna množica in E neka podmnožica množice $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Pri tem pravimo, da sta dve točki $u, v \in V$ v grafu (V, E) sosednji, brž ko je par $\{u, v\}$ element množice E. Morfizem iz grafa (V, E) v graf (W, F) je vsaka takšna preslikava iz množice V v množico W, ki poljubni točki, ki sta v grafu (V, E) sosednji, preslika v točki, ki sta sosednji v grafu (W, F). Kompozitum morfizmov v tej kategoriji je kar kompozitum preslikav, identiteta id_X objekta X pa je identična preslikava na množici točk grafa X. Grupa $\mathrm{Aut}\, X$ simetrij grafa $X = (V, E)$ vsebuje natanko tiste bijektivne preslikave na množici V, ki ohranjajo sosednost.

grafa predstavimo z majhnimi, enako velikimi krogi (krogi morajo biti tako majhni, da se nobena dva ne prekrivata), središča krogov, ki ustrezajo sosednjim točkam, pa povežemo z daljicami. Poskrbeti moramo še, da se nobena daljica ne seka s krogom, ki ni njeno krajišče. Tako vsakemu objektu iz kategorije grafov priredimo objekt iz kategorije ravninskih likov. Seveda lahko to storimo na več različnih načinov. Na naslednji sliki so prikazani trije načini, kako v ravnini ponazoriti Petersenov graf. Množica točk Petersenovega grafa vsebuje vse (neurejene) pare števil med 1 in 5. Dva para sta v Petersenovem grafu sosednja, če nimata skupnega elementa.



Slika 3. Tri ponazoritve Petersenovega grafa.

Kakšne simetrije premore Petersenov graf? Naj bo α poljubna permutacija množice $\{1, 2, \ldots, 5\}$. Delovanje permutacije α lahko naravno razširimo na množico točk Petersenovega grafa (s pravilom $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$). Pri tem permutacija α pare sosednjih točk slika v pare sosednjih točk. Na zgoraj opisani način smo vsaki permutaciji množice $\{1, 2, \ldots, 5\}$ priredili neko simetrijo Petersenovega grafa. Z nekaj več dela bi se lahko prepričali, da na takšen način dobimo vse simetrije Petersenovega grafa. Grupa simetrij Petersenovega grafa je torej izomorfna simetrični grupi S_5.

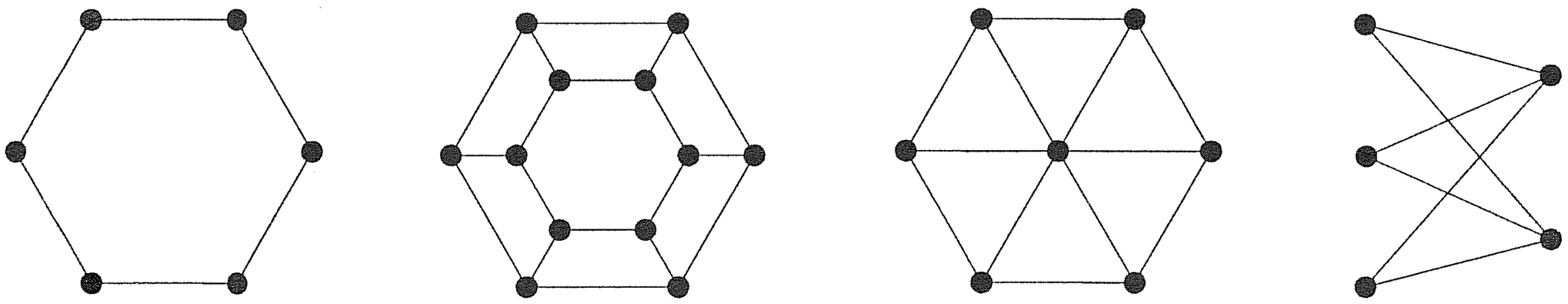
Vsak avtomorfizem lika, ki ga dobimo s ponazoritvijo grafa v ravnini, določa neki avtomorfizem grafa. Seveda pa ni vsak avtomorfizem grafa porojen z avtomorfizmom pripadajočega lika. Kateri avtomorfizmi grafa ustrezajo avtomorfizmom lika in kateri ne, je odvisno od načina, kako smo graf ponazorili v ravnini. Nekatere ponazoritve poudarijo neke simetrije grafa, druge pa spet druge simetrije grafa. Za zgled si oglejmo zgornje tri ponazoritve Petersenovega grafa. Prva ponazoritev premore petkotniško simetrijo. Pripadajoči lik lahko vrtimo za večkratnike kota $72°$ okoli središča ali pa ga zrcalimo prek ene od petih simetral stranic zunanjega petkotnika. Druga ponazoritev poudarja trikotniško simetrijo Petersenovega grafa. Lik namreč lahko vrtimo za večkratnik kota $120°$ okoli središča ali pa ga zrcalimo prek nosilk treh povezav iz središčne točke grafa. Zadnja ponazoritev Petersenovega grafa premore le eno netrivialno simetrijo, zrcaljenje prek navpičnice skozi središče lika.

Petersenov graf pa premore tudi simetrije, ki jih ne moremo predstaviti kot ustrezne simetrije lika v ravnini. Premislimo, da simetrija grafa, ki izvira iz permutacije $\sigma = (1, 3, 2, 5)$ in ki notranji 5-cikel (na prvi ponazoritvi Petersenovega grafa) zamenja z zunanjim 5-ciklom, ni porojena s simetrijo ustreznega lika, ne glede na to, kako Petersenov graf ponazorimo v ravnini. Opazimo najprej, da ima permutacija σ to lastnost, da njena štirikratna zaporedna uporaba vse točke ohranja, medtem ko dvakratna in trikratna zaporedna uporaba permutacije σ nekatere točke premakneta. V takšnih primerih pravimo, da je red permutacije enak 4. Ni težko premisliti, da bi morala imeti tudi simetrija ustreznega lika, ki bi ustrezala permutaciji σ, prav tako red 4. Znano pa je, da je vsaka takšna preslikava ravnine, ki jo dobimo z zaporednimi uporabami zrcaljenj in vrtenj, kar vrtenje okoli izbrane negibne točke za pravi kot (v pozitivno ali negativno smer). Moč množice točk, ki jih dobimo iz izbrane točke v ob zaporedni uporabi takšnega vrtenja, je bodisi 4 bodisi 1 (če je točka v ravno negibna točka vrtenja). Zato je moč vsake končne množice točk v ravnini, ki jo vrtenje za pravi kot ohranja, bodisi deljiva s 4 bodisi dá pri deljenju s 4 ostanek 1. Ker množica točk Petersenovega grafa šteje deset točk, lik, ki ga dobimo s ponazoritvijo Petersenovega grafa v ravnini, ne premore simetrije reda 4.

Če želimo raziskovati simetrijske lastnosti danega objekta, moramo opazovati, kako grupa simetrij deluje na množici njegovih *sestavnih delov*. Grupo simetrij moramo zato najprej predstaviti kot permutacijsko grupo na množici sestavnih delov objekta. Kaj pa so sestavni deli grafa? Možnih izbir je več. Že definicija grafa nam ponuja dva kandidata: množico točk in množico povezav. Kot bomo videli kasneje, pa lahko delovanje grupe simetrij opazujemo tudi na drugih, grafu lastnih sestavnih delih. Vsaka izbira množice, na kateri opazujemo delovanje grupe simetrij grafa, nam razkrije svoj vidik simetrij grafa.

Grupa simetrij grafa je že po definiciji množica permutacij točk grafa, predstavimo pa jo lahko tudi kot permutacijsko grupo na množici povezav. Namreč, za vsako simetrijo α in vsako povezavo $\{u, v\}$ grafa je tudi par $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$ povezava grafa. Zato lahko s predpisom $\alpha(\{u, v\}) = \{\alpha(u), \alpha(v)\}$ poljubno simetrijo grafa α predstavimo kot permutacijo povezav grafa. Če sta poljubni dve točki v grafu enakovredni (torej, če za poljubni dve točki obstaja avtomorfizem grafa, ki eno preslika v drugo), pravimo, da je graf *točkovno tranzitiven*. Podobno, če sta v grafu enakovredni poljubni dve povezavi (torej, če za poljubni dve povezavi obstaja avtomorfizem grafa, ki eno preslika v drugo, pravimo, da je graf *povezavno tranzitiven*.

Prvi graf na zgornji sliki je *cikel dolžine* 6 in je predstavljen kot pravilni šestkotnik. Z vrtenjem lika za večkratnike kota 60° lahko vsako točko preslikamo v vsako drugo točko in vsako povezavo v vsako drugo povezavo. Graf je zato tako točkovno kot povezavno tranzitiven.



Slika 4. Štirje grafi.

Drugi graf na sliki je *graf šeststrane prizme*. Sestavljata ga dva ločena cikla dolžine 6 skupaj s prečnimi povezavami med enako ležečimi točkami ciklov. Z vrtenjem grafa za večkratnike kota 60° lahko poljubno točko zunanjega cikla preslikamo v poljubno drugo točko zunanjega cikla in poljubno točko notranjega cikla v poljubno drugo točko notranjega cikla. Poleg tega pa graf premore tudi simetrijo, ki zamenja oba cikla dolžine 6, namreč tisto, ki med seboj zamenja enako ležeče točke obeh ciklov. Graf šeststrane prizme je torej točkovno tranzitiven, ni pa povezavno tranzitiven, saj nobene prečne povezave (ki povezuje notranji in zunanji cikel) ne moremo preslikati na povezavo zunanjega (ali notranjega) cikla. Vsaka prečna povezava namreč leži na dveh ciklih dolžine 4, medtem ko povezave zunanjega in notranjega cikla ležijo le na enem ciklu dolžine 4.

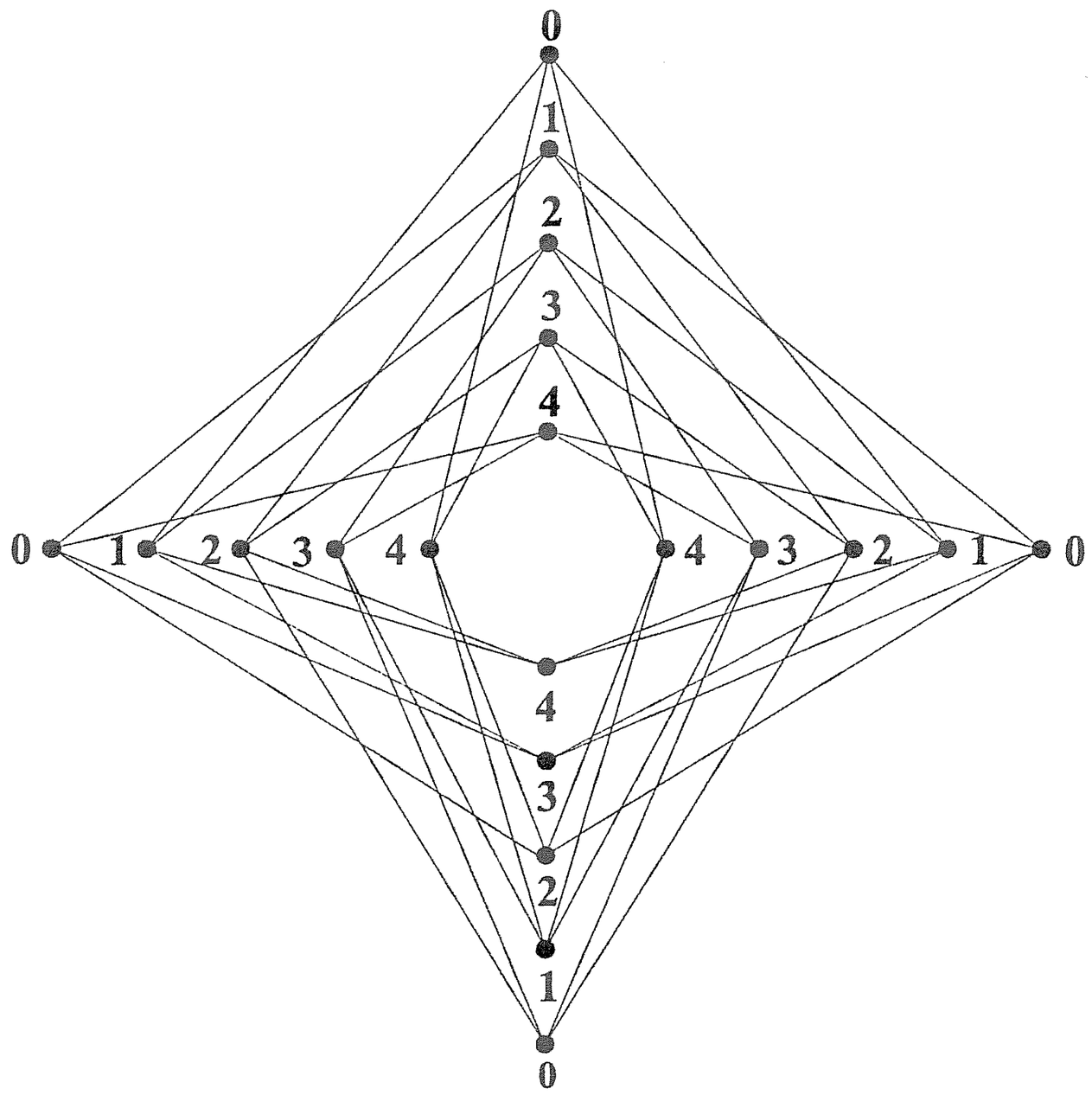
Tretji graf na sliki se imenuje *kolo dolžine* 6. Njegove simetrije so spet enake simetrijam lika, ki ga predstavlja, torej simetrijam pravilnega šestkotnika. Množica točk razpade na dve orbiti, ena vsebuje vse točke na obodu lika, druga pa središčno točko. Središčna točka je torej *odlikovana*. Graf ni točkovno tranzitiven in ni povezavno tranzitiven, saj povezava, ki ima odlikovano točko za svoje krajišče, ni *enakovredna* povezavi, ki odlikovane točke nima za svoje krajišče.

Četrti graf na sliki je *polni dvodelni graf* $K_{2,3}$. Sestavljata ga dve skupini točk, ena moči 2 in druga moči 3, kjer je množica sosed poljubne točke iz ene skupine natanko množica točk druge skupine. Ker je število sosed točke iz prve skupine različno od števila sosed točke iz druge skupine, točki iz različnih skupin nista enakovredni. Po drugi strani pa je vsaka permutacija točk, ki ohranja obe skupini, simetrija grafa $K_{2,3}$. Polni dvodelni graf $K_{2,3}$ premore torej $2! \cdot 3! = 12$ simetrij in je povezavno tranzitiven, ni pa točkovno tranzitiven.

Semisimetrični grafi

Opazili smo, da sta pojma točkovne tranzitivnosti in povezavne tranzitivnosti med seboj neodvisna, saj nastopijo vse štiri kombinacije teh dveh lastnosti. Malce nas preseneti le zadnji od štirih grafov, ki je povezavno in ne točkovno tranzitiven, vendar hitro ugotovimo, da je takšnih grafov veliko, denimo vsi polni dvodelni grafi $K_{m,n}$, kjer sta m in n različni naravni števili. Razlog za odsotnost točkovne tranzitivnosti pri teh grafih tiči

v dejstvu, da nimajo vse točke grafa enakih stopenj (*stopnja* točke je moč njene množice sosed). Precej težje pa je najti primer grafa, ki je povezavno tranzitiven, ni točkovno tranzitiven, vse njegove točke pa imajo enako stopnjo. Prvi je takšne grafe raziskoval sedaj že pokojni ameriški matematik J. Folkman leta 1967 [3]. Kasneje se je za grafe z zgornjo lastnostjo ustalilo malce ponesrečeno ime *semisimetrični grafi*. Najmanjši semisimetrični graf ima 20 točk in se svojemu odkritelju v čast imenuje *Folkmanov graf*.



Slika 5. Folkmanov graf.

Množica točk Folkmanovega grafa je sestavljena iz štirih kopij množice $\mathbb{Z}_5$ ostankov po deljenju s številom 5. Formalno to lahko zapišemo kot $V = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. V množico $\mathbb{Z}_n$ vpeljimo seštevanje in množenje na običajen način, po modulu n. Naj S označuje podmnožico $\{1, -1\}$ množice $\mathbb{Z}_5$ in a element 2 množice $\mathbb{Z}_5$. Tedaj lahko množico povezav Folkmanovega grafa zapišemo kot

$$\begin{aligned} E =& \{(x,0,0)(x+s,1,j) \mid x \in \mathbb{Z}_5, s \in S, j \in \mathbb{Z}_2\} \cup \\ =& \{(x,0,1)(x+as,1,j) \mid x \in \mathbb{Z}_5, s \in S, j \in \mathbb{Z}_2\}. \end{aligned}$$

Bralec se lahko sam prepriča, da so permutacije množice točk Folkmanovega grafa, ki slikajo v skladu s spodnjimi pravili, simetrije grafa:

$$\begin{aligned} (x,i,j) &\mapsto (x+1,i,j), & (x,i,j) &\mapsto (-x,i,j), \\ (x,i,j) &\mapsto (x,i,j+i), & (x,i,j) &\mapsto (ax,i,j+1). \end{aligned}$$

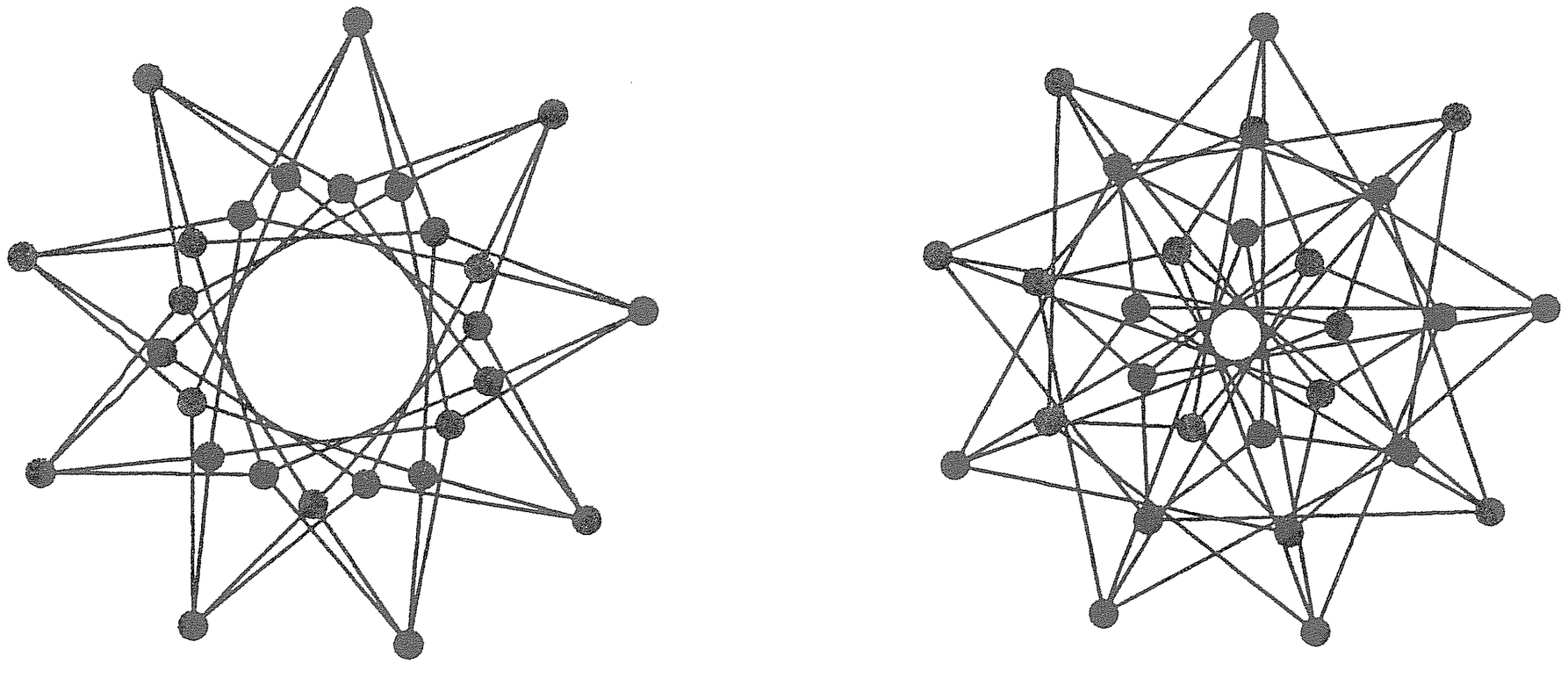
Grupa, ki jo generirajo zgornje permutacije, deluje tranzitivno na množici povezav Folkmanovega grafa in razbije množico točk na dve orbiti,

$U = \{(x, 0, j) \mid x \in \mathbb{Z}_5, j \in \mathbb{Z}_2\}$ ter $W = \{(x, 1, j) \mid x \in \mathbb{Z}_5, j \in \mathbb{Z}_2\}$. Seveda to še ni dokaz, da Folkmanov graf ni točkovno tranzitiven. Lahko bi namreč obstajala simetrija Folkmanovega grafa, ki je ne bi mogli dobiti z zaporedno uporabo zgoraj navedenih permutacij in bi združila množici U in W v eno samo orbito grupe simetrij Folkmanovega grafa. Da Folkmanov graf takšne simetrije ne premore, se lahko prepričamo, če opazimo, da za vsako točko $(x, 1, j)$ množice W obstaja neka druga točka (namreč točka $(x, 1, j + 1)$), ki ima enako množico sosed kot prva točka. Če bi bile točke iz W enakovredne točkam iz U, bi to veljalo tudi za vse točke iz U. Ni pa se težko prepričati, da se to ne zgodi. Množici U in W sta zato res orbiti grupe simetrij Folkmanovega grafa in Folkmanov graf je res semisimetričen.

Raziskovanje semisimetričnih grafov se je v zadnjih letih precej razmahnilo in znanih je že veliko neskončnih družin semisimetričnih grafov. Eno takšnih neskončnih družin dobimo, če v Folkmanovi konstrukciji namesto števila 5 vzamemo poljubno večje praštevilo p, namesto množice $S = \{1, -1\}$ poljubno netrivialno podgrupo grupe $\mathbb{Z}_p^*$ obrnljivih elementov kolobarja $\mathbb{Z}_p$, za katero je $(p-1)/|S|$ sodo število, in namesto števila $a = 2$ tisti element grupe $\mathbb{Z}_p^*$, za katerega velja $a \notin S$ ter $a^2 \in S$. (Bralcu, ki je vešč osnovam teorije grup in končnih obsegov, prepuščam dokaz, da pri poljubnem praštevilu $p \geq 5$ takšna podgrupa S in element a res obstajata.) Zanimivo je, da z zgornjo konstrukcijo pokrijemo vse semisimetrične grafe na $4p$ točkah, kjer je p praštevilo, z izjemo enega samega grafa na 20 točkah, ki je v resnici dvodelni komplement Folkmanovega grafa [5].

Ločno tranzitivni in poltranzitivni grafi

Poleg točk in povezav lahko v grafu opazujemo še druge *dele celote*. *Lok* grafa je urejeni par v grafu sosednjih točk. Vsaka povezava $\{u, v\}$ grafa tako določa dva *loka*, (u, v) in (v, u). Če je (u, v) lok in α simetrija nekega grafa, je tudi par $(\alpha(u), \alpha(v))$ lok tega grafa. S tem je podano naravno delovanje grupe simetrij grafa na množici njegovih lokov. Če pri tem delovanju vsi loki grafa ležijo v isti orbiti, pravimo, da je graf *ločno tranzitiven*. Ločna tranzitivnost ni neodvisna od povezavne in točkovne tranzitivnosti. Vsak ločno tranzitiven graf je seveda tudi povezavno tranzitiven in je tudi točkovno tranzitiven, brž ko graf ne vsebuje izoliranih točk (točk brez sosed). Obstajajo pa grafi, ki so točkovno in povezavno tranzitivni, niso pa ločno tranzitivni. Takšnim grafom pravimo *poltranzitivni grafi*. O obstoju poltranzitivnih grafov se je prvi spraševal Tutte leta 1966 [6], ki je dokazal, da so stopnje točk poltranzitivnega grafa (če kakšen sploh obstaja) sode. Prvi zgled poltranzitivnega grafa je našel nekaj let kasneje Bouwer [2]. Njegov graf je štel 54 točk. Najmanjši poltranzitivni graf, ki ima 27 točk, pa je leta 1981 odkril Holt [4]. Njegovo minimalnost v družini vseh poltranzitivnih grafov so leta 1994 dokazali Alspach, Marušič in Nowitz [1].



Slika 6. Dve ponazoritvi Holtovega grafa.

Tudi raziskovanje poltranzitivnih grafov je v zadnjih letih zelo intenzivno. Izkazalo se je, da je njihova struktura zelo bogata in omogoča iskanja novih odkritij v najrazličnejših smereh.

Za konec

Grafi so preprosti in naravni matematični objekti, ki so ravno zaradi svoje enostavnosti zelo priročni za modeliranje raznih pojavov in odnosov v naravi in človekovi družbi. Kljub preprostosti je njihova struktura dovolj bogata, da se na njih zrcalijo najrazličnejši vidiki simetrije. Skozi študij simetrijskih lastnosti grafov se nam simetrija, ki jo opažamo pri vsakdanjih pojavih, razkriva v večji jasnosti in ostrini. Čeprav lahko najdemo kar nekaj zgledov uporabe grafov in proučevanja njihovih simetrij v kemiji, informatiki ter drugih *uporabnih disciplinah*, leži njihova prava vrednost ravno v lepoti in bogastvu bolj ali manj simetričnih oblik in struktur, na katere naletimo pri njihovem raziskovanju. Na pričujoče delo je torej treba gledati kot na kamenček v mozaiku razumevanja enega najosnovnejših načel narave – simetrije.

LITERATURA

[1] B. Alspach, D. Marušič, L. Nowitz, *Constructing graphs which are $\frac{1}{2}$-transitive*, J. Austral. Math. Soc. A **56** (1994), 391–402.

[2] I. Z. Bouwer, *Vertex and edge-transitive but not 1-transitive graphs*, Canad. Math. Bull. **13** (1970), 231–237.

[3] J. Folkman, *Regular line-symmetric graphs*, J. Combin. Theory **3** (1967), 215–232.

[4] D. F. Holt, *A graph which is edge transitive but not arc transitive*, J. Graph Theory **5** (I) (1981), 201–204.

[5] D. Marušič, P. Potočnik, *Semisymmetry of Generalized Folkman Graphs*, Europ. J. Combin. **22** (2001), 333–349.

[6] W. T. Tutte, *"Connectivity in graphs"*, University of Toronto Press, Toronto, 1966.

[7] E. P. Wigner, *Symmetry and Conservation Laws*, Physics Today **34** (1964), str. 34; prevod v Obzornik mat. fiz. **12** (1965), 32–39.

DIGRESIJA ZVEZDE

MARIJAN PROSEN

PACS 95.10.JK

Pojasnjena je digresija zvezde in njena uporaba.

DIGRESSION OF A STAR

The term digression of a star and it's application is explained.

Digresija zvezde je navidezna oddaljenost zvezde od krajevnega nebesnega meridiana (poldnevnika) oziroma kot med višinskim krogom skozi zvezdo in meridianom. O digresiji govorimo le pri nadobzornicah, ki kulminirajo severno od zenita in nikoli ne sekajo ali se dotaknejo prvega vertikala, tj. nebesnega glavnega kroga, ki gre skozi vzhod, zenit in zahod.

Za dano opazovališče na severni zemeljski poluti, npr. pri nas, kjer je geografska širina $\phi > 45$, mora biti deklinacija teh zvezd večja od vrednosti geografske širine ($\delta > \phi$, tako da zvezde dosežejo pri svojem navideznem kroženju največji azimut (po absolutni vrednosti). To pomeni, da pridejo prvič v lego najbolj zahodno, drugič pa v lego najbolj vzhodno glede na krajevni nebesni meridian. Prvič je zvezda v največji zahodni digresiji, drugič v največji vzhodni (slika 1). Ob največjih digresijah je azimut konstanten, najbolj pa se spreminja višinski kot zvezde, ob največji vzhodni digresiji se veča, ob največji zahodni manjša [1], [2]. Opisano lastnost nadobzornic lahko uporabimo za natančno določitev meridianske ravnine, tj. smeri sever–jug, pri čemer naj bi bili zaradi čim manjših napak pri daljnogledskem opazovanju največji digresiji dovolj skupaj.

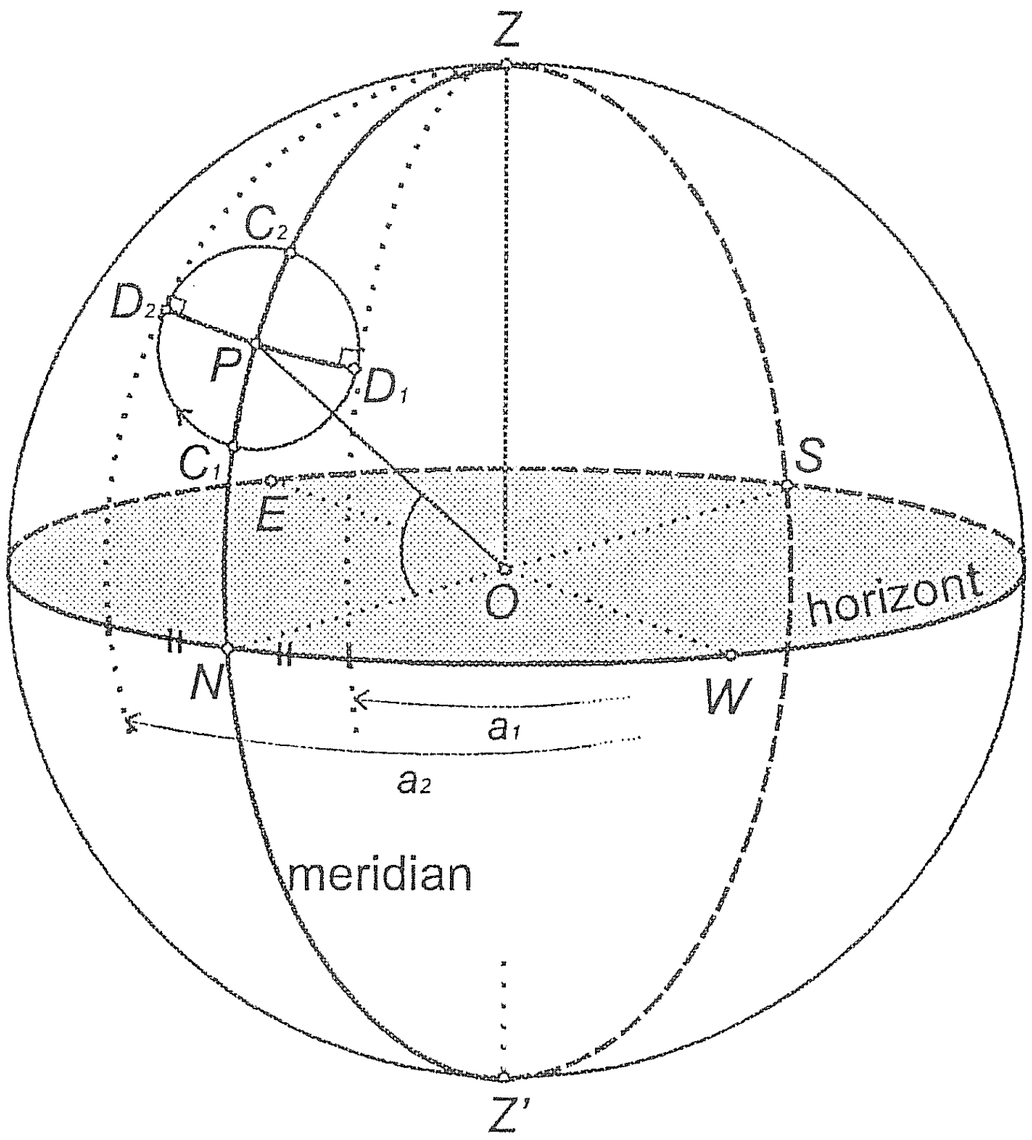
Največjo digresijo zvezde lahko izmerimo npr. z univerzalnim inštrumentom, tj. posebnim daljnogledom, ki ima vodoravni in navpični merilni krog. Zvezdo nekaj časa spremljamo z daljnogledom. Časovna sprememba azimuta zvezde se manjša, čim bolj se zvezda bliža svoji največji digresiji. Ko jo doseže, je njen azimut konstanten. V tem trenutku na vodoravnem merilnem krogu inštrumenta odberemo ustrezno vrednost azimuta. Ugotovimo: čim bliže je zvezda severnemu nebesnemu polu (čim večjo deklinacijo ima), tem dalj časa vztraja v svoji največji digresiji. Zato so takšne zvezde zelo primerne za določitev meridianske smeri, ki leži natanko na sredini med največjo vzhodno in največjo zahodno digresijo.

Če torej ob največjih digresijah izmerimo ustrezna azimuta zvezde a_1 (zahodni) in a_2 (vzhodni), je smer meridianske ravnine podana z vrednostjo $(a_1 + a_2)/2$. V bistvu gre za inštrumentalni azimut, ki se razlikuje od idealne smeri sever–jug, ker ima vsak inštrument vedno kakšno napako, vendar pa zaradi preprostosti razlage privzemimo, da merimo z idealnim inštrumentom.

Azimuta a_1 in a_2 nadobzornice ob največjih digresijah torej izmerimo, lahko pa ju tudi izračunamo ter meritve in teoretični izračun primerjamo

med seboj. Ob največji digresiji je sferni trikotnik PZD_1 pravokoten, hipotenuza $PZ = 90 - \phi$ in kateta $PD_1 = 90 - \delta$. Po kosinusnem izreku za sferno geometrijo sledi $\sin h = \sin\phi / \sin\delta$, od koder pri znani deklinaciji δ izračunamo višinski kot h zvezde ob največji digresiji; po sinusnem izreku sferne geometrije pa je $\sin a = \cos\delta / \cos\phi$, od koder pri znani δ izračunamo azimut a zvezde, pravzaprav dobimo dve glede na meridian simetrični vrednosti a_1 in a_2.

Za natančno določitev meridianske smeri z daljnogledom torej izbiramo zvezde, katerih azimuta sta ob največjih digresijah čim bolj skupaj. Tako je Severnica, ki kroži okrog severnega nebesnega pola po majčkenem krogu z navideznim radijem okoli $\frac{3}{4}$ kotne stopinje in jo imamo lahko še ves čas opazovanja v zornem polju daljnogleda, za ta namen idealna.



Slika 1. Največja zahodna digresija D_1 in največja vzhodna digresija D_2 ter spodnja kulminacija C_1 in zgornja kulminacija C_2 nadobzorniške zvezde; O opazovališče na severni zemeljski poluti, P severni nebesni pol, kot $NOP = \phi$.

LITERATURA

[1] M. M. Dagaev in dr., *Astronomija*, Prosveščenie, Moskva 1983.
[2] M. Prosen, *Vrtenje neba*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 151.

VESTI

Novi člani društva v letu 2001[1]

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 30 novih članov:

2031. Bajuk Barbara
2032. Bartolj Veronika
2033. Colnar Dušanka
2034. Cebulj Bogdana
2035. Djonović Miloš
2036. Hajdinjak Štefan
2037. Hauptman Nataša
2038. Janežič Tanja
2039. Jelenko Melita
2040. Krajnc Gubenšek Sonja
2041. Lampreht Katja
2042. Levpušček Agata
2043. Mali Simon
2044. Markelc Vida
2045. Nemec Dušan
2046. Novak Nika
2047. Ošlak Vilma
2048. Ožek Matej
2049. Pirc Peter
2050. Povh Janez
2051. Ribič Ivan
2052. Robič Marjana
2053. Ribičić Mihaela
2054. Šambolič Beganovič Amela
2055. Sivčev Biljana
2056. Škulj Damjan
2057. Veber Tanja
2058. Vizjak Branko
2059. Zorko Mirko
2060. Žitnik Arjana

Vladimir Bensa

[1] Novi člani za leto 2000 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **48** (2001), XX.

K 1/7/02

100000662,3

COBIS

VESTI

VELIKI SLOVAR TUJK v pre

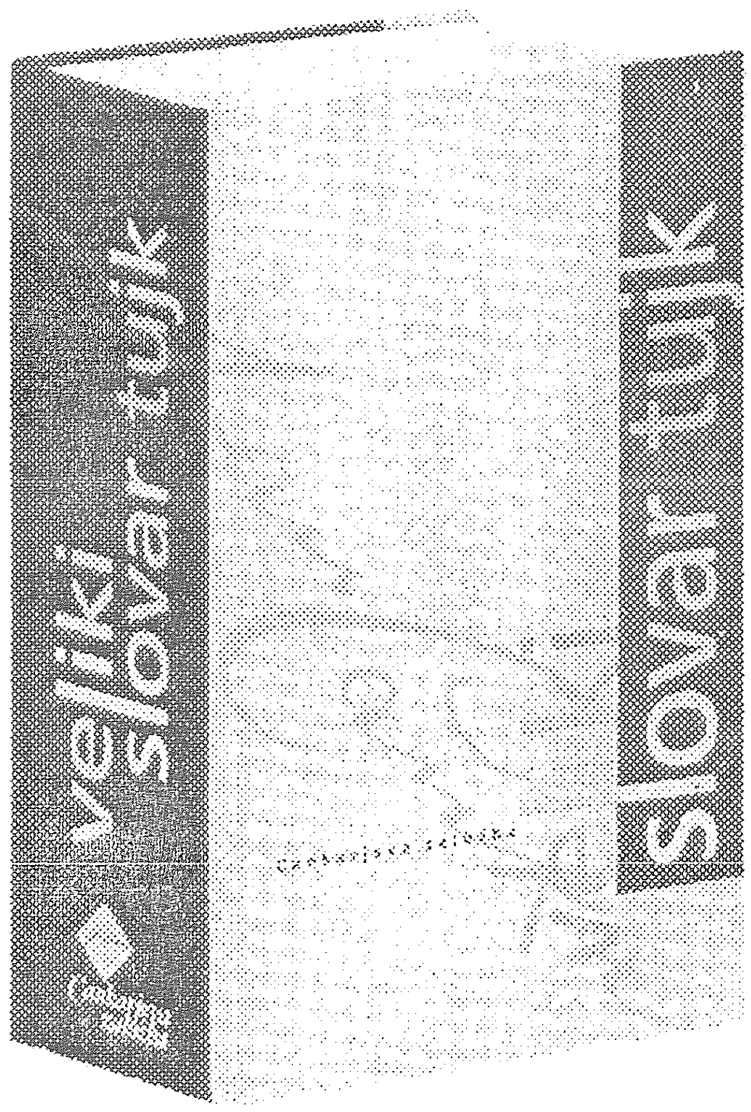
Nova generacija jezika – ugodno za člane

V sodelovanju s Cankarjevo založbo smo se odločili, da članom društva ponudimo nov slovar tujk po še posebej ugodni prednaročniški ceni **17.000 tolarjev** (po izidu bo stal 25.500 tolarjev). Naročite ga lahko pisno na naslov
DMFA–založništvo, p. p. 2964, 1001 Ljubljana,
po telefaksu (01) 2517 281 ali po telefonu (01) 4766 553, 4232 460. Predviden izid knjige je 15. oktober 2002. Knjigo boste po izidu lahko dvignili osebno v naši prodajalni v Ljubljani na Fakulteti za matematiko in fiziko, Jadranska ulica 19. V nadaljevanju sledi nekaj odlomkov iz predstavitve slovarja.

Po petintridesetih letih

Znanosti, vede, stroke in tehnologije v jezik nenehno prinašajo tuje besede. V vsakdanji rabi jezika imajo skoraj polovični delež, približno deset tujk na leto pa prispeva v mednarodno terminologijo tudi slovenščina. Dobro desetletje je beseda tujega izvora na preizkušnji; v tem času se prilagodi, se morda celo križa z domačimi besedami ali pa iz jezika izgine.

Jezik se neprestano spreminja; s tem, ko raste, se levi. Cankarjeva založba je leta 1967 prvikrat zbrala tujke v slovar, ki je v več deset tisoč izvodih skrbel za njihovo pravilno rabo, danes pa je žal v marsičem zastarel. Verbinčev *Slovar tujk* ni opravljal le vloge slovarja, ampak tudi leksikona. Po petintridesetih letih je vrzel na področju leksikalnih del zapolnjena, ostala pa je pereča potreba po novem, izpopolnjenem slovarju tujk.



Nič ni prepuščeno naključju

Veliki slovar tujk temelji na kritičnem pretresu slovenskega slovarskega in leksikografskega gradiva. K sodelovanju so pritegnili številne sodelavce in tehtnost zagotovili z večletnim zbiranjem in obdelovanjem gradiva, s primerjalno analizo sodobnih leksikonov in slovarjev tujk ter z upoštevanjem posebnosti privzetih tujk v slovenskem jeziku.

Obsežno

Knjiga v formatu $15{,}5 \times 24$ cm na okoli 1300 straneh s 45.000 gesli in 40.000 podgesli prinaša dvakrat več gradiva kot Verbinčev *Slovar tujk*. Vsebino črpa iz več kot 40 jezikov in okoli 80 področij.

Strokovno, a prijazno

Jedrnate in poljudne razlage gesel temeljijo na znanstveni podlagi. Gesla razložijo pomen sprejete besede in nakažejo njihov izvor. Opremljena so z izgovarjavo, naglasom, etimologijo, oblikovnimi posebnostmi in figurativno rabo pojmov. Jedrnatim in poljudno razloženim geslom so v dveh praktičnih prilogah dodali še seznam kratic in simbolov ter izbor tujih pregovorov, rekov in fraz. Dvobarven tisk omogoča hitrejše in lažje, pa tudi bolj prijazno iskanje.

Vladimir Bensa